中学校･高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp139-152、2006年3月

解釈学的営みによる方程式に対する数学観の変容

―中世ヨーロッパ方程式論の原典解釈を通して―

筑波大学大学院修士課程教育研究科

大塚　慎太郎

章構成

1. はじめに
2. 研究目的・研究方法
3. 方程式論の原典の教材化
4. 方程式論の原典解釈を基にした授業概要
5. 結果と議論
6. おわりに

要約

本研究では、高等学校・数学Ⅱで学習する方程式に関する内容について、「方程式の理論」として中世ヨーロッパの原典を中心に教材開発し、原典解釈を基にした授業を実践した。その結果、生徒は解釈学的営みにより、方程式が歴史的にどのように研究され、発達していったかを理解し、方程式の研究に対する意識の変容が見られた。

キーワード：解釈学的営み、原典解釈、方程式、数学観の変容

1．はじめに

平成 10 年告示高等学校学習指導要領の高等学校数学科の目標には、「数学的活動を通して創造性の基礎を培う」という文言が新しく入った。学習指導要領解説によれば、創造性の基礎には、「基礎的・基本的な知識・技能の習得を基にして多面的にものを見る力や論理的に考える力」のほかにも、「学習に興味・関心をもち、数学的に考察・処理する力」や「数学的な表現・処理の美しさや数学的な見方や考え方のよさを認識する豊かな感性」なども含まれる。そのため、“ただ解を求める”、“計算をするだけ”といった認識になりがちな方程式を学習するときも、創造性の基礎は培われなければならない。

礒田(2002)は、「他者の立場を想定」し、「他者へ共感」するとともに「他者の考えを鏡に自らの考えを明らかに」する数学的活動を「解釈学的営み」という言葉で表現し、提案している。具体的な活動例としては、「実際の歴史上の原典を開き、その原典を記した人の立場や考え方を想定し、その人に心情を重ねて解釈すると、今、自分たちの学ぶ数学が、異なる、時代・文化背景に生きた人々によって、まるで異なる時代様式で研究され、表現されていたことが体験できる」と、歴史上の原典を解釈する活動を挙げ、奨励している。

また、Jahnke(2000)は、原典を数学教授に取り入れることで、「今日とは用法が

異なる時代に定義された考え」に直接かかわることができると述べている。原典を用いることで、「過去でいかに異なる表示方法が使われていたか」を学び、「我々の表現が原典に現れたときは、過去の表現と比較、対照することで、生徒はその考えの発端や発展における表現の重要な役割を評価する」ことができる。

以上を踏まえ、本研究では、原典解釈を用いた解釈学的営みによって、方程式に対する生徒の数学観の変容を目的とする。そこで、高等学校・数学Ⅱで学習する方程式に関する内容について、「方程式の理論」として中世ヨーロッパの原典を中心に教材開発し、原典解釈を基にした授業実践を行った。原典解釈を用いた方程式に関する先行研究として、伊藤(2001)、熊田(2001)、綾小路(2002)、森本(2002)、倉島(2005)がある。これらの研究では、主に方程式の発達や方程式の解法に関する原典を中心に教材開発をしている。それに対して本研究では、方程式の解法を見つけることだけではなく、方程式やその解の持つ性質まで調べるようになった中世ヨーロッパの方程式論の発展を基に教材開発・授業実践を行うことで、生徒の方程式に対する意識の変容を見ることを目的としている。

2．研究目的・研究方法

(1) 研究目的

数学Ⅱで学習する方程式に関する内容について歴史的原典を取扱い、その方程式の理論の歴史上の発展を知り、生徒が原典を解釈することで、当時の数学を体験し、生徒の数学観、特に方程式の研究に対しての意識がどのように変わるか考察する。

(2) 研究方法

上記の目的の達成のために以下の下位課題を設定する。研究目的に対する研究方法として、原典を取り上げたテキストを開発した。そしてその教材を用いた授業を実践し、アンケートや授業の感想、また授業の様子を撮影したビデオ等により、下位課題が達成されたかどうかを調査する。

下位課題 1：原典解釈による解釈学的営みによって当時の数学を体験することで、昔と今の方程式の理論の違いを知り、現在の数学のよさを考えることができるか。

下位課題 2：中世ヨーロッパにおける方程式論の発展を通し、方程式が歴史的にどのように研究され、発達していくか自ら体験することで、方程式の研究に対する生徒の数学観の変容が見られるか。

3．方程式論の原典の教材化

本研究では、16・17 世紀頃のヨーロッパにおける方程式に関する一次文献を利用してテキストを開発した。主に利用した文献は、カルダノ(Cardano 1545, 1968)、ヴィエト(Viete 1970)、ジラール(Struik, Girard 1969)*のものである。

* ジラールの原典である「Invention nouvelle en l'algebre」(代数学における新発明)は入手困難のため、Struik(1969)を用いて原典の代わりとした。

方程式の理論についての原典を教材化するにあたり、導入としてメソポタミアの粘土板に書かれている問題(カジョリ 1997, p.37-38)を扱った。この粘土板から、メソポタミアではすでに 2 次方程式を解いていたと考えられる。「形式的には、2 次方程式を解く方法—公式といってもよいだろう—を知っていた」(カジョリ 1997, p.38)とあるように、現在でいう 2 次方程式の解の公式は存在していた。

しかし、長い間、2 次より高次な方程式を解く公式は存在しなかった。3 次方程式の解法は 16 世紀になって初めてジロラモ・カルダノ(1501-1576)によって公表された。カルダノは「大いなる技法」で 3 次方程式と 4 次方程式の解法を述べている。当時は方程式の未知数などに文字が使われておらず、方程式は文章で表されていた。そのため、カルダノは文章で 3 次方程式の解の公式を説明している。

カルダノによって 3 次方程式の解の公式が公表され、代数学の研究はさらに盛んになっていった。そこで代数学に重要な貢献をしたのがフランソワ・ヴィエト(1540-1603)である。ヴィエトは方程式の未知数だけでなく、一般係数にも文字を用いた。また、「当時のたいていの数学者にとって、代数学は方程式の根を見つけるということだった」のだが、「ヴィエトは、ただ解を求めるよりも先まで進んだ。」(タバク 2005)ヴィエトは、方程式の解と係数の間に関係があることに気付いていた。そのため、ヴィエトの方程式の理論は、解を求めることだけでなく、方程式そのものが持つ性質を明らかにすることである。

代数学における重要な定理である代数学の基本定理(ガウス, 1799)は、170 年前にアルバート・ジラール(1596-1632)によって推測されている。ジラールはそれまで解として認められていなかった負数や虚数を初めて方程式の解として取り扱った。ヴィエトは方程式の解と係数の関係に気付いていたが、それはまだ完全ではなかった**。ジラールは、「代数学における新発明」において、代数学の基本定理を認めることで、すべての方程式において解と係数の関係が成り立つことを示している。その際、ジラールは様々な定義をすることで、解と係数の関係を定理として説明し、虚数についてもその有用性を述べている。

上述のように、歴史的に見ても方程式の研究は方程式の解を求めることだけではないことがわかる。ヴィエトやジラールによって方程式やその解の持つ性質を調べるようになった。生徒はこれらの数学者の立場に立ち、当時の数学者がどのように方程式をとらえているか体験する。そして、現在学習している方程式に関する理論と比較することにより、本研究の目的・課題が達成されると考える。

4．方程式論の原典解釈を基にした授業概要

(1) 授業環境

①日時：平成 17 年 10 月 25 日、26 日、27 日、28 日(65 分×3 回)

②対象：埼玉県立高等学校　第 2 学年(40 名×2 クラス)
数学Ⅱ、3 次方程式における解と係数の関係は既習

** ヴィエトは数として正の数しか認めていなかった。一方、ジラールは方程式の解として負数や虚数を認めていた。

③準備：コンピュータ(Windows)、Microsoft Power Point、ビデオプロジェクター、実物投影機、授業記録用のデジタルビデオカメラ、事前課題、事前・事後アンケート、授業テキスト

(2) 授業展開

＜1、2 時間目＞

【目標】

メソポタミアの粘土板と 16 世紀のカルダノの「大いなる技法」を原典解釈し、当時の 2 次方程式と 3 次方程式の表記と解法を理解する。また、ヴィエトの「方程式の理解と改良について」を原典解釈することで、方程式への文字の利用や解と係数の関係を導いたことを理解する。

【授業の流れ】

①メソポタミアの粘土板

事前課題として、生徒に前もってメソポタミアの粘土板に書かれている問題「箱の縦は 1/3、高さは横の 12 倍、箱の底(面積)と容積の和は 1 1/6 である。横を求めよ」を解いて提出してもらった。ほとんどの生徒は方程式を立て、因数分解や解の公式を用いて問題を解いていた。この問題がメソポタミアの粘土板に書かれている問題であることを説明した後、生徒は、同じ問題を粘土板に書かれている方法に従って解き、その結果が事前課題で求めた答えと一致することを確認した(資料 1)。そして、メソポタミアの時代では、すでに 2 次方程式を解いているのではないかと考えた。

箱の縦は $\frac{1}{3}$ 高さは横の12倍, 箱の底 (面積) と容積の和は $1\frac{1}{6}$ である。

・$\frac{1}{3}$ **に12を掛けると, (① 4)**

・**①に** $1\frac{1}{6}$ **を掛けて (②** $\frac{14}{3}$ **)**

・$\frac{1}{3}$ **の半分は (③** $\frac{1}{6}$ **)**

・**③を二乗すると (④** $\frac{1}{36}$ **)**

・**②に④を加えて (⑤** $\frac{169}{36}$ **)**

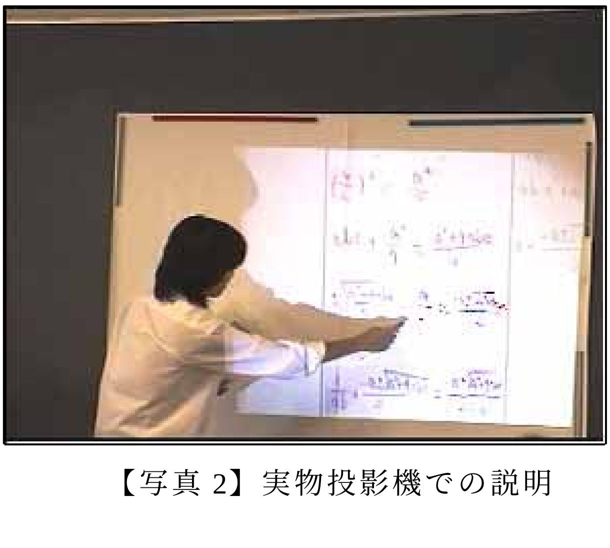
・**⑤の平方根は (⑥** $\frac{13}{6}$ **) でそれと③の差は (⑦ 2) である。**

・**①の逆数を作れば (⑧** $\frac{1}{4}$ **)。**

・**⑧に⑦を掛ければ (⑨** $\frac{1}{2}$ **)。**

【資料 1】メソポタミアの粘土板の問題
カジョリ(1997)より抜粋

その後、この問題を一般化して考えた。生徒は、縦を a、高さを横の b 倍、箱の底(面積)と容積の和を c として、粘土板に書かれている方法と現代の方法で解き、これらの解法を比較することで、メソポタミア人は 2 次方程式を解けたかどうか考えた(写真 2)。



【写真 2】実物投影機での説明

中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp139-152、2006年3月

生徒との対話 1

授業者：メソポタミア人は何をしていると思いますか？

生徒 A：横の長さを求めている。

生徒 B：結局、2 次方程式を解いている。これは解の公式と同じ。

授業者：どうしてそう思うの？

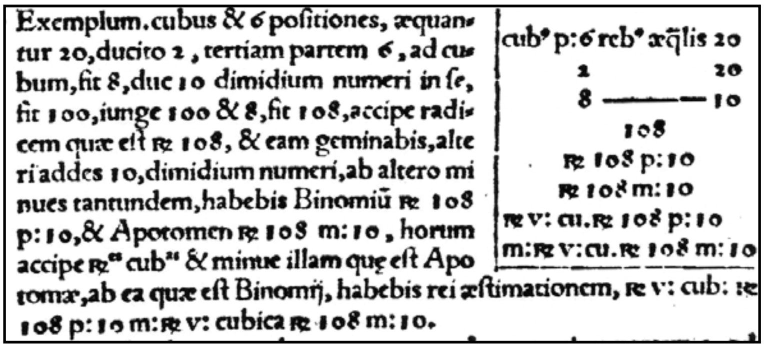
生徒 B：メソポタミアの方法は何をしているかわからない。でも解の公式で解いたものと答えが一致するからその(メソポタミアの)方法は正しい。

②カルダノの「大いなる技法」

メソポタミアでは、今では 2 次方程式を用いて解く問題の解法がすでに存在していたことを確認した後、カルダノの解法と呼ばれている 3 次方程式の解の公式があること、3 次以上の高次方程式の解を求める方法は 16 世紀になっても知られていなかったことを説明した。そこで、3 次方程式の解法を公表したカルダノについて紹介した。さらに、「大いなる技法」にある 3 次方程式の解き方(資料 3)を紹介し、生徒はカルダノの方法を参考にして 3 次方程式「$x^3+6x=20$」を解き、その解が本当に正しいか検算して確かめた。その後、「大いなる技法」でカルダノが説明している部分を提示した(資料 4)。

> 未知数の係数の三分の一の立方に、方程式の定数の二分の一の平方を加え、全体の平方根をとりなさい。これを二つ作り、ひとつは定数の二分の一を加え、もうひとつは同じものを引きなさい。そうすれば、binomium（前者）と apotome（後者）が得られます。そして、binomium（前者）の立方根から apotome（後者）の立方根を引けば、その残りが未知数の値になります。

【資料 3】「大いなる技法」
Cardano(1968)より筆者が和訳


Exemplum. cubus & 6 positiones, æquantur 20, ducito 2, tertiam partem 6, ad cubum, fit 8, duc 10 dimidium numeri in se, fit 100, iunge 100 & 8, fit 108, accipe radicem quæ est ℞ 108, & eam geminabis, alteri addes 10, dimidium numeri, ab altero minues tantundem, habebis Binomiū ℞ 108 p: 10, & Apotomen ℞ 108 m: 10, horum accipe ℞ cub & minue illam quę est Apotomæ, ab ea quæ est Binomij, habebis rei æstimationem, ℞ v: cub: ℞ 108 p: 10 m: ℞ v: cubica ℞ 108 m: 10.

cub p: 6 reb æqlis 20
2 20
8 —— 10
108
℞ 108 p: 10
℞ 108 m: 10
℞ v: cu. ℞ 108 p: 10
m: ℞ v: cu. ℞ 108 m: 10

【資料 4】
「大いなる技法」(Cardano 1545)

さらに、生徒は問題 1 としてカルダノの示した解法で 3 次方程式「$x^3+ax=b$」の解を求めた。

生徒との対話 2

授業者：どうして問題 1 をやったと思いますか？

生徒 A：一般化するため。

授業者：カルダノは一般化していると思いますか？

生徒 A：していると思う。

授業者：もし自分がこの時代にいて、この公式を知っていたら、世の中にど

のように発表しますか。

生徒 B：問題 1 で答えたように。

授業者：問題 1 のようにとは？

生徒 B：問題 1 のように式で表す。

授業者：どうしてそのようにするの？カルダノの表し方だとどうなの？

生徒 B：(カルダノの表し方だと)わかりにくいから。その(問題 1 の)表し方だとぱっと見たときにわかりやすい。

③ヴィエトの「方程式の理解と改良について」

初めに、ヴィエトとカルダノの原典を見せ、生徒にこれらの異なるところを答えてもらった。生徒の答えとしては、「A、B、D、G のような記号を使っている」という答えが挙がった。その後、方程式の未知数や既知数に初めて文字を用いたというヴィエトの紹介をした。

ヴィエトの原典「方程式の理解と改良について」(資料 5)から 2 次方程式における解と係数の関係を示している定理Ⅰを抜き出し、生徒は定理の中にある式を現代表記に直した。その際、生徒にはこの定理が解と係数の関係を示していることは伏せ、ヴィエトが書いた他の式の現代表記を参考にした。ここでは、ヴィエトはただの式ではなく、方程式を表していることを強調するために、現代表記に直すときに未知数として x を用いた。そして、現代表記に直した定理から何がわかるか、ヴィエトはこの定理で何を伝えようとしたのか生徒に発問した。生徒は「因数分解をしている」や「展開公式ではないか」と答えている。


CAPVT XIV.

Collectio quarta.

THEOREMA I.

Si B+D in A − A quad., æquetur B in D: A explicabilis est de qualibet illarum duarum B vel D.

3N − 1Q, æquatur 2. fit 1N 1, vel 2.

THEOREMA II.

Si A cubus −B−D−G in A quad. +B in D + B in G + D in G in A, æquetur B in D in G: A explicabilis est de qualibet illarum trium B, D, vel G.

1C − 6Q + 11N, æquatur 6. Fit 1N 1, 2, vel 3.

THEOREMA III.

Si B in D in G + B in D in H + B in G in H + D in G in H in A − B in D − B in G − B in H − D in G − D in H − G in H in A quad. + B + D + G + H in A cubum − A quad.quad., æquetur B in D in G in H: A explicabilis est de qualibet illarum quatuor B, D, G, H.

50N − 35Q + 10C − 1QQ, æquatur 24. fit 1N 1, 2, 3, vel 4.

THEOREMA IV.

Si A quadrato-cubus −B−D−G−H−K in A quad.quad. + B in D + B in G + B in H + B in K + D in G + D in H + D in K + G in H + G in K + H in K in A cubum −B in D in G − B in D in H − B in D in K − B in G in H − B in G in K − B in H in K − D in G in H − D in G in K − D in H in K − G in H in K in A quad. + B in D in G in H + B in D in G in K + B in D in H in K + B in G in H in K + D in G in H in K in A, æquetur B in D in G in H in K: A explicabilis est de qualibet illarum quinque B, D, G, H, K.

1QC − 15QQ + 85C − 225Q + 274N, æquatur 120. Fit 1N 1, 2, 3, 4, vel 5.

Atque hæc elegans & perpulchræ speculationis sylloge, tractatui alioquin effuso, finem aliquem & Coronida tandem imponito.

【資料 5】

「方程式の理解と改良について」

(Viete 1970, p.158)

さらに 3 次方程式の解と係数の関係は既習であることから、3 次方程式における解と係数の関係を示している定理Ⅱについても、同じように定理の中にある式を現代表記に直すように指示した(資料 6)。また、定理Ⅱの逆を証明することで、生徒から「解と係数の関係」という言葉を聞くことができた。

定理Ⅱ

もし、

$A\,\mathrm{cubus}\,\overline{-B-D-G}\ \mathrm{in}\ A\,\mathrm{quad}.\ \overline{+B in D+B in G+D in G}$

$\mathrm{in}\ A\ aequatur\ B\ \mathrm{in}\ D\ \mathrm{in}\ G$

ならば、Aは 3 つの量 B、Dまたは Gに等しい。

$1C-6Q+11N, aequatur, 6$において、$1N$に 1 、 2 、または 3 を当てはめてみよ。

【資料 6】「方程式の理解と改良について」

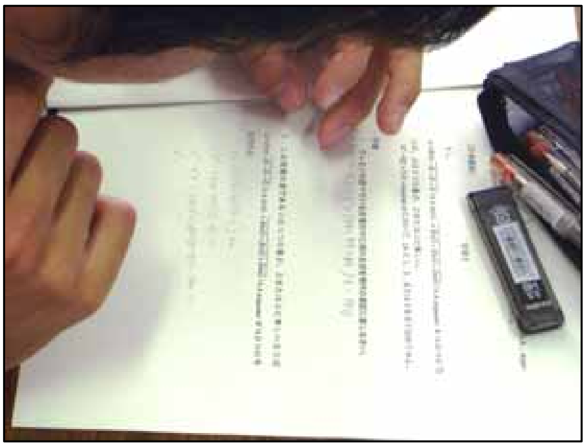
Viete(1970)より筆者が和訳

中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp139-152、2006年3月

＜3 時間目＞

【目標】

ジラールの「代数学における新発明」(Struik 1969)を原典解釈することで、ジラールが代数学の基本定理を認め、一般の代数方程式における解と係数の関係を示していることを理解する。



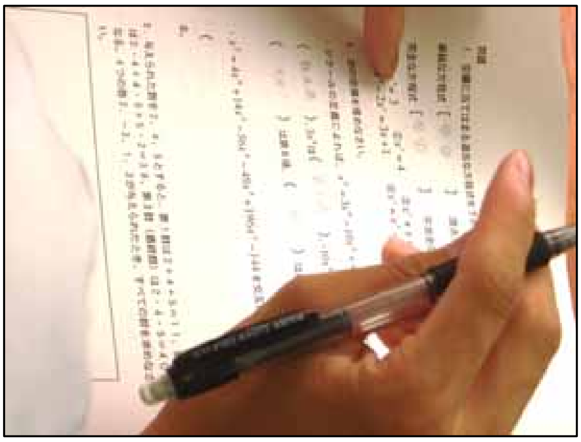
【写真 7】問題を解いている様子

【授業の流れ】

①代数学の基本定理の紹介

事前課題で「n 次方程式は n 個の解を持つか」という質問をした。ほとんどの生徒は「持つ」と答えているが、中には「虚数解があるから n 個よりは小さい」や「グラフが単調増加のときには x 軸と 1 点でしか交わらない」と答えている生徒もいる。「持つ」と答えた生徒の中には「必ず因数分解できるから」と答えた生徒もいる。そこで、1799 年にガウスによって証明された代数学の基本定理を紹介した。

②ジラールの「代数学における新発明」



【写真 8】問題を解いている様子

次にガウスが証明するよりも 170 年も前にこの代数学の基本定理を推測したジラールの紹介をした。ジラールは「代数学における新発明」において、代数学の基本定理を基に解と係数の関係を示している。そこでジラールは、定理として解と係数の関係を示すためにいくつかの定義をしている(資料 9)。そのため、生徒には、ジラールの原典解釈をする際、定義を理解するためのいくつかの練習問題を出題した(写真 8)。問題は、定義がわかればすぐに解けるため、ほとんどの生徒ができていた。その後、定理(資料 10)とその解説の原典解釈をし、問いに答えることで、定理でどのようなことが述べられているのか確認した。

生徒との対話 3

授業者：ジラールは、n 次方程式は n 個解を持つという代数学の基本定理を認めていたが、もし、この定理を認めていなかったらどうなると思う？

生徒 A：定理Ⅱが成り立たない。

授業者：なぜ成り立たないと思うの？

生徒 A：解が n 個出てこないから、解と係数の関係が成り立たないから。

授業者：そうだね。もし解が n 個出てこなかったら、ジラールの述べているこの定理Ⅱは成り立たないよね。実は、この時代ではまだ負の数や虚数は数として認められていなかったんだ。だから実はヴィエトは

正の数しか数として認めていなかった。ジラールはどうだと思う？

生徒 B：認めていた。

授業者：なぜ？

生徒 B：ここに(原典を指して)虚数が出てきてるから。

授業者：じゃあ、負の数は？

生徒 B：・・・。

(時間の関係上、負の数についてはこれ以上議論できなかったため、授業者がジラールは負の数を認めていたことを解説した。)

後に続く定理はいくつかの新しい表現をするので、定義からはじめる。

定義１．単純な方程式とは、ひとつの項が定数に等しい方程式のことである。そうでないものを構成された方程式、あるいは混合方程式という。

定義３．完全な方程式とは、すべての項を省略することなく持つものである。

定義４．不完全な方程式とは、項を全部は持たない混合方程式である。

定義８．混合方程式において、最高次の項を極大項あるいは頂点、それより次数が１低い項を第１項といい、さらに１低い項を第２項といい、・・・、x^0 の項（定数）を最終項あるいは底点という。

定義 10．方程式を交互に整理するとは、最高次の項の係数を１にし（さらに符号を＋にする)、偶数乗の項と奇数乗の項を分けることをいう。つまり、一方を方程式の主部（左辺）に、他方を述部（右辺）に分けることである。

定義 11．いくつかの数が与えられたとき、そのすべての数の総和を第１群、２つの数の積の総和を第２群、３つの数の積の総和を第３群、・・・、すべての数の積を最終群と呼ぶ。そして、与えられた数と同じ数の群がある。

【資料 9】「代数学における新発明」：Struik(1969)より筆者が和訳

Theorem II. All equations of algebra receive as many solutions as the denomination of the highest term shows, except the incomplete,[10] and the first faction of the solutions is equal to the number of the first mixed, their second faction is equal to the number of the second mixed; their third to the third mixed, and so on, so that the last faction is equal to the closure, and this according to the signs that can be observed in the alternate order.

定理２．　不完全な方程式を除いて、すべての代数方程式は最高次の項の次数と同じ数の解を持ち、その方程式の解の第１群は第１項の係数、第２群は第２項の係数、第３群は第３項の係数とそれぞれ等しくなしたときに見られる符号と一致する。

【資料 10】「代数学における新発明」：英語(Struik 1969)、日本語(筆者訳)

中学校･高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp139-152、2006年3月

5．結果と議論

2 で挙げた研究目的・下位課題についてここで議論する。

下位課題 1：原典解釈による解釈学的営みによって当時の数学を体験することで、昔と今の方程式の理論の違いを知り、現在の数学のよさを考えることができるか。

このことについて考察するにあたり、授業終了後に行った生徒へのアンケート 1(方程式に関する歴史を見ることで方程式に対する意識は変わったか)の内容の一部を以下に記す。

アンケート 1 に対する生徒の答え

① 昔の人たちは、現代で当たり前となっている式を複雑に文字を使わずに解いていたのには驚きました。
② 単に計算に利用してきた「公式」はメソポタミア文明から研究されてきて、今に至っていることを教わり驚いた。
③ 変わりました。自分は方程式が何なのかさえよく分からず使っていたのに、それを文章で表したり、その後には文字で表した人も現れたことに驚いたからです。
④ 昔の面倒臭い計算から現在の方程式までの進化に数学のすごさを感じた。
⑤ 当たり前のように使っていたが歴史を知ることによって、方程式のすばらしさ、重要性がわかった。
⑥ 思った以上に方程式は歴史が古く、昔からの研究の結果で今、自分たちが手軽に方程式を学べるようになったのだと思うようになった。
⑦ 少し変わりました。理由は、メソポタミアのときの数学はとてもわかりにくかったけど、時代が進むにつれて「方程式」という便利な考えがうまれたことでわかりやすくなったことを知ったからです。

授業では原典として、メソポタミアの粘土板、カルダノ、ヴィエト、ジラールのものを扱った。この中でも特に、メソポタミアの粘土板とカルダノの「大いなる技法」の原典解釈をする際に、当時の数学を体験し、現代の数学と比較したと考える。メソポタミアの粘土板の問題を考えたときの“生徒との対話 1”から、生徒は、メソポタミアの粘土板の問題をその時代の方法で解き、現代の方法と比較することで、2 次方程式という自分たちの知っている数学を異なる数学として体験している。また、カルダノの「大いなる技法」に書かれている 3 次方程式の解法を現代表記に直したときの“生徒との対話 2”からは、生徒は、カルダノの示した 3 次方程式の解法を自分たちの知っている数学に直すことで、昔と今の数学を比較し、現代の表現方法のよさを考えていることがわかる。

また、上記のアンケートの結果より、①～⑦のいずれの生徒も、解釈学的営みから当時の数学を体験し、昔と今の数学を比較することで、現代の数学のよさを

実感していることがうかがえる。特に、①～③の生徒は、現代の数学を当たり前のように思っていたり、方程式がどのようなものなのかわかっていなかったりしていたが、原典解釈によりメソポタミアの粘土板にある数学から中世のヨーロッパの数学を体験することで、現在の数学との違いに驚嘆している。④、⑤の生徒は、方程式の発展を知ることで数学・方程式のすごさやすばらしさを感じている。特に⑤の生徒は、当たり前のように使っていたという方程式に対する認識が変容している。⑥の生徒は、方程式の歴史を学ぶことで、それまでの研究の成果に敬意を示している。そして、現代の方程式は先人の作り上げてきたものであることを理解し、現在の方程式のよさを実感している。⑦の生徒は、解釈学的営みによりメソポタミアの数学を体験し、「わかりにくかった」と感じている。そして、方程式の発達を知ることで、現在の方程式に対する意識が変容している。

これらのことから、生徒は、解釈学的営みにより、現在の数学・方程式との比較により、現在の数学・方程式のよさを実感しているといえ、下位課題 1 は達成されたといえる。

下位課題 2：中世ヨーロッパにおける方程式論の発展を通し、方程式が歴史的にどのように研究され、発達していくか自ら体験することで、方程式の研究に対する生徒の数学観の変容が見られるか。

このことについて考察するにあたり、授業開始前と終了後に行った生徒へのアンケート 2(「方程式の研究」とはどのようなことをすると思うか)の内容の一部を以下に記す。また、アンケート 1 の一部も同様に記す。

<u>アンケート 2 に対する生徒の答え</u>

(事前アンケートの答え)→(事後アンケートの答え)

① もとめる数を数式を用いて答えを出す。
→ 文字を使って方程式がどのように成り立っているかを研究すること。
② 未知数を導き出す。
→ 「方程式の解から式を求める」、「n 次方程式の解の個数は n 個だということを求める」など、答えを解くだけではなく、式に秘められた法則などを見つけ出すこと。
③ よく分からない。
→ ただ方程式を解くだけでなく、その結果からもとの式を求めたり、解は何個あるか調べること。
④ 世の中の物事を方程式で解いてみる。
→ 方程式を解くだけでなく、新しい定理などを生み出すこと。
⑤ 数字から無限に式を組み立てていく。
→ 解を求めるだけでなく、係数や他の要素から方程式を考えていく。
⑥ 無解答
→ 解くことはもちろんその解き方を考えそれを証明すること。

⑦ x が何乗されたりしたとき、どのような解が存在するのかとか。
→ 解く事やその解を含め様々な角度から方程式を見つめること。

アンケート１に対する生徒の答え

⑧ 未知数を求めるだけでなく、式の解から係数を求めたりなどいろいろな考え方があるので奥が深いと思いました。
⑨ 方程式は解くだけのものだと思っていましたが、授業を受けて解き方を考えるのも方程式の歴史なんだと聞いて方程式への見方が変わりました。
⑩ 解く事だけが重要じゃないということがわかった。
⑪ 方程式は最初から数字と文字を使った式でできているものだと思ったけれど、いろいろ文章を書いたりし、改良を加えて今のようになったということを聞いたので、またこれからも方程式はどんどん変わっていくのかなと思いました。
⑫ 以前より方程式が身近なものに感じられた。それは、方程式とは数学でしか習わないと思っていたけれど、歴史の中で方程式について考えた人達を学ぶことで興味深くなったから。
⑬ 普段の授業では、方程式や二次方程式、その他、微積やベクトルなどといった分野の問題解法しかやりませんでしたが、ひとつの分野についてこれほど根深かったのかと驚きました。

上記のアンケートの結果から、生徒の方程式の研究に対する数学観の変容を見出すことができる。例えば、①～④の生徒は、事前アンケートでは「答えを出す」や「未知数を導き出す」などといった解を求めることが方程式の研究のイメージであるが、事後アンケートでは、解を求めることだけではなく、「法則を見つけ出す」や「新しい定理を生み出す」といった方程式の持つ性質や法則を見つけることを方程式の研究として捉えている。これから、“方程式を解く”ことに加え“方程式のしくみを研究する”ことも方程式の研究のひとつだという認識が生徒の中に生まれたといえる。このことは、アンケート１の結果から⑧～⑩の生徒にも共通していえることである。また、⑤の生徒のように、事前アンケートでは「式を組み立てる」といった方程式を立てることが方程式の研究のイメージであっても、事後アンケートにあるように、解を求めることだけではなく、方程式そのものを考えることが方程式の研究として捉えられている。さらに、⑥の生徒は、事前アンケートでは無解答だったのだが、事後アンケートでは、方程式を「解くこと」だけではなく、「解き方を考え、それを証明すること」のように、方程式の研究に対する意識が明確になったといえる。このような事前アンケートで無解答だった生徒は他にも多数見られたが、どの生徒も事後アンケートでは、数学の研究に対する明確なイメージをもつことができた。また、⑦の生徒からもわかるように、方程式の「解」についての研究に加え、「方程式」そのものを研究するというように方程式の研究に対する数学観が変容している。また、⑪の生徒は、方程式の発

達の歴史を知り、方程式に対して「どんどん変わっていく」という見方をしている。このことから、この生徒は、現在の方程式の研究が完成されたものではなく、まだまだ発展していくというイメージを持つようになったといえる。また、⑫、⑬の生徒のアンケートから、これらの生徒は普段の数学の授業では得られない数学に対する見方をもつことができたといえる。そのことから、生徒は、数学に対する見方が変わり、数学に対し興味・関心をもつことができたといえる。

このような生徒の数学観の変容は、中世ヨーロッパの方程式論の発展を通じた学習によって促されたものであり、下位課題 2 は達成されたといえる。

ところで、「1．はじめに」で述べたように、原典解釈を用いた方程式に関する先行研究は主に 5 つ挙げられる。その中でも、伊藤、熊田、綾小路の研究は、方程式の解法や方程式の発達についての原典解釈を通じて、生徒が数学を文化として捉えるようになることや数学を発展的なものとして捉えられるようになることを目的としている。また、森本は、高次方程式の解法として Horner 法や数学九章での解法、整関数作図器での解法を通じて高次方程式の理解が進むことを研究している。倉島は、代数学として学習する方程式の幾何的証明を通じて、多面的な数学として方程式を捉えられるようになることを研究している。

それらの研究に対し、本研究では、「数学Ⅱで学習する方程式に関する内容について歴史的原典を取扱い、その方程式の理論の歴史上の発展を知り、生徒が原典を解釈することで、当時の数学を体験し、生徒の数学観、特に方程式の研究に対しての意識がどのように変わるか考察する」ことを目的としている。そのため、方程式の解法だけに着目するのではなく、方程式そのものが研究され始めた時代の原典を取り扱った。内容としては、数学Ⅱで学習する高次方程式に関する内容を中心に教材を開発した。そして、これまで考察してきたように、このような授業を行うことで生徒の方程式の研究に対する数学観は変容し、生徒の中に数学に対する新たなイメージが形成されることが考察できた。

6．おわりに

本研究では、高等学校・数学Ⅱで学習する方程式に関する内容について、「方程式の理論」として中世ヨーロッパの原典を中心に教材開発し、原典解釈を基にした授業を実践した。そして、この授業を通し、生徒の数学観、特に方程式の研究に対しての意識がどのように変わるか考察した。

その結果、生徒は解釈学的営みにより、方程式が歴史的にどのように研究され、発達していったかを理解することで、生徒の方程式の研究に対する数学観は変容し、生徒の中に数学に対する新たなイメージが形成されることが考察できた。

今回の研究では、数学の中でも方程式の研究に関する意識の変容しか考察しなかった。しかし、他の数学の分野においても数学の研究に対するイメージの変容を起こす教材を考えることができると考える。さらに、これらの数学観の変容により、数学に対する興味・関心をよりいっそう喚起できると考える。また、今回

の研究では、ジラールの研究の一部しか取り上げなかったが、ジラールが負数や虚数を早い時期に認めたという点を考えれば、これらのことに関しても教材化が可能であると考える。

謝辞

研究授業の実施に際して、埼玉県立春日部高等学校の早乙女勤先生、坂本昭雄先生をはじめとする数学科の先生方には、多大なるご協力と共に、貴重なご指導をいただきました。ここに厚く御礼申し上げます。

注） 本研究は、文部科学省科学研究費特定領域研究(2)課題番号 17011014「代数・幾何・微積分の動的理解を促す「使える数学」教材サイトの開発に関する研究ー数学用機械とJAVAによる移動・変換と関数・微積ハンズオン教材のWEB化研究（II）ー」研究代表者礒田正美）による研究の一環として行われた。

引用・参考文献

文部科学省 (2005). *高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編*. 実教出版.

礒田正美 (2002). 解釈学からみた数学的活動論の展開: 人間の営みを構想する数学教育学へのパースペクティブ. *筑波数学教育研究*, 21,1-10.

礒田正美 (2001). 異文化体験からみた数学の文化的視野の覚醒に関する一考察: 隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて. *筑波数学教育研究*, 20,39-48.

Jahnke, H. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom, In Fauvel, J. and Maanen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education* (pp291-328). Kluwer Academic Publishers.

伊藤賢二郎(2001). 数学観を変容させる数学史の効果: 中世の代数史を用い、数学を文化として捉えることをねらって. *中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(8) 世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育: 代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開* (pp174-184). 筑波大学数学教育学研究室.

熊田真一(2001). 文化としての数学学習に関する一考察: 方程式の解の公式の歴史的解釈を通して. *中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(8)世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育: 代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開* (pp185-194). 筑波大学数学教育学研究室.

綾小路尚子(2002). 方程式の歴史的原典解釈による文化的営みとしての数学学習. *中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)教育評価の転換と歴史文化志向の数学教育: ADDING IT UP: Helping Children Learn Mathematics* (pp136-150). 筑波大学数学教育学研究室.

森本貴彦(2002). 原典を利用した高次方程式の授業に関する一考察: 「Horner 法」「数学九章」「整関数作図器」を通じて. *中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)教育評価の転換と歴史文化志向の数学教育: ADDING IT UP: Helping Children Learn Mathematics* (pp178-191). 筑波大学数学教育学研究室.

倉島彩子(2005). 方程式の幾何学的証明を用いた授業研究: 解釈学的営みを通した創造性の育成. *中学校･高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)Numeracy の規定の諸相と歴史文化志向の数学教育: 新しい教育課程へのアプローチ* (pp209-219). 筑波大学数学教育学研究室.

カジョリ(1997). (小倉金之助 補訳). *復刻版カジョリ初等数学史*. 共立出版.(原著出版 1955)

ジョン・タバク(2005). (松浦俊輔 訳). *はじめからの数学 2, 代数学: 集合、記号、思考の言語*. 青土社.

ファン・デル・ヴェルデン(1994). (加藤明史 訳). *代数学の歴史: アルークワリズミからエミー・ネーターへ*. 現代数学社.

Cardano, G. (1545). *Ars Magna*.

Cardano, G. (1968). (Translated and edited by T. Richard Witmer). *Ars magna, or, The rule of algebra*. Dover.(原著出版 1545)

Viete, F. (1970). De AEquationum recognitione et emendatione. Joseph E Hofmann (Eds.), *Francois Viete Opera Mathematica*. GEORG OLMS.

Struik, D. (1969). *A source book in mathematics, 1200-1800*. Harvard University Press.