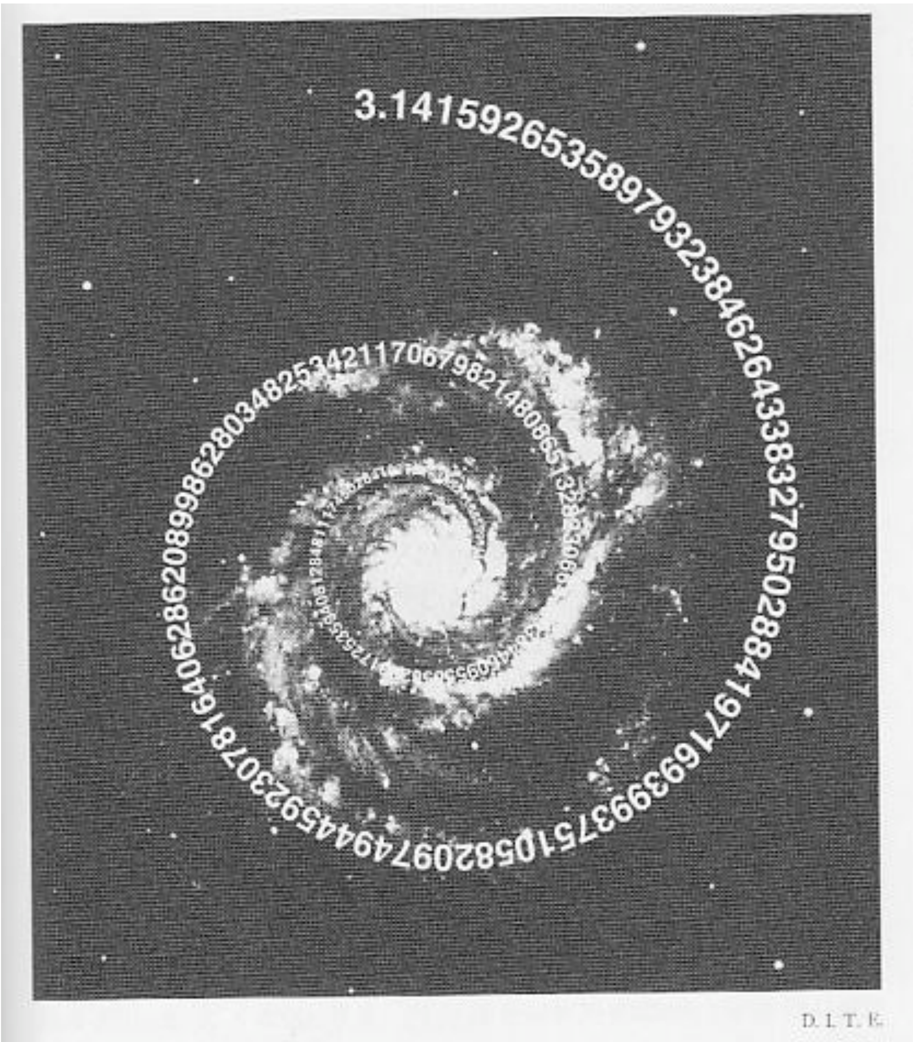
授業研究第３日目

# 授業資料

## ―― π の探求 ――




π ―魅惑の数―　ジャン＝ポール・ドゥラエ　朝倉書店　P.147

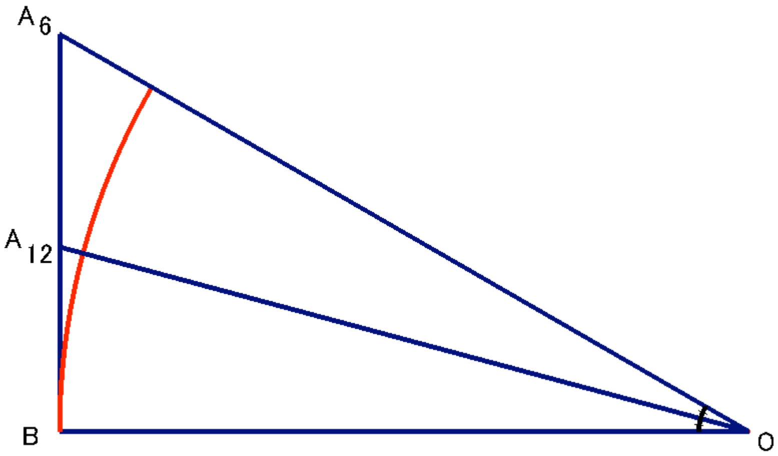

授業者：淡川直樹
（筑波大学大学院修士課程教育研究科１年）


| 年　　組　　番 |
| --- |
| |

## １，角の２等分線の辺と比の性質

２等分線の辺の比の性質

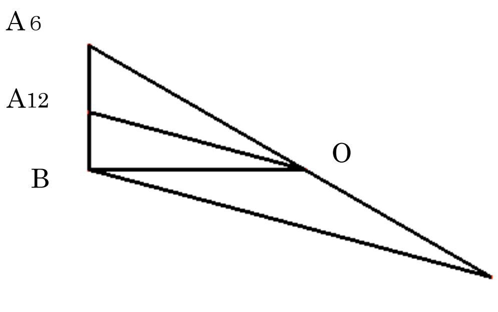
$$OA_6 : OB = A_6A_{12} : BA_{12}$$




この証明法を利用して

$OA_6 : OB = A_6A_{12} : BA_{12}$

以外の辺の比を考えよう！！



このうちのどれかを使うと

$\dfrac{BO}{BA_{12}}$ を $\dfrac{OB}{BA_6}$ と $\dfrac{OA_6}{BA_6}$ で表せる！

つまり

$$\frac{BO}{BA_{12}} = \boxed{\quad} + \boxed{\quad}$$

$$\frac{OB}{BA_{24}} = \boxed{\quad} + \boxed{\quad}$$

$$\frac{OB}{BA_{48}} = \boxed{\quad} + \boxed{\quad}$$

$$\frac{OB}{BA_{96}} = \boxed{\quad} + \boxed{\quad}$$

$\dfrac{OB}{BA_{96}}$ が出たので目的の外接正９６角形の周は

$2\pi_{96} \cdot BO = 96 \times 2BA_{96}$ より近似出来る！

## ２，外接正多角形を基にπの近似の公式を導いてみよう！

　アルキメデスの方法を用いて外接正多角形を基にした公式を導いてみよう！
そこで、内接正多角形を基にした１日目の公式と比較しよう！！

**比較するために**

**内接正ｎ多角形を基にした円周率の近似値を** $\pi_n$›

**外接正ｎ多角形を基にした円周率の近似値を** $\pi'_n$›

**＜外接正１２角形＞**›

$$2\pi'_{12} \cdot BO = 12 \times 2BA_{12}$$ より

$$\pi'_{12} = 12 \times \frac{BA_{12}}{BO}$$

⑦> $\pi'_{12}$を求めてみよう！

＞＞＞ 確認

＞＞＞ 分かっている値

$$\frac{OB}{BA_6}=\sqrt{3} \qquad \frac{OA_6}{BA_6}=2$$

＞＞＞ 角の２等分線の性質から

$$\frac{BO}{BA_{12}}=\frac{OA_6}{BA_6}+\frac{BO}{BA_6}$$

$$\pi'_{12}=12\times\frac{BA_{12}}{BO}$$

$$=$$

値………

＜外接正１２角形＞>

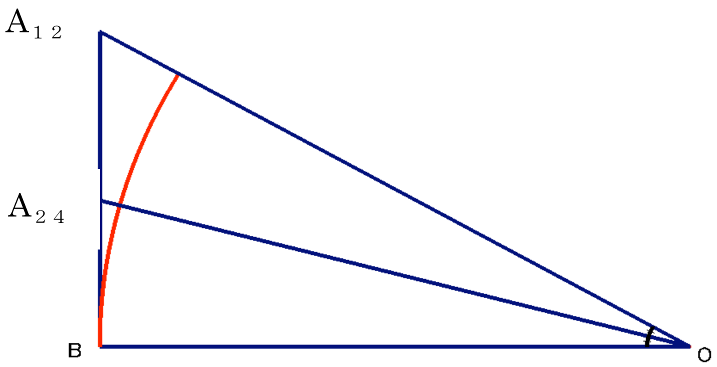
$$2\pi'_{12} \cdot BO = 12 \times 2BA_{12}$$ より

$$\pi'_{12} = 12 \times \frac{BA_{12}}{BO}$$

②> $\pi'_{24}$ を求めてみよう！

角の２等分線の性質から

$$\frac{BO}{BA_{24}} = \frac{OA_{12}}{BA_{12}} + \frac{BO}{BA_{12}}$$




$\dfrac{OA_{12}}{BA_{12}}$ はどのようにして求められるのだろうか？

$$\pi'_{24} = 24 \times \frac{BA_{24}}{BO}$$

$$=$$

値………

## ＜内接正多角形を基にした公式＞

一日目の公式

$$\pi_{12} = \frac{12}{2} \times \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$\pi_{24} = \frac{24}{2} \times \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$\pi_{48} = \frac{48}{2} \times \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

$$\pi_{96} = \frac{96}{2} \times \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}$$

付録

本来のアルキメデスの原典は $\dfrac{1351}{780} > \sqrt{3} > \dfrac{265}{153}$ を用いて円周を外接多角形と内接多角形で近似した。今回はπの近似法に注目したいので、現代で用いられる $\sqrt{3}$ を使った。以下、アルキメデスの $\sqrt{3}$ の近似法を載せた。興味のある人は是非見てチャレンジして欲しい。

## $\dfrac{265}{153} < \sqrt{3} < \dfrac{1351}{780}$ の証明

$A = a^2 + b \qquad (b > 0)$

$\sqrt{A} = a + c \qquad (|c| < 1)$

とおき、ｃ${}^2$を無視すると上から押さえることができる。

$A = a^2 + b = a^2 + 2ac + c^2 > a^2 + 2ac$

$b > 2ac$

$c < \dfrac{b}{2a}$

$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b} = a + c < a + \dfrac{b}{2a}$

$\therefore \sqrt{a^2 + b} < a + \dfrac{b}{2a}$

また、$\begin{array}{l} A = a^2 - b \qquad (b > 0) \\ \sqrt{A} = a - c \qquad (|c| < 1) \end{array}$

に対しても同様にすると、

$A = a^2 - b = a^2 - 2ac + c^2 > a^2 - 2ac$

$-b > -2ac$

$c > \dfrac{b}{2a}$

$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 - b} = a - c < a - \dfrac{b}{2a}$

$\therefore \sqrt{a^2 - b} < a - \dfrac{b}{2a}$

よって、

$$\sqrt{a^2 \pm b} < a \pm \frac{b}{2a} \qquad \cdots①$$

となる。次に下から押さえるように工夫する。｜ｃ｜＜１より、ｃ$^2$＜ｃを使い先ほどと同じようにすると、

$$A = a^2 + b = a^2 + 2ac + c^2 < a^2 + 2ac + c$$

$$b < (2a+1)c$$

$$c > \frac{b}{2a+1}$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 + b} = a + c > a + \frac{b}{2a+1}$$

$$\therefore \sqrt{a^2 + b} > a + \frac{b}{2a+1}$$

$$A = a^2 - b = a^2 - 2ac + c^2 < a^2 - 2ac + c$$

$$-b < -(2a-1)c$$

$$c < \frac{b}{2a-1}$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 - b} = a - c > a - \frac{b}{2a-1}$$

$$\therefore \sqrt{a^2 - b} > a - \frac{b}{2a-1}$$

$$\therefore \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1} \qquad \cdots②$$

①、②より公式ができる。

$$a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1} \qquad \cdots③$$

アルキメデスは③の公式を用いて$\sqrt{3}$を近似した。

$$2 - \frac{1}{2 \times 2} > \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3} > 2 - \frac{1}{2 \times 2 - 1}$$

$$\frac{7}{4} > \sqrt{3} > \frac{5}{3} \qquad \cdots④$$

④の不等式を電卓を使って小数にしてみよう。あまり精度が良くない。アルキメデスはさらに工夫して高精度の不等式を導いた。④式の右辺を利用して

$$\frac{1}{3}(5+\frac{2}{5\times 2})>\sqrt{3}=\frac{1}{3}\sqrt{5^2+2}>\frac{1}{3}(5+\frac{2}{5\times 2+1}) \qquad \cdots⑤$$

$$\frac{26}{15}>\sqrt{3}>\frac{19}{11}$$

かなり精度が上がったことが確かめられるだろう。しかし、アルキメデスはまだ満足しなかった。さらに⑤式の左辺を利用して精度を上げた。

$$\frac{1}{15}(26-\frac{1}{26\times 2})>\sqrt{3}=\frac{1}{15}\sqrt{26^2-1}>\frac{1}{15}(26-\frac{1}{26\times 2-1})$$

$$\frac{1351}{780}>\sqrt{3}>\frac{265}{153}$$

この値を用いて$\pi$を近似したのだ。$\pi$を植えから押さえるために

$\sqrt{3}>\frac{265}{153}$を用いたので、

$$\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma Z}}>\frac{265}{153}$$

となったのだ。