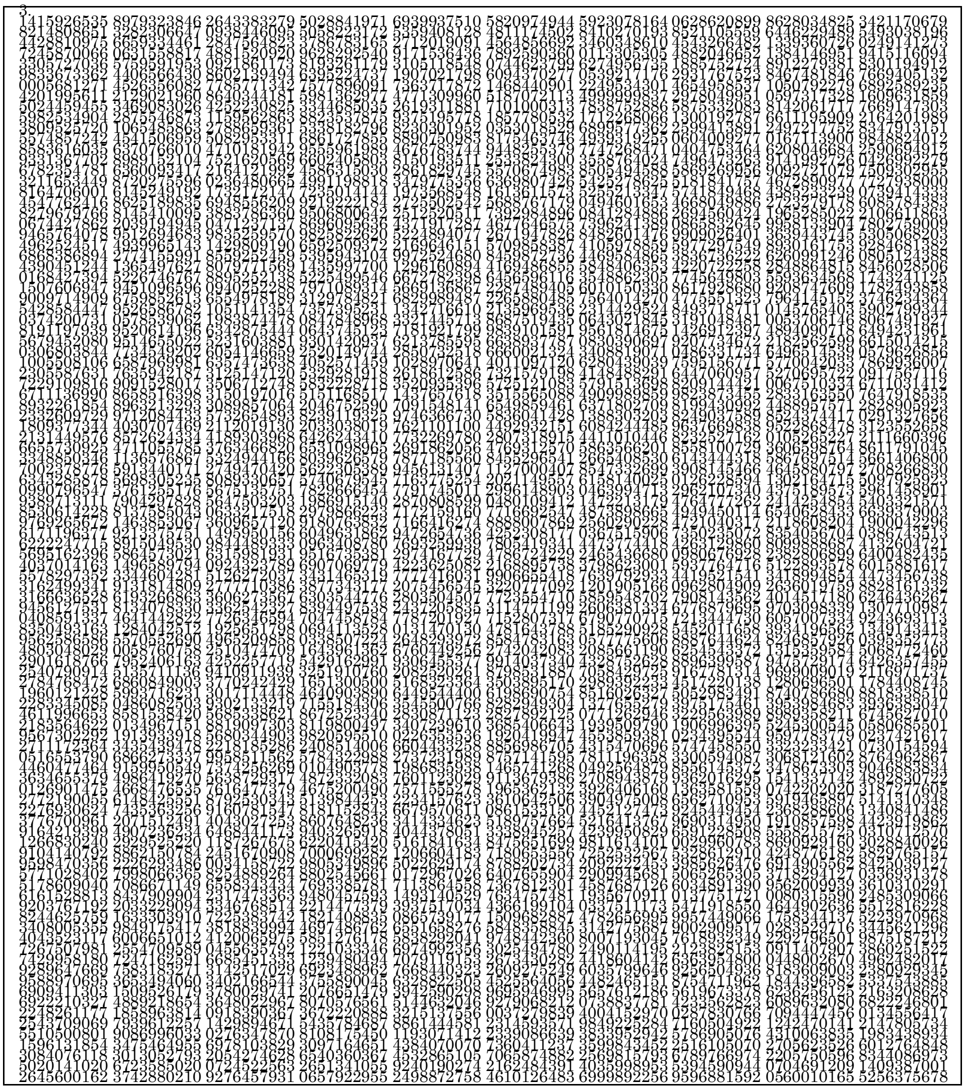
授業研究第２日目

授業資料



授業者：淡川直樹

（筑波大学大学院修士課程教育研究科１年）

年　　組　　番

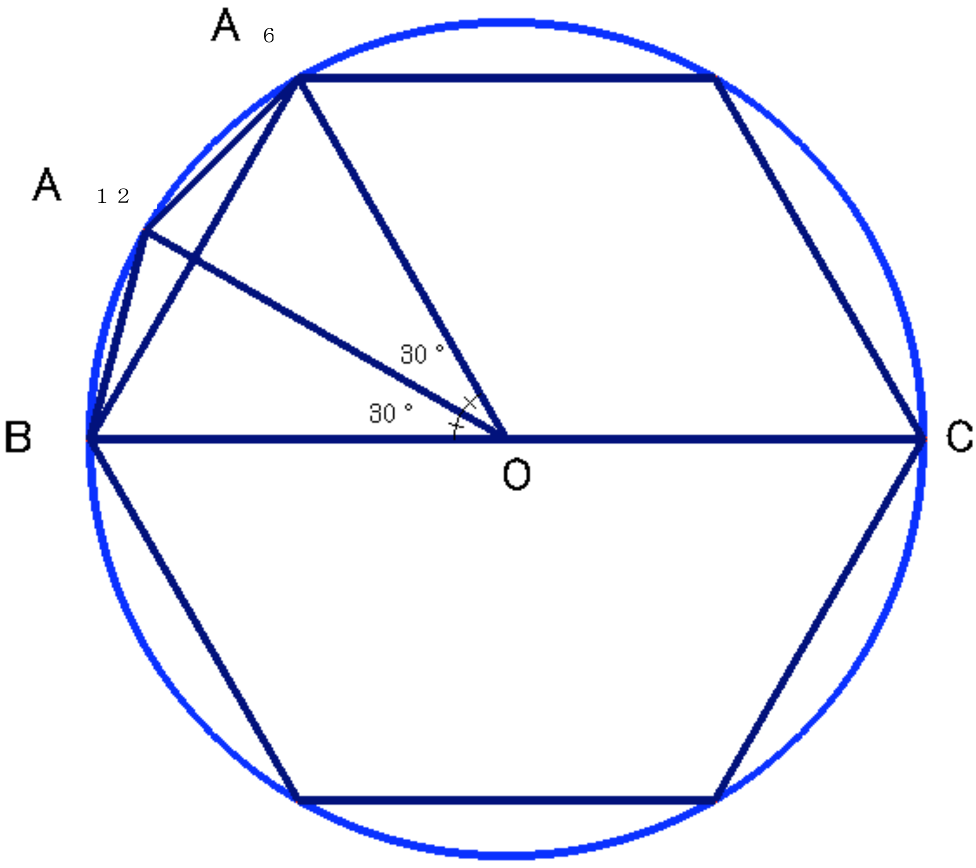
1，前回の復習

$$\frac{48}{2}\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

$$\frac{96}{2}\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$$

$$\frac{192}{2}\times\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}$$

等の式を用いてπを近似できた。これらの式は円の $\boxed{}$ を考えることで導かれた。



２，アルキメデスの近似法

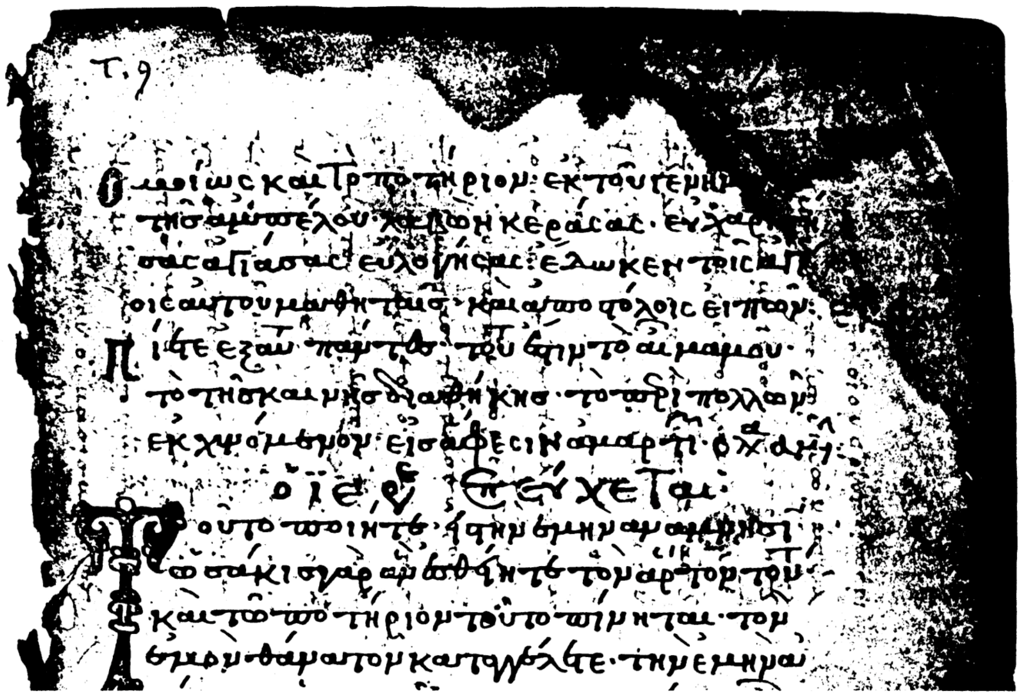


写真２ Cambridge University Library 所蔵の MS Add. 1879. 23 の一部分

昨日の公式は円の内接正多角形を基にしているアルキメデスの近似法を基にしている。本日はアルキメデスの原典解釈を通してπの近似法を学ぼう。
私たちが現代使っている数学とどこが違うのだろうか。比較しながら現代表記にしていこう。アルキメデスの原典として『円の計測』を使用した。ただし、ギリシャ記号は以下のように対応させた。

ギリシャ	Α	Γ	Ε	Β	Η	Θ	Κ	Λ	Ζ
和訳（前半）	C	B	O	なし	A_{12}	A_{24}	A_{48}	A_{96}	A_{6}
和訳（後半）	C	B	O	A_{6}	A_{12}	A_{24}	A_{48}	A_{96}	D

原典の前半部分は直接関係しないので解説にとどめる。しかし後半部分を読み解くためには前半の展開の仕方が鍵となってくる。前半部分のアルキメデスのπへのアプローチの仕方を、良く聞いて理解して欲しい。

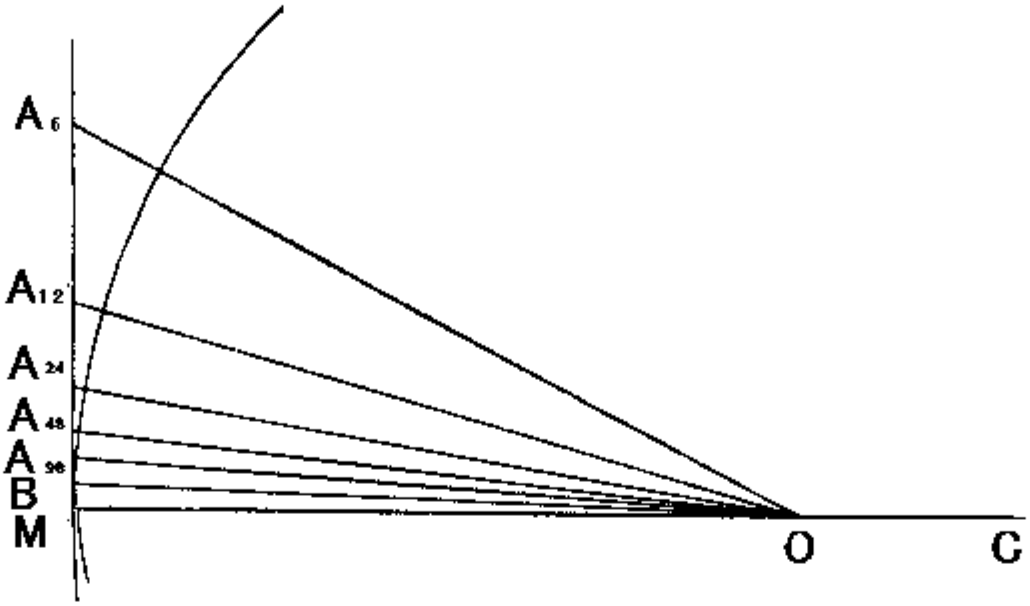
＜原典前半＞

γ'.

Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις.

ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ CB *καὶ κέντρον τὸ* O *καὶ ἡ* BCA_6 *ἐφαπτομένη καὶ ἡ ὑπὸ* A_6OB *τρίτου ὀρθῆς· ἡ* OA_6 *ἄρα πρὸς* A_6B *λόγον ἔχει, ὃν τϛ πρὸς ρνγ, ἡ δὲ* OB *πρὸς [τὴν]* BA_6 *λόγον ἔχει, ὃν σξε πρὸς ρνγ. τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ* A_6OB *δίχα τῇ* . *ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ* A_6O *πρὸς* OB, *ἡ* A_6A_{12} *πρὸς* $A_{12}B$ *[καὶ ἐναλλὰξ καὶ συνθέντι]. ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ* DO, OB *πρὸς* A_6B, *ἡ* OB *πρὸς* BA_{12} *ὥστε ἡ* BO *πρὸς* BA_{12} *μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. ἡ* OA_{12} *ἄρα*

πρὸς $A_{12}B$ *δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν* $\overset{\lambda\delta}{M}$ *,θυν πρὸς* $\overset{\beta}{M}$ *,γυθ· μήκει ἄρα, ὃν φϙα η' πρὸς ρνγ. πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ*



$A_{12}OB$ τῇ OA_{24} διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ἡ OB πρὸς BA_{24} μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ͵αρξβ η΄ πρὸς ρνγ· ἡ $A_{24}O$ ἄρα πρὸς $A_{24}B$ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ͵αροβ η΄ πρὸς ρνγ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ $A_{24}OB$ τῇ OA_{48} ἡ OB ἄρα πρὸς BA_{48} μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ͵βτλδ δ΄ πρὸς ρνγ· ἡ OA_{48} ἄρα πρὸς BA_{48} μείζονα ἢ ὃν ͵βτλθ δ΄ πρὸς ρνγ. ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ $A_{48}O$ τῇ $A_{96}O$ ἡ OB ἄρα πρὸς $A_{96}B$ μείζονα [μήκει] λόγον ἔχει ἤπερ τὰ ͵δχογ ∟΄ πρὸς ρνγ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ A_6OB τρίτου οὖσα ὀρθῆς τέτμηται τετράκις δίχα, ἡ ὑπὸ $A_{96}OB$ ὀρθῆς ἐστι μη΄. κείσθω οὖν αὐτῇ ἴση πρὸς τῷ O ἡ ὑπὸ BOM ἡ ἄρα ὑπὸ $A_{96}OM$ ὀρθῆς ἐστι κδ΄· καὶ ἡ $A_{96}M$ ἄρα εὐθεῖα τοῦ περὶ τὸν κύκλον ἐστὶ πολυγώνου πλευρὰ πλευρὰς ἔχοντος ϙϛ. ἐπεὶ οὖν ἡ OB πρὸς τὴν BA_{96} ἐδείχθη μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ ͵δχογ ∠′ πρὸς ρνγ, ἀλλὰ τῆς μὲν OB διπλῆ ἡ CB, τῆς δὲ BA_{96} διπλασίων ἡ $A_{96}M$, καὶ ἡ CB ἄρα πρὸς τὴν τοῦ ϙϛγώνου περίμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵δχογ ∠′ πρὸς $\overset{\alpha}{M}$ ͵δχπη. καί ἐστιν τριπλάσια, καὶ ὑπερέχουσιν χξζ ∠′, ἅπερ τῶν ͵δχογ ∠′ ἐλάττονά ἐστιν ἢ τὸ ἕβδομον· ὥστε τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν κύκλον τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλάσιον καὶ ἐλάττονι ἢ τῷ ἑβδόμῳ μέρει μεῖζον· ἡ τοῦ κύκλου ἄρα περίμετρος πολὺ μᾶλλον ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριπλασίων καὶ ἑβδόμῳ μέρει μείζων.

＜前半訳＞

命題３

全ての円の円周はその直径の３倍に、その直径の$\frac{1}{7}$より小さくて、$\frac{10}{71}$より大きい超過分を加えたものである。

円があるとし、ＣＢが直径であり、Ｏが中心であるとせよ。そしてＢA_6は接線であり、角A_6ＯＢは直角の３分の１であるとせよ。するとＯA_6はA_6Bに対して、３０６（τ ζ）が１５３（ρ ν γ）に対する比を持ち。ＯＢはＢA_6に対して２６５（σ ξ ε）が１５３（ρ ν γ）に対する比を持つ。

そこで角A_6ＯＢがＯA_{12}によって２等分されたとせよ。するとA_6ＯがＯＢに対するように、A_6A_{12}はA_{12}Ｂに対する。したがって、A_6ＯとＯＢの和がA_6Ｂに対するように、ＯＢはＢA_{12}に対する。その結果、ＢＯはＢA_{12}に対して５７１（ϕοα）が１５３（ρ ν γ）に対するよりも大きな比を持つ。

それゆえ、平方においてOA_{12}は$A_{12}B$に対して３４９４５０（Mθμν）が２３４０９（Mγμθ）に対する比を持つ。ゆえに長さにおいて、５９１$\frac{1}{8}$（φqαη）が１５３（ρνγ）に対する比を持つ。

さらにまた角$A_{12}OB$がOA_{24}によって２等分されたとせよ。すると同じ理由によって、OBはBA_{24}に対して１１６２$\frac{1}{8}$（αρξβη）が１５３（ρνγ）に対するよりも大きな比を持つ。そこで$A_{24}O$は$A_{24}B$に対して、１１７２$\frac{1}{8}$（αρoβη）が１５３（ρνγ）に対するよりも大きな比を持つ。

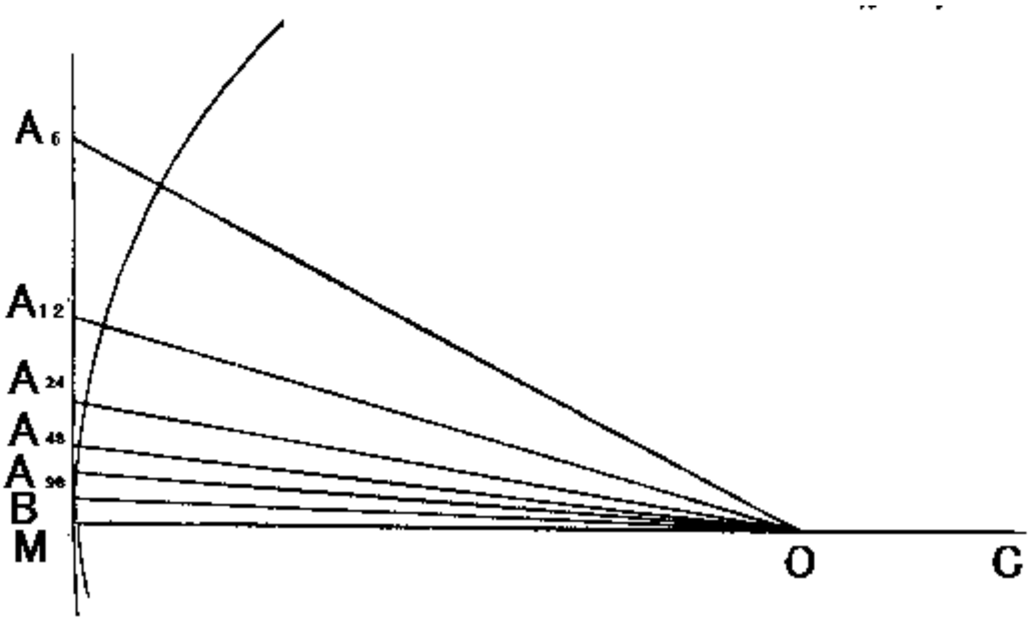
なおさらに、角$A_{24}OB$がOA_{48}によって２等分されたとせよ。するとOBはBA_{48}に対して２３３４$\frac{1}{4}$（βτλδδ）が１５３（ρνγ）に対するよりも大きな比を持つ。そこでOA_{48}はBA_{48}に対して、２３３９$\frac{1}{4}$（βτλθδ）が１５３（ρνγ）に対するよりも大きな比を持つ。

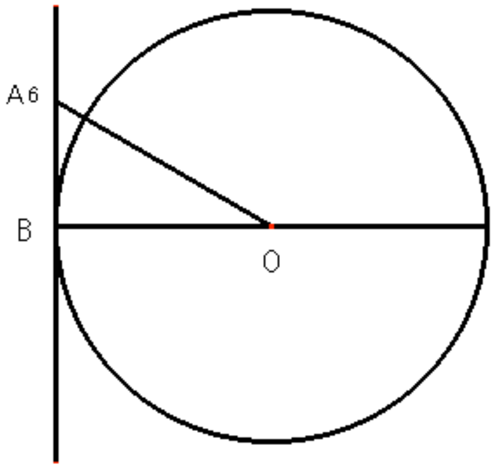
なおさらに、角$A_{48}OB$が$A_{96}O$によって２等分されたとせよ。するとOBは$A_{96}B$に対して、４６７３$\frac{1}{2}$（δχoγ∠）が１５３（ρνγ）に対するよりも大きな比を持つ。

そこで、直角の３分の１である角A_6OBが、４回２等分されたので、角$A_{96}OB$は直角の４８分の１（μη）である。そこで、角BOMが、角Oにおいてそれに等しく作図されたとせよ。すると、角$A_{96}OM$は直角の２４分の１（κδ）である。そしてそれゆえ、線分$A_{96}M$は、円の周りに９６（qζ）の辺をもつ多角形の一辺である。そこでOBはBA_{96}に対して、４６７３$\frac{1}{2}$（δχoγ∠）が１５３（ρνγ）に対するよりも大きな比をもち、CBはOBの二倍であり、$A_{96}M$はBA_{96}の２倍であると証明されたので、CBは９６角形の周囲に対して、４６７３$\frac{1}{2}$（δχoγ∠）が１４６８８（Mδχπη）に対するよりも大きな比をもつ。そして１４６８８は（４６７３$\frac{1}{2}$の）３倍と６６７$\frac{1}{2}$（χξζ∠）であり、６６７$\frac{1}{2}$（χξζ∠）は４６７３$\frac{1}{2}$（δχoγ∠）の７分の１より小さ

い。その結果、円のまわりの多角形（の周囲）は、その直径の３倍に、その（直径の）７分の１を加えたものより小さい。それゆえ、円の周囲は（その直径の）３倍に（その直径の）７分の１を加えたものより、さらに小さい。

＜前半解説＞





円の外接正６角形からはじまり角の二等分を繰り返して、外接正１２角形、外接正２４角形、外接正４８角形、外接正９６角形を考えていく。

上の図で、

A_6Bは外接正６角形の一辺の $\boxed{}$ 、$A_{12}B$は外接正１２角形の一辺の $\boxed{}$

$A_{24}B$は外接正２４角形の一辺の$\boxed{\quad}$、$A_{48}B$は外接正４８角形の一辺の$\boxed{\quad}$

$A_{96}B$は外接正９６角形の一辺の$\boxed{\quad}$

そこで、目標としていることは円周を外接正多角形の周で近似すること！

$$2\pi_{12}\cdot BO = 12\times 2BA_{12} \longrightarrow \pi_{12} = 12\times\frac{BA_{12}}{BO}$$

$$2\pi_{24}\cdot BO = 24\times 2BA_{24} \longrightarrow \pi_{24} = 24\times\frac{BA_{24}}{BO}$$

$$2\pi_{48}\cdot BO = 48\times 2BA_{48} \longrightarrow \pi_{48} = 48\times\frac{BA_{48}}{BO}$$

$$2\pi_{96}\cdot BO = 96\times 2BA_{96} \longrightarrow \pi_{96} = 96\times\boxed{\quad}$$

（ここでπ_nは外接正 n 角形によって近似した円周率とする。）

外接正９６角形で円周を近似するために$\boxed{\quad}$が

分かれば良い！！

しかし、今分かっているのは、

$$\frac{OB}{BA_6} = \boxed{\quad}\ \text{、}\ \frac{OA}{BA_6} = \boxed{\quad}$$

の２つだけだ！

何とかこれらを使って $\dfrac{BA_{96}}{BO}$ を導けないか？？

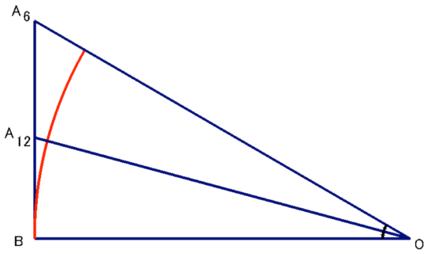
アルキメデスは**角の２等分線の辺の比の性質**を利用して導けることを知っていた！

角の２等分線の辺の比の性質とは、

$$OA_6 : OB = A_6A_{12} : BA_{12}$$

である。

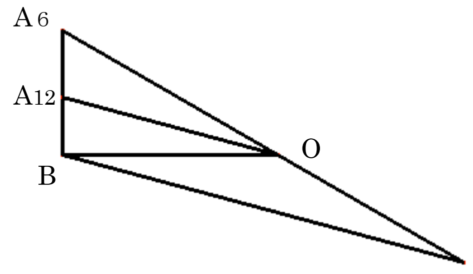
＜証明してみよう＞



前の証明で使った図を利用して

$$OA_6 : OB = A_6A_{12} : BA_{12}$$

以外の辺の比を考えよう！！



このうちのどれかを使うと

$\dfrac{OB}{BA_{12}}$ を $\dfrac{OB}{BA_6}$ と $\dfrac{OA_6}{BA_6}$ で表せる！

つまり

$$\frac{OB}{BA_{12}}=\frac{OA_6}{BA_6}+\frac{OB}{BA_6}$$