中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp90-102、2006年3月

円周率の近似に関する授業研究

−アルキメデスの「円の計測」を題材として−

筑波大学大学院修士課程教育研究科
淡川　直樹

章構成

要約

本研究では、アルキメデスの「円の計測」を用いて、円周率の近似を教材化し、原典解釈を取り入れた授業実践を行った。生徒は「なぜ」を起点として考察し、予想し、数学を用いてそれらを確かめた。これにより、生徒の数学観に与える影響・変化を考察した。

その結果、原典を用いることの有用性が確認でき、生徒の数学観に変容が見られた。

キーワード：アルキメデス、円周率、近似、円、原典解釈、数学史

1. はじめに

文部科学省（1999）は高等学校学習指導要領解説の中で、高等学校数学科の目標を、「数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め、事象を数学的に考察し処理する能力を高め、数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを積極的に活用する態度を育てる。」（1999,p.9）としている。しかしながら、「数学に興味・関心を持たない生徒が少なからずいることもまた事実である。」（1999,p.21）ことをうけ、「改訂では特に数学を学習する意義、数学的な見方や考え方のよさ、数学の美しさ、文化や社会生活において数学が果たしている役割などを理解させることにより、数学への興味・関心を持たせ学習への意欲を高めることを大切にした。」（1999,p.21）と、興味・関心を強調している。この記述をうけ、本研究では、興味・関心を生徒が持つような教材の開発をし、その効果を考察した。

生徒が数学に対して興味・関心を持つには、数学観の変容が必要であると考える。礒田（2002,p8.9）は「生徒の数学観は数学における適切な文化体験を通して成長する」とし、「実際の歴史上の原典を開き、その原典を記した人の立場や考えを想定し、その人の心情を重ねて解釈すると、今、自分たちの学ぶ数学が、異なる時代・文化背景に生きた人々によって、まるで異なる思考様式で研究され、表現されていたことが体験できる。」と述べている。これらを参考とし、本研究ではアルキメデスの原典「円の計測」を用いる教材の開発をし、数学観の変容を促すことが出来るかを考察した。

また、文部科学省（1999）は「数学的活動では、内的な活動が中心となるが数学科の

場面や数学的考察・処理過程では、観察、操作、実験などの外的な活動も含まれている。」（1999,p.10）とある。本研究では「観察、操作、実験」を取り入れた授業を行い、気づきや疑問を軸に展開することによって数学観の変容が見られるかを考察した。

2. 研究目的・研究方法

（１） 研究目的

アルキメデスの「円の計測」の原典解釈を通して、自ら持った疑問を突き詰め、深めることができるかを考察する。また、アルキメデスの方法とそれ以後の方法を比較する中で過去の偉業を知ることや、その過程で数学の一般性に気づけるかを考察する。以上の目的を達成するために以下の課題を設定する。

課題１：原典を用いた授業実践を通して持った疑問や、気づいたことから自分なりに深め、今まで学んだ数学の知識を用いて解法を考えることができるか。

課題２：アルキメデスにおける円周率の近似の方法と、それ以後の方法を比較して過去の偉業を知ることができるか。また、数学の発展は、過去の偉業の上の発展であると理解することができるか。

（２） 研究方法

アルキメデスの「円の計測」を題材としたオリジナル教材を作成し、授業を行う。その授業を撮影したビデオや、事前・事後アンケートに基づき考察する。

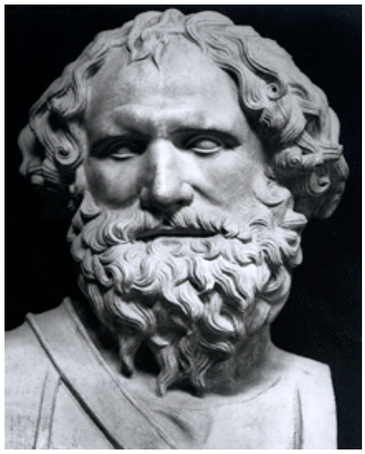


図１　アルキメデス (Mactutor)

3. アルキメデス「円の計測」の教材化

本研究ではアルキメデスの「円の計測」の命題 3 を原典として用いた。命題 3 では円周を外接正 96 角形の周と内接正 96 角形の周で近似するものである。これにより、$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$という値がえられ、これを小数表示すると 0.140845…<π<3.142857…となる。当時かなりの精度であったと想像できる。その後しばらくアルキメデスの方法は応用され、精度の良い円周率の近似値が求められた。筆者はアルキメデスの創造性に感銘を受け、生徒にもこの素晴らしさを感じてもらいたいと思ったことが､原典を教材化した理由である。

また、アルキメデスは数学者であるだけでなく、天文学者であり、物理学者でもあり、機械学者でもあった。かの有名なアルキメデスの原理をはじめとして、アルキメデス螺旋や求積法など多くの功績がある。そ

ἔχοντος ϙϛ. ἐπεὶ οὖν ἡ OB πρὸς τὴν BA₉₆ ἐδείχθη μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ ͵δχογ L′ πρὸς ρνγ, ἀλλὰ τῆς μὲν OB διπλῆ ἡ CB, τῆς δὲ BA₉₆ διπλασίων ἡ A₉₆M, καὶ ἡ CB ἄρα πρὸς τὴν τοῦ ϙϛγώνου περίμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ͵δχογ L′ πρὸς $\overset{\alpha}{M}$ ͵δχπη. καί ἐστιν τριπλάσια, καὶ ὑπερέχουσιν χξξ L′, ἅπερ τῶν ͵δχογ L′ ἐλάττονά ἐστιν ἢ τὸ ἔβδομον· ὥστε τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν κύκλον τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλάσιον καὶ ἐλάττονι ἢ τῷ ἑβδόμῳ μέρει μεῖζον· ἡ τοῦ κύκλου ἄρα περίμετρος πολὺ μᾶλλον ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριπλασίων καὶ ἑβδόμῳ μέρει μείζων.

図２　円の計測　命題３抜粋(*Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii*)

のような人物の原典を扱うことで、数学には歴史があり偉人の功績によって進歩してきたこと、紀元前の発想であっても決して程度の低いものではないこと、現在高等学校で勉強していることに関連が深いこともこの原典を教材化した理由である。

本研究では導入として、漸化式を用いて、円に内接する正多角形の周を表した円周率の近似式を考察させた。次に、アルキメデスの原典に沿った方法で外接正多角形の周で近似した円周率を導いた。内接･外接正多角形でだした近似値を各多角形ごとに不等号で表し、その精度を比較した。そこから解法の違いを考察し、無理数の性質や無限や極限について考えられるような教材を作成した。

なお、$\sqrt{3}$をアルキメデスは近似しているが、専門家の間であっても、どのように近似したのか議論されいくつかの予測がたてられている。よって本研究では、$\sqrt{3}$の近似値ではなく$\sqrt{3}$をそのまま用いた。

4.　教材の数学的解説

アルキメデスの「円の計測」の命題３は『全ての円の円周はその直径の３倍に、その直径の$\frac{1}{7}$より小さくて、$\frac{10}{71}$より大きい超過分を加えたものである。』である。これはいわゆる、$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$を示すものだ。この結果は、円に内接・外接する正 96 角形の間に円周があることにより円周率を近似したことから得られた。以下で「円の計測」による証明方法を示す。ただし、外接正 n 角形で近似した円周率をπ_n、内接正 n 角形で近似した円周率をπ'_nとする。

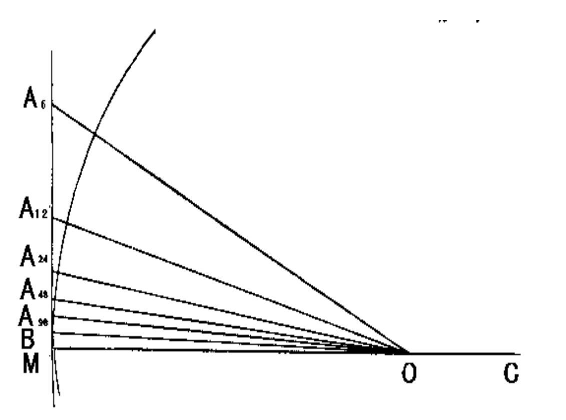


図 3　外接多角形の証明に用いた図

(1) 外接正 96 角形の周での近似

OB を半径とし、添え字を角数とすると、

$2\pi_{96} \times BO = 96 \times 2BA_{96}$より、$\pi_{96} = 96 \times \frac{BA_{96}}{BO}$である。よって$\frac{BA_{96}}{BO}$が分かればよい。はじめに外接正 6 角形を考える。$\frac{BO}{BA_6} = \sqrt{3}$、$\frac{OA_6}{BA_6} = 2$、また、角の２等分線の辺の比

$(OA_6 + OB) : OB = BA_6 : BA_{12}$を利用して、

$\frac{BO}{BA_{12}}$を導く。同様に、$\frac{BO}{BA_{24}}$、$\frac{BO}{BA_{48}}$、$\frac{BO}{BA_{96}}$が導ける。この値からπ_{96}が求められる。

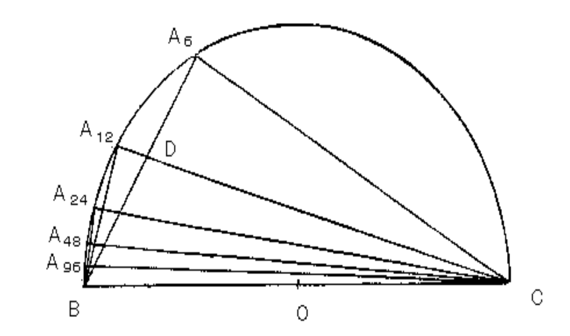


図 4　内接多角形の証明に用いた図

(2) 内接正 96 角形の周での近似

CB を直径とすると、∠A$_6$CB=30°である。

$2\pi'_{96} \times BO = 96 \times 2BA_{96}$より、$\pi'_{96} = 96 \times \frac{BA_{96}}{BC}$であ

る。よって、$\dfrac{BA_{96}}{BC}$ が分かればよい。はじめに内接正６角形を考える。$\dfrac{CA_6}{BA_6}=\sqrt{3}$、$\dfrac{CB}{BA_6}=2$、また、△$CA_{12}B$と△$BA_{12}D$は相似より得た$CA_{12}:BA_{12}=(CA_6+CB):BA_6$を利用して $\dfrac{CA_{12}}{BA_{12}}$ を求める。$\dfrac{CA_{12}}{BA_{12}}$ を用いて、ピタゴラスの定理より $\dfrac{CB}{BA_{12}}$ を求める。同様に $\dfrac{CA_{24}}{BA_{24}}$、$\dfrac{CB}{BA_{24}}$、$\dfrac{CA_{48}}{BA_{48}}$、$\dfrac{CB}{BA_{48}}$、$\dfrac{CA_{96}}{BA_{96}}$、$\dfrac{CB}{BA_{96}}$ が随時導ける。この値より π'_{96} が求まる。

本研究では、内接多角形での近似は導入として、漸化式で求めた近似式を先に見せて、生徒なりの方法でその近似式を証明した。次に外接正多角形での近似を原典に沿って求め、両者の近似値を比較する授業展開とした。

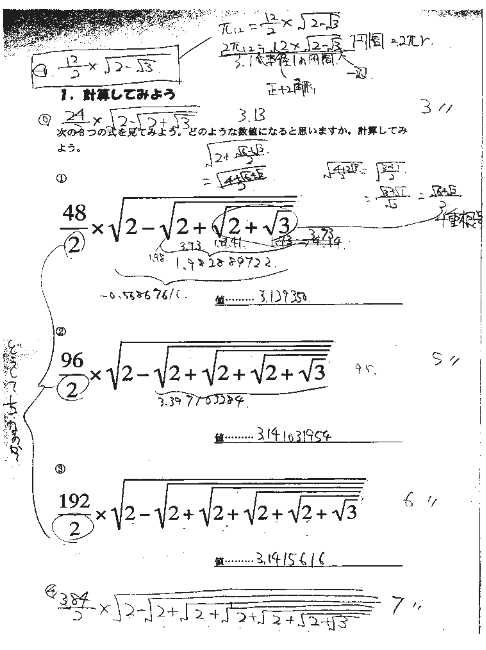
5. 原典を用いた授業の概要

（１） 授業環境

日時：平成 17 年 10 月 25、26、27、28 日（65 分×3 時間）

対象：埼玉県立高校第２学年（3 クラス）

準備：コンピュータ（Windows）、作図ツール（Cabri Geometry Ⅱ）、Microsoft Power Point、プロジェクター、実物投影機、授業記録用のデジタルビデオカメラ、通常の電卓、事前事後アンケート、授業資料



資料１　生徒が式の値について考察しながら書き込んだテキスト

（２） 授業展開

＜1 時間目＞

【ねらい】

与えられた式がどのような値になるかを考察することができる。なぜと疑問に思った事や気づいた事から数学的構造を予想し、数学を用いてそれらを確認することができる。

【授業の流れ】

授業の導入として、まず、円周率の近似値であることを伏せて 3 つの式を見せる。生徒は電卓で計算したり（写真 1)、式の形などからその式がどんな値を表しているのか考察する。

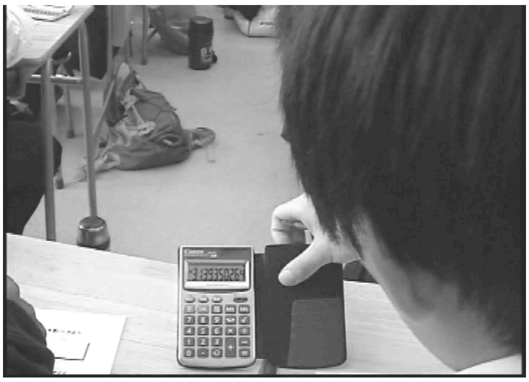


写真１　円周率の近似値が出て喜ぶ生徒

中学校·高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行:筑波大学数学教育学研究室、pp90-102、2006年3月

（生徒との会話）

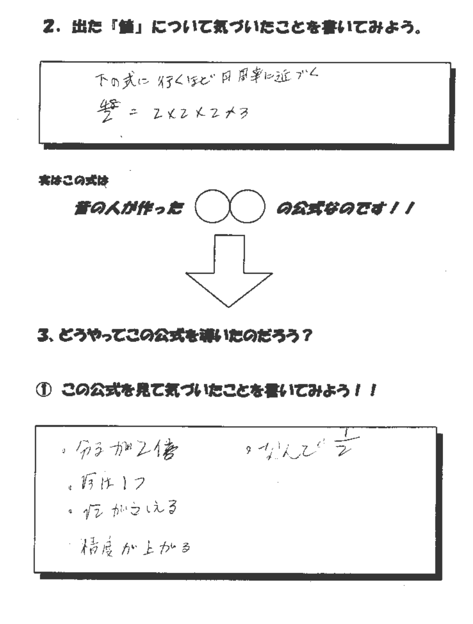
Ｔ：3 つの式の計算を電卓でして
　みてください。

S_1:うわー、やりたくねー。

（しばらく時間をとる。）

S_2:あっ！円周率だ！

S_3:本当だ！



資料2 生徒が気づいたことを書いたテキスト

授業者が「今日は円周率の近似を学びます。」と言う代わりに、生徒が本日の課題を見つけることで導入とした。生徒が主体である事を意識した。式が円周率の近似であるという予想が立った（資料 1）あと、なぜ、これらの式が円周率の近似を表しているのかを考察する。式の特徴から、生徒自身が気づいたもの（資料 2）を発表する。黒板に板書し、それらを基に３つの式が何を表しているかを議論する。事前に生徒の意見を予測し、パワーポイントを作成する。これを用いて、意見と対応させながら、この公式が円に内接する多角形より導かれそうだと予想する。その予想を基に内接正１２角形に対応する円周率の近似公式を導く。生徒の解法を実物投影機で黒板に映し、説明させる。このとき、投影したものに直に書き込み出来ることが利点である。写真 2 は生徒が説明している様子である。

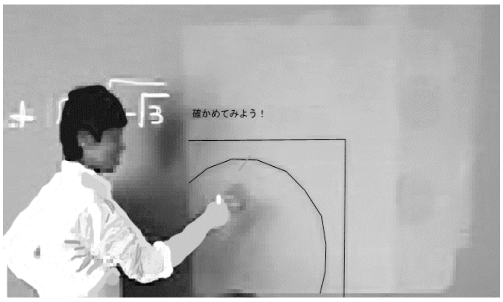


写真 2 自分の解答を解説する生徒

＜2 時間目＞

【ねらい】

アルキメデスの原典（図 2）を用いて外接円による円周率の近似値を求めるという目標を理解する。外接 6 角形から 12 角形までの関係を相似を使って証明できる。

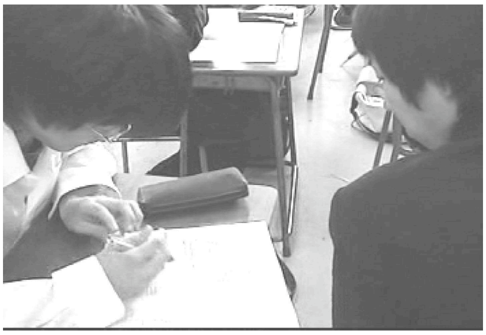


写真３ 「円の計測」を相談しながら読む様子

【授業の流れ】

１時間目に内接多角形での円周近似をしたことを復習し、アルキメデスの考案した近似法である事を話す。そこでアルキメデスの書いた「円の計測」をテキストとして使い、原典に沿って授業をする事を伝える。はじめに、命題３の解釈をする。使用した原典は日本語に翻訳してあるものだが、言い回しが分かりにくく、困惑している生徒も多かった。（写真 3）解釈が終わると、円周率が不等式で表されていることが分かる。ここで不等式は

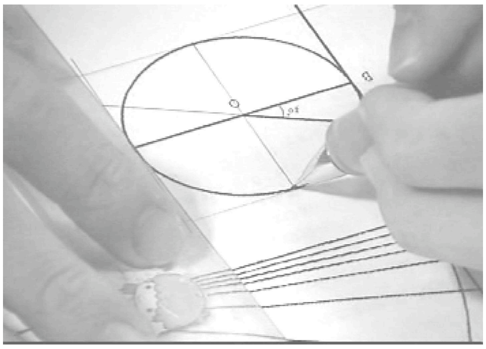


写真 4 外接 6 角形を作図する様子

何を表しているかを生徒に質問する。1 時間目に議論したことを考慮すると、すぐに内接多角形と外接多角形で円周率を挟み込んでいる式であることが分かる。このことから、2,3 時間目は外接正多角形での円周近似をし、1 時間目の内接正多角形と比較することを新たに目標とすることを確認した。導入として外接正 6 角形を書き、内接正多角形との違いを意識する。（写真 4）次に、外接正 6 角形から、角の 2 等分線を繰り返して、外接正 96 角形の周を考えている事を理解する。角の 2 等分線の辺の比の性質が外接正 96 角形の周を求めるのに有用であることを理解し、まず外接正 6 角形と外接正 12 角形の関係で証明する。

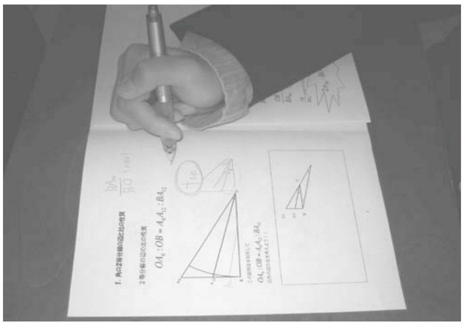


写真 5　角の 2 等分線の辺の比の関係を証明しようとする生徒

＜3 時間目＞

【ねらい】

2 等分線と辺の比の関係を拡張させ、外接正多角形の周に使えるようにすることができる。外接 6 角形から外接正 12 角形と外接正 24 角形の周を求め、1 日目の内接多角形の周で近似した円周率と比較すること、また、その精度の差を考察することができる。

【授業の流れ】

三時間目は角の二等分線と辺の比の関係（写真 5）の証明から入った。その証明を拡張して $OA_6:OB=A_6A_{12}:BA_{12}$ 以外にも成り立っている比を探す。（図 5）その比の中から初期値 $\frac{BO}{BA_6}=\sqrt{3}$、$\frac{OA_6}{BA_6}=2$ を利用できる有用な比を見つける。次にその比を分数へ変換し、目的の $\frac{OB}{BA_{96}}$ を求める公式考え、テキストの穴埋めをする。それらを利用して外接正 12 角形の周での近似公式を作り、円周率を近似した。ここで、1 時間目との関連が出てくる。1 時間目は内接正 12 角形で近似した。3 時間目はアルキメデスの「円の計測」に沿って外接正 12 角形で近似した。（図 6）三日間の授業のまとめとして、授業で出来なかった、内接・外接正 96 角形で近似したものまでをパワーポイントで見せた。（図 7）すると、円周率は、角が二倍になるにつれ精度良く近似されていくことを数値として見

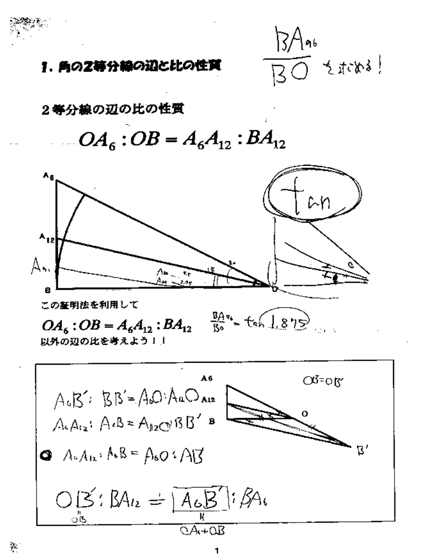


図 5　生徒の角の 2 等分線と辺の比の性質の証明の解答

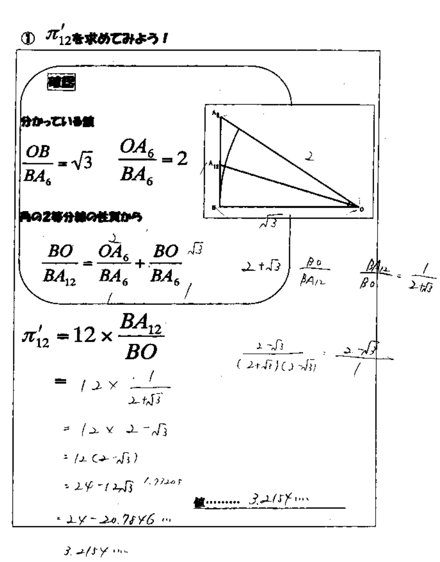


図 6　生徒の外接正１２角形による円周率の近似値の解答

ることができた。

$$\frac{12}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} < \pi_{12} < 12\times(2-\sqrt{3})$$

3.105828541230246　　3.215390309173476

$$\frac{24}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} < \pi_{24} < 24\times(2-\sqrt{2+\sqrt{3}})\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

3.132628613281248　　3.159659942097504

$$\frac{48}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} < \pi_{48} < 48\times(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}})\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

3.1339350203046936　　3.146086215131568

$$\frac{96}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} < \pi_{96} < 96\times(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}})\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

3.14103195089088　　3.14271459964608

図 7　内接・外接多角形による円周率の近似値のまとめの図

6.　議論

(1) 課題 1 に対する議論

課題 1：原典を用いた授業実践を通して持った疑問や、気づいたことから自分なりに深め、今まで学んだ数学の知識を用いて解法を考えることができるか。

アンケート①：3 日間を通して疑問に思ったことに対して、「悩むこと」や「考えること」への見方が変わったか。その理由とどのように変わったか。

アンケート②：今回の授業で「近似」に対する見方・考え方が変わったか。その理由とどのように変わったか。

<u>事後アンケートより生徒の記述の一部をそのまま記入</u>

＜肯定的意見＞

1. 考える事で、自分なりの答えが出せた。
2. 考えた方が頭の中に残りやすい。
3. 問題を解くのに一問一問考える時間をかけたいと思った。
4. 一見難しく思える公式等の証明も自分で解くことができると感じた。
5. 今までは疑問に思っていたことをそのままにしていることがあったが、これからは自分で解いてみようと思う。
6. πの探求というテーマで、僕たちが普段使っている円周率というものは、長い過程を経て求められてきたのをこの 3 日間でじっくり考えることができ、疑問に対する執着心が大事だと思った。
7. 悩み考えることによって、どんどん色々なことが見えてきて、最終的に一つの答えにたどり着けるということが分かった。
8. 普段やっている問題に対しても、自分自身で思考をめぐらせてみるべきだと思った。
9. いろいろな考えを使って公式を導き出すことによって、達成感や楽しさを感じた。
10. 普段学校ではまず結果→理由で教わるけど、段階をふんでいた。
11. いつもは授業のスピードが速く､｢考えること｣の時間を省略して答えを聞いているだけだったが、今回の授業で「悩み」「考え」それにより、理屈まで分かった。
12. 時間があればしっかりと証明とかも自分で一回はやってみるようにする。

13. 数学だけに限らず結果に至るまでの過程が気になるようになった。
14. 考えて、少し分かった事があると面白いと思った。
15. もっと悩んで疑問を解決しようとするように変わった。
16. 何に対しても「なぜか」を考える事が大切だと思った。
17. 授業で公式を覚えるとき、ただ覚えるだけでなくどうしてそれが成り立つのか理解して使うようにしたい。
18. 今までは分からない問題はすぐに答えを見ていたけど、もっと自分で考えてみたいと思うようになった。
19. アルキメデスの考え方を通して、疑問に対しての考え方・アプローチの仕方などが参考になった。
20. 疑問に対してさまざまな角度からのアプローチの仕方があると思った。
21. 答えが無いから深く考えるようになった。
22. 何事も工夫すれば追求出来ると思った。
23. 深く考えた方が楽しいし、分かったときうれしい。
24. 疑問に思ったことを解くことは難しいけど、それだけの価値があると思った。
25. 考える事が次ぎの過程につながると思った。
26. πや√でなく、累乗を覚えてみようと思った。
27. 今までは、いつまでも考えて居ても仕方ないかなーと思っていましたが、考えることによって、自分にプラスになることしかないということに気づいた。
28. 答えを出すだけでなく、その過程を考えることが数学の意義なんだと思った。
29. 自分の持っている知識でも考え方によって予想もつかないところまで発展出来ると分かった。
30. 近似というのは限りなくそれに近づこうとするけれど、それになることがないから探求も続けるようになった。
31. 今まで電卓の√ボタンでなぜ近似値が出るのだろうと思わなかった。しかし、近似値には必ず求め方があると知って、他の近似値についても自分で出してみようと思った。

＜否定的意見＞

(ア)何か気になった事柄でも「数学」だったら、そこまで悩んで考えたくないという気持ちは変わらなかった。
(イ)悩んでも分からない事は分からない。
(ウ)難しくて悩めなかった。
(エ)確かにアルキメデスは偉大な数学者だけど、そこまで、悩み考えたくない。
(オ)悩むにつれて余計に分からなくなったので、前と（考え方は）変わらない。
(カ)自分にとって数学は悩むほど好きな教科ではないので（考え方は変わらない）。
(キ)考える事で理解が生まれるのは良いと思ったが、人によっては必要性に欠ける。
(ク)「悩むこと」「考えること」は大切であるが、興味のないものに対しては疑問の持ちようがないから。
(ケ)やっぱり解法を見るのが手っ取り早くて良い。
(コ)自分は文系人間なのであまり興味がなかった（から見方・考え方は変わらない）。

＜議論＞

キーワードにそって肯定的な回答を分析してみた。

「自分で、自分なりに」: 1，4，5，8，12，18，26，30，31

これらは、授業以前は与えられた問題を解いていただけで、自分の意志で数学をして

いなかったと考えられる回答である。自分で考える事を意識出来るようになったのは、筆者が答えを言う事を極力控え、生徒の意見を元に授業を進めていく展開が良かったと思われる。

「疑問」: 6，16，24

この回答を見る限り、以前は「なぜ」と感じても解決しようとしてきていなかったように思える。異文化体験である原典を用いた授業では、「疑問」に重心を置くことで、生徒が感じた「疑問」を意識させることができたと分析出来る。

「悩み考える」: 2，7，11，15，21，27

「悩み考える」事は苦しいことであるためその重要性が伝わりにくいと予想した。しかしこれらの回答から、数学史の原典を通して、「悩み考える」ことへの恐怖心が取り除ける事を本研究では示唆できた。特に、21 の「答えが無いから深く考えるようになった。」というのは、本研究でアルキメデスの近似を扱ったからこそ、得られた感覚であろう。

「過程」: 10，13，17，25，29

アルキメデスの方法に沿って授業を進めたことで、数学事象の「過程」に意識を向けることができたと考察できる。数学事象の「過程」に興味を持つことは、自分で学ぶきっかけとなるため、数学史とからめた本研究は有用であると考えられる。

「数学を用いる」: 19，20，22

これらの回答を見ると、生徒は考えることの重要性は分かってはいたが、考え方が分からなかったように感じ取れる。考える手段として、数学が使えると気づいた生徒がいたことが、原典を用いた教材の有効性を保証するものであろう。

「楽しさ」: 9，14，23

「楽しさ」というのは、課題には含めなかった筆者の陰のキーワードであった。「自分で」「悩み考える」事をするからこそ楽しいのであって、「教師」から「簡潔に教わる」から数学がつまらないのである。アルキメデスの原典の教材が、考える機会を与えた事が、「楽しさ」を生み出したと読み取れる。

次に、否定的回答を分析する。(ア)、(カ)、(コ)、(ク)を見ると、数学に対する苦手意識が強くあるようだ。特に(コ)は、自分を文系の人間である、と決めつけてしまっている。苦手意識を超越する興味関心を持たせることが出来なかった原因として、筆者が生徒の現状を認識できていなかったと考えられる。これほどまでに、数学を毛嫌いしているとは予想しておらず、授業進度の工夫を徹底すべきであった。

(イ)、(ウ)、(エ) 、(オ)、(キ)、(ケ)は、「悩み考えたくない」という意見や、「分からなかった」という意見である。これは、筆者の授業の経験不足から、考える動機付けや、設問の理解が充分でなかったことが原因であると考えられる。以上の否定的意見より反省点として、数学嫌いな生徒への配慮を行うこと、発問や解説を工夫することが挙げられる。

否定的意見のあったアンケート①を肯定的意見（「1.とてもそう思う」「2.そう思う」）と否定的意見（「3.そう思わない」「4.全く思わない」）に分けたところ、

肯定的意見…65％

否定的意見…35％

となったので、課題 1 はほぼ達成されたと考えられる。

(2) 課題 2 に対する議論

課題 2：アルキメデスにおける円周率の近似の方法と、それ以後の方法を比較して過去の偉業を知ることができるか。また、数学の発展は、過去の偉業の上の発展であると理解することができるか。

アンケート②：今回の授業で「近似」に対する見方・考え方が変わったか。その理由とどのように変わったか。

アンケート③：アルキメデスのπの近似の考え方がアルキメデス以降の数学に影響を与えたか。その理由とどんな事柄にどのように。

アンケート④：3 日間の授業で習った事柄に対してこれ以上は議論の余地があるか。その理由は。

事後アンケートより生徒の記述の一部をそのまま記入

＜肯定的意見＞

1. 紀元前にも近似があったんだ。
2. 昔の人はものすごく大変な事をしていたと思った。
3. アルキメデスがいなかったら、あそこまで、いろいろなことをこらして行う人がいなかったかもしれない。
4. （アルキメデスの方法は）円周や円柱、円錐の求め方に（影響を与えた。）
5. （アルキメデスの方法は）極限、無限などに（影響を与えた。）
6. 紀元前の人が発見したことなのに、それが今でも残っていて実際に計算等に使われている。
7. 割り切れない数字を近似することで計算の幅を広げた。
8. 「$\sqrt{3}$」など、普通では表しづらい表記の数字を「近似」することで、だいたいの数字の大きさが分かるのは凄かった。
9. 数学で実際求まらない値を他の値を求めることでぎりぎりまで近くすることが出来る。
10. 近似の考え方で図形の面積などが細かく求められるようになった。
11. （アルキメデスの方法は）近似を求めるために上と下で挟み込むようなやり方に（影響を与えた。）
12. （アルキメデスの方法は）直接その値を求めるのが困難なとき、図形などからその値に近似した値を求めるというのは、中々思いつきづらいと思うから、新しい概念を作ったと思う。
13. （議論の余地があるのは）まだまだ、知りたいことがあるから。
14. （議論の余地があるのは）数学はいろんな方面に発展していきそうだから。もっと議論できることはあると思う。
15. （議論の余地が）ありそうな気がする。
16. （議論の余地があるのは）数学は奥が深いから。
17. （議論の余地があるのは）探求し続けることがもっとできるから。
18. （議論の余地があるのは）まだまだ発展していくだろうと思われるから。
19. （近似に対して）どんな方法を尽くしても完璧な解答は無いのにそれに近づくために様々な方法を何度も何度も繰り返して行くのがすごいと思う。

＜否定的意見＞

(ア)近似が直接他のことに関わっていないと思うから（アルキメデスの方法は影響を与えなかった）。

(イ)（アルキメデスの方法は）現在の学生に数学をたたき込ませる（影響を与えた。）

(ウ)少なくとも、円周率がなかったら、小学校の計算に苦労しなかった（ので悪い影響があった）。 (エ)（議論する必要が無いのは）そう教えてもらったから。 (オ)（議論する必要が無いのは）どちらかというと議論を聞く方が好きだから。 (カ)一人一人がいろんな考え方を持つのだから（アルキメデスは影響を）与えていないと思う。 (キ)公式を応用すれば良いだけのように感じたから（アルキメデスは影響を与えていない）。 (ク)アルキメデスの考えかたと同じように数学について考える人がいると思うから（影響を与えていない）。

＜議論＞

課題 1 と同様にキーワードごとに肯定的回答を分析した。

「過去の偉業」: 1，2，3，7，8

今回の研究で筆者が感じたことは、「過去の偉業」を知るという作業であれば、とても熱心に生徒は耳を傾けるということだ。アルキメデスを取り上げた教材を用いることで、数学において、生徒が問題を解く以外の興味を持つことが出来たと見て取れる。8 のように「凄い」という感覚は、原典を用いた教材による異文化体験の結果である。ここから、異文化体験の有用性を示唆できる。

「数学の発展」: 4，5，6，11，12，13，14，15，16，17，18，19

「数学の発展」を理解することで、教科書の公式は過去の偉業であり、それらを用いれば、これからも数学が発展して行くことを知ることが出来る。4，5 は先に学習している生徒であるかもしれないが、アルキメデスの方法との共通点を見いだしている。議論の余地があるという質問は、意図を取り違えてしまった生徒が多く質問の仕方を工夫すべきであった。また、直接授業で「発展」について触れなかったため、どのような回答が来るか不安であった。それでも、13ー19 は「数学の発展」について理解できたと読み取れる。しかし、少数であることから、「発展」における原典を用いた教材の有効性が確立されたとは言い難い。今後も研究を継続する必要があるだろう。

次に、否定的回答を分析する。アルキメデスが影響を与えていないと考える理由として、アルキメデスのオリジナリティが充分に伝わらなかったことが挙げられる。(カ)、(キ)、(ク)のようにアルキメデスの偉大さが伝わらなかったのは、授業の後半に筆者の説明が長くなり、生徒に考えさせる時間がなかったと分析できる。また、(イ)、(ウ)は数学への嫌悪感が表れている。訳の分からないまま計算をさせた部分があったことが原因であろう。(エ)、(オ)は数学の発展についての問いであるが、議論をする機会が学校数学ではあまりないからだと考えられる。今回の研究では、議論することを取り入れたが、なかなか発展していかなかった。

以上の否定的意見より反省点として、生徒の活動の時間を授業全体に取り入れること、意味を理解して計算を行えるような授業展開にすることが挙げられる。しかし、これらの否定的意見はごく少数であったので、課題２は達成されたと考えられる。

7. おわりに

今回の研究では、原典を用いた教材の有効性を示すことが出来た。しかし、筆者の授業経験不足による否定的意見もあり、改善点も多い。今後の研究で改めて原典を用いた教材

の有効性を示したい。

また、導入で用いた電卓の計算では、簡単な計算であるのにもかかわらず出来ない生徒が多く見られた。これには担当の先生も驚かれていた。有るものを活用できる能力、これこそが数学教育に求められていることではなかろうか。本研究のように、暗記を基本とした数学教育への不信感を払拭するような教材の研究が必要であると切に感じた。

謝辞

研究授業の実施に際して、埼玉県立春日部高等学校の早乙女勤先生、金子豊先生をはじめ、数学科の先生方には多大な時間を割いていただき、大変貴重なご意見、ご指導をいただきました。また、春日部高校の諸先生方にも、ご協力をいただきました。厚く御礼申し上げます。

注）本研究は、文部科学省科学研究費特定領域研究(2)課題番号 17011014「代数・幾何・微積分の動的理解を促す「使える数学」教材サイトの開発に関する研究−数学用機械と JAVA による移動・変換と関数・微積ハンズオン教材の WEB 化研究（II）−」(研究代表者礒田正美）による研究の一環として行われた。

参考・引用文献

文部科学省(1999).*高等学校学習指導要領 数学編 理数編*.実教出版

礒田正美(2002).*数学活動を楽しむ心を育てる。課題学習・選択学習・ 総合学習の教材開発*.明治図書

礒田正美(2001).*異文化から見た数学の文化的視野の覚醒に関する一考察—隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて—.筑波数学教育研究 20*

上垣渉(1999).*アルキメデスを読む*.日本評論社

伊達文治(1993).*アルキメデスの数学—静力学的な考え方による求積法—*.森北出版株式会社

アルキメデス(1990).*アルキメデス方法.* 佐藤徹訳・解説.東海大学出版会

T.L.ヒース(1988).*復刻版 ギリシア数学史*.共立出版

ボイヤー(1984).*数学の歴史 3*,加賀美鉄雄,浦野由訳.朝倉書店

猪口和則(1998). *πの公式をデザインする*.新風舎

ジャン＝ポール・ドゥラエ(2001). *π-魅惑の数*,畑政義訳.朝倉書店

デビッド・ブラットナー(1999). *π［パイ］の神秘*,浅尾敦則.アーティストハウス

J.L. Heiberg(1910).*Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii*, Editio stereotypa editionis anni 1910, Vol. 1. Lipsiae : B.G. Teubner

小林真人(2003).*球の体積の公式指導に関する授業研究 —アルキメデス「方法」を題材として—. 中学校・高等学校数学科教育課程に関する研究(10)*. 筑波大学教育研究学研究室.pp.93-102

丸山洋幸(2004).*福田理軒『測量集成』の体験学習を通した生徒の数学観の変容 —量尺・量地儀を使った三角比・対数の授業—. 中学校・高等学校数学科教育課程に関する研*

究(11). *筑波大学数学教育学研究室*.pp.203-217

奥山洋士(2004).*求積法の歴史を扱った授業実践に関する一考察　—紀元前から現在に至る求積法の変遷—.　中学校・高等学校数学科教育課程に関する研究 (11)*. *筑波大学教育研究学研究室*.pp.177-190

秋山裕紀(2005).*造船の歴史と「船」の安定条件についての授業研究　—アルキメデス「浮体について」とヴァーサ号沈没事故を題材に—.　中学校・高等学校数学科教育課程に関する研究(12)*. *筑波大学教育研究学研室*.pp.186-196