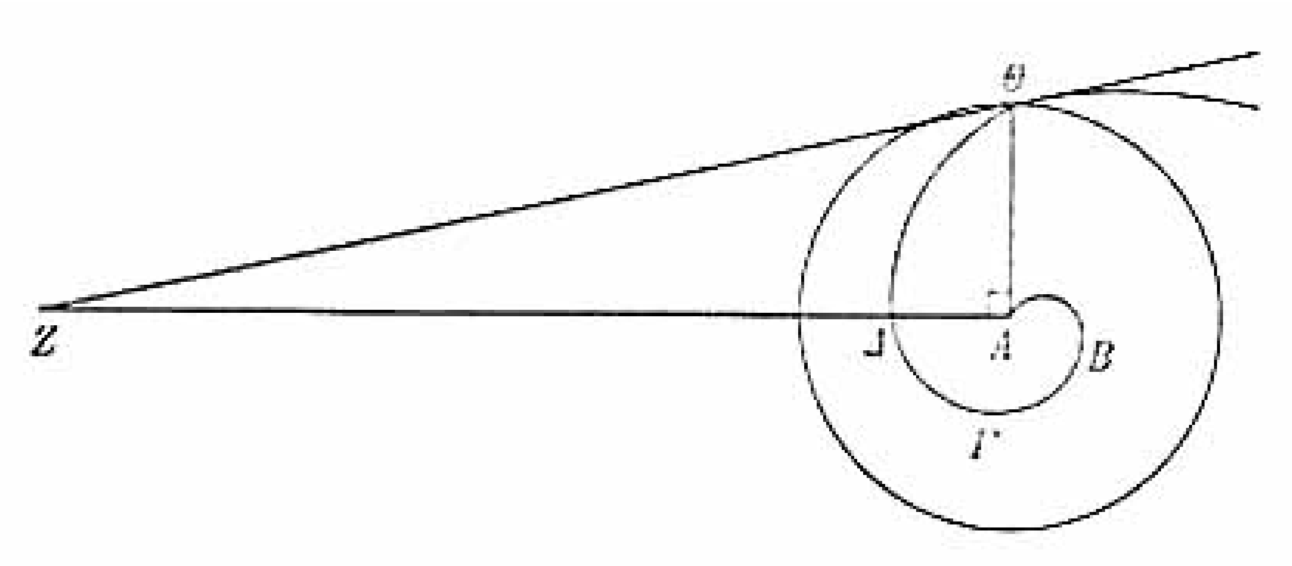
3 時間目資料

授業資料

古代の難問と曲線

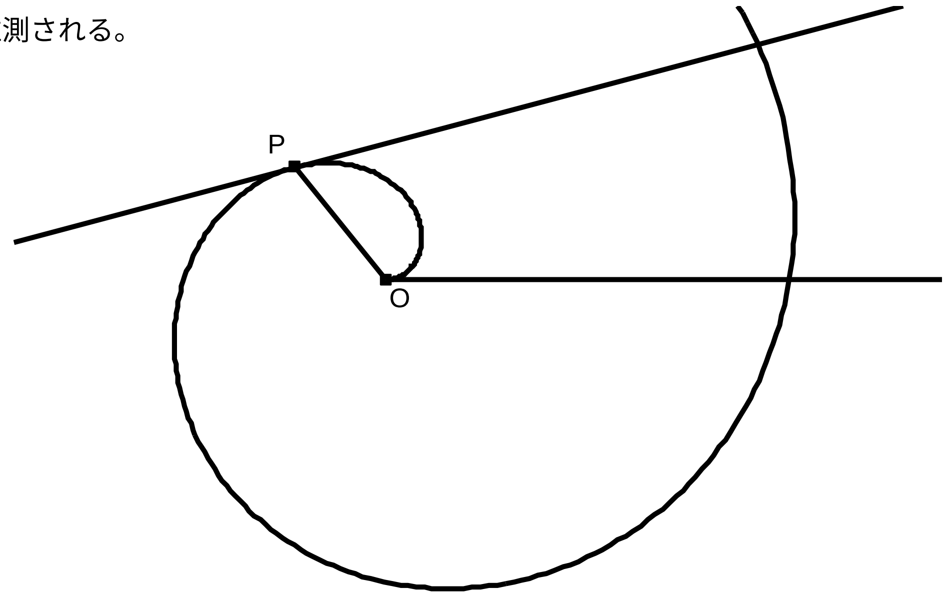


2 年　　組　　番　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

授業者：筑波大学大学院教育研究科　石井寿一

1、前回の復習

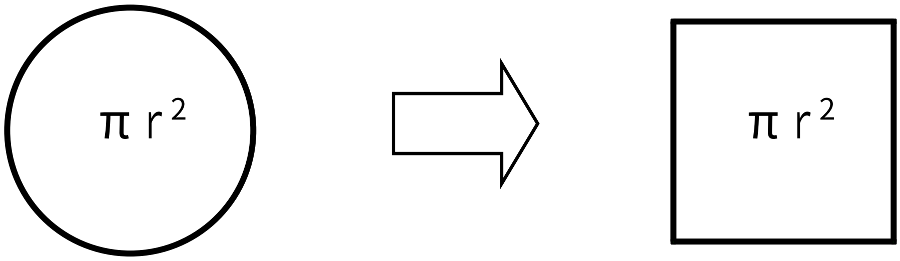
『螺線について』のなかで接線の明確な定義は述べられていないが、「曲線と１点を共有し、その近くにおいてその曲線全体が直線のどちらか一方にあるような直線」と考えていたと推測される。



2、円積問題

与えられた円の面積と、まったく等しい面積を有する正方形を作ること

→ 資料1日目



3、『円の計測』

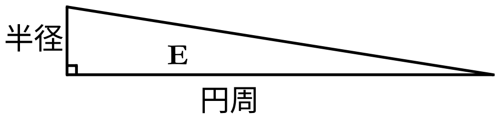
『円の計測』　命題１

全ての円は、直角を挟んでいる二つの辺のうちの１辺が、その円の直径の半分に等しく、もう一つの辺が円を囲む線に等しいような直角三角形に等しい。

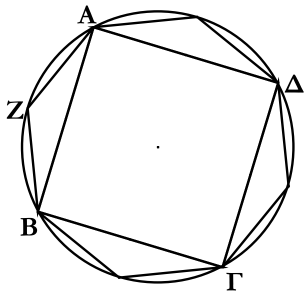
つまり図にすると…

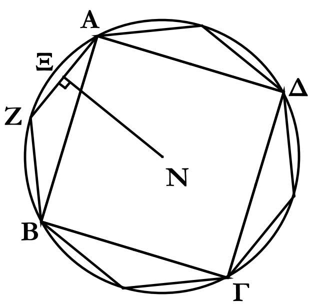
《証明 日本語訳》(前半部)

そこで、すでに命題においてわれわれが述べたことにしたがって、円ＡＢΓΔが三角形Ｅに等しいとせよ。そこで一方の大きさが他方の大きさに等しいと主張する。さてもしそうでないとすると、円は三角形Ｅより大きいか小さいかであろう。そこでまずより大きいとせよ。



さて円の中に正方形ＡＢΓΔをつくるとせよ。すると、円ＡＢΓΔからその半分より大きな部分、すなわち正方形ＡＢΓΔが分離される。さらに、弧ＡＢを点Ｚで２等分し、(他の) 同様な弧も同じように２等分されたとせよ。そしてＡＺとＺＢ、そして同様なものを結ぶとせよ。すると円ＡＢΓΔの残っている部分、すなわち（三角形）ＡＺＢおよびそれと同様なものがさらに分離される。それゆえ、引き続いてこのように繰り返すと、円が三角形Ｅを凌駕する差より小さい部分が残るであろう。そしてそのとき、ａ）円が含んでいる直線図形（内接多角形）は三角形Ｅより大きいであろう。そこでＡＺＢとそれに同様なものをそのような図形とせよ。

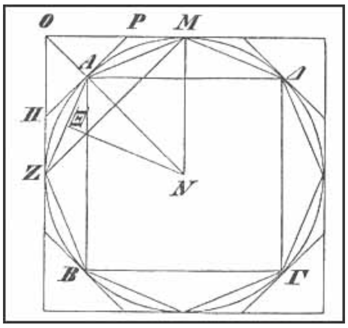




ところで円の中心Ｎを定め、垂線ＮΞをひくとせよ。すると線ＮΞは、直角を挟んでいる三角形Ｅの二つの辺のうちの１辺より小さい。そして内接多角形を囲んでいる線は、他の残りの１辺より小さい。なぜなら、その線は円の周囲より小さいから。さて、直角を挟んでいる三角形Ｅの２辺のうちの１辺と他方の辺との積、すなわち三角形Ｅの面積の２倍はＮΞと内接多角形を囲んでいる線との積、すなわち多角形の２倍より大きい。そこでこれから、ｂ）三角形Ｅは内接多角形より大きい。

しかしながら（三角形Ｅは内接多角形より）小さかった。これは全く矛盾しており、不可能である。

《証明 日本語訳》(後半部)



またもし可能ならば、円が三角形Ｅより小さいとせよ。さて円の上に円を囲む正方形をつくるとせよ。そしてその正方形をＫＯとせよ。さて確かに正方形ＫＯから、その半分より大きな部分、すなわち円が分離される。さらに、弧ＺＭとそれと同様な弧を２等分せよ。すると２等分する点を通る線は円に接する。そのとき、線ΠＰはまた点Ａで２等分される。そして線ＯＡはΠＰに垂直であり、それと同じような線も同様である。そしてΠＯとＯＰ(の和)はΠＰより大きく、(ΠＯとＯＰの和の)半分は(ΠＰの)半分より大きいから、線ＯＰはＰＡ、すなわちＰＭより大きい。それゆえ、三角形ＡＯＰは三角形ＡＯＭの半分より大きい。そしてそれは、二つの線ＡＯとＯＭと弧ＭＡによって囲まれた図形ＡＯＭの半分よりなおさら大きいであろう。そして同様に、三角形ＯＡΠは図形ＯＡＺの半分より大きいであろう。それゆえ、ＰＯΠ全体は、二つの線ＺＯとＯＭと弧ＺＡＭによって囲まれた図形ＺＡＭＯの半分より大きい。そして同様に、同じような三角形は他の同様な図形の半分より大きい。それゆえ、引き続いてこのように繰り返すと、合計されるとき、三角形Ｅが円ＡＢΓΔを凌駕する差より小さいような部分が円にまわりに残るであろう。そこで図形ＡΠＺとそれに同様なものが残ったとせよ。そこでそのとき、円を含む直線図形は三角形Ｅより小さいであろう。しかしこれは全く不可能である。なぜなら、それは(三角形Ｅより)大きいから。というのは、ＮＡは三角形の高さに等しく、多角形を囲んでいる線は円を囲む線より大きいゆえに、直角を挟んでいる三角形の残りの辺より大きい。それゆえ、ＡＮと多角形を囲んでいる線との積は、直角を挟んでいる三角形の２辺のうちの１辺と他方の辺との積より大きい。そこで円は三角形Ｅより小さくない。そしてすでに最初の部分で、円が三角形Ｅより大きくないことが明らかにされた。それゆえ円ＡＢΓΔは三角形Ｅに等しい。

（証明終わり）

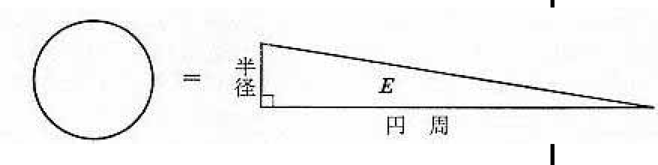
【証明の方針】

「円の面積 ＝ 三角形 E の面積」であることを示す。もし、「円の面積 ＝ 三角形の面積」でないなら、次の２つのいずれかが成り立つ。

(1) 円の面積 ＞ 三角形 E の面積

(2) 円の面積 ＜ 三角形 E の面積

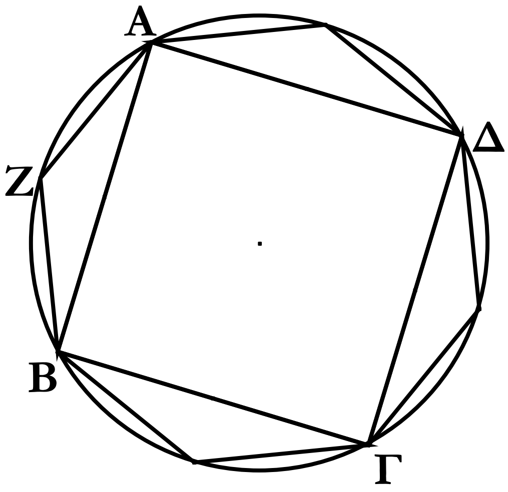
これらを仮定してそれぞれの場合で矛盾を導き、「円の面積 ＝ 三角形 E の面積」を得る。



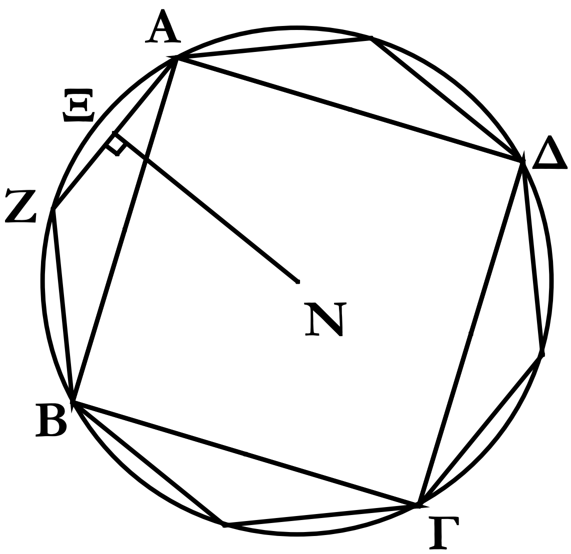
『円の計測』命題１の証明（前半部）を読んで以下について考えてみよう。

１、前半部の証明で仮定している部分はどこだろう。

２、下線ａ）のようになる過程を不等式で表してみよう。



３、下線ｂ）のようになる過程を不等式で表してみよう。



４、前半部の証明で矛盾している部分はどこだろう。

ιη'.

Εἴ κα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ κατὰ τὸ πέρας τᾶς ἕλικος, ἀπὸ δὲ τοῦ σαμείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ποτ' ὀρθὰς ἀχθῇ τις τᾷ ἀρχᾷ τᾶς περιφορᾶς, ἁ ἀχθεῖσα συμπεσεῖται τᾷ ἐπιψαυούσᾳ, καὶ ἁ μεταξὺ εὐθεῖα τᾶς ἐπιψαυούσας καὶ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος ἴσα ἐσσεῖται τᾷ τοῦ πρώτου κύκλου περιφερείᾳ.

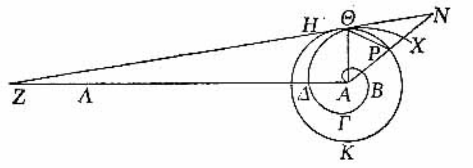


Fig. 16

Ἔστω ἕλιξ ἁ ΑΒΓΔΘ, ἔστω δὲ τὸ Α σαμεῖον ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἁ δὲ ΘΑ γραμμὰ ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς, ὁ δὲ ΘΗΚ κύκλος ὁ πρῶτος, ἐπιψαυέτω δέ τις τᾶς ἕλικος κατὰ τὸ Θ ἁ ΘΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἄχθω ποτ' ὀρθὰς τᾷ ΘΑ ἁ ΑΖ· συμπεσεῖται δὴ αὕτα ποτὶ τὰν ΘΖ, ἐπεὶ αἱ ΖΘ, ΘΑ ὀξεῖαν γωνίαν περιέχοντι. Συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ζ. Δεικτέον ὅτι ἁ ΖΑ ἴσα ἐστὶ τᾷ τοῦ ΘΚΗ κύκλου περιφερείᾳ.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἐλάσσων. Ἔστω πρότερον, εἰ δυνατόν, μείζων. Ἔλαβον δή τινα εὐθεῖαν τὰν ΛΑ τᾶς μὲν ΖΑ εὐθείας ἐλάσσονα, τᾶς δὲ τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας μείζονα. Ἔστιν δὴ κύκλος τις ὁ ΘΗΚ καὶ ἐν τῷ κύκλῳ γραμμὰ ἐλάσσων τᾶς διαμέτρου ἁ ΘΗ καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἁ ΘΑ ποτὶ ΑΛ, μείζων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ΗΘ ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ Α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν, διότι καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΘΑ ποτὶ ΑΖ· δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ Α ποτιβαλεῖν ποτὶ τὰν ἐκβεβλημέναν τὰν ΑΝ, ὥστε τὰν μεταξὺ τᾶς περιφερείας καὶ τᾶς ἐκβεβλημένας τὰν ΝΡ ποτὶ ΘΡ τὸν αὐτὸν ἔχειν λόγον, ὃν ἁ ΘΑ ποτὶ τὰν ΑΛ· ἕξει οὖν ἁ ΝΡ ποτὶ τὰν ΡΑ λόγον, ὃν ἁ ΘΡ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ΑΛ. Ἁ δὲ ΘΡ ποτὶ τὰν ΑΛ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΘΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν· ἁ μὲν γὰρ ΘΡ εὐθεῖα ἐλάσσων ἐστὶ τᾶς ΘΡ περιφερείας, ἁ δὲ ΑΛ εὐθεῖα τᾶς τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας μείζων· ἐλάσσονα οὖν λόγον ἕξει καὶ ἁ ΝΡ ποτὶ ΡΑ ἢ ἁ ΘΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν· καὶ ὅλα οὖν ἁ ΝΑ ποτὶ τὰν ΑΡ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἁ ΘΡ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ ΘΡ περιφέρεια μεθ' ὅλας τᾶς τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ ΧΑ ποτὶ τὰν ΑΘ· δέδεικται γὰρ τοῦτο· ἐλάσσονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΝΑ ποτὶ τὰν ΑΡ ἤπερ ἁ ΧΑ ποτὶ τὰν ΑΘ· ὅπερ ἀδύνατον· ἁ μὲν γὰρ ΝΑ μείζων ἐστὶ τᾶς ΑΧ, ἁ δὲ ΑΡ ἴσα ἐστὶ τᾷ ΘΑ. Οὐκ ἄρα μείζων ἁ ΖΑ τᾶς τοῦ κύκλου περιφερείας τοῦ ΘΗΚ.

4、円周に等しい直線

『螺線について』
命題１８

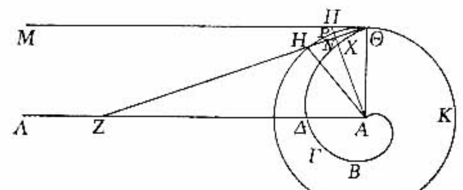
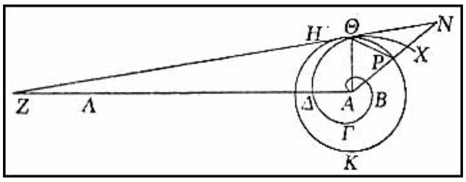


Fig. 17

Ἔστω δὴ πάλιν, εἰ δυνατόν, ἐλάσσων ἁ ΖΑ τᾶς τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας. Ἔλαβον δή τινα εὐθεῖαν πάλιν τὰν ΑΛ τᾶς μὲν ΑΖ μείζονα, τᾶς δὲ τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας ἐλάσσονα, καὶ ἄγω ἀπὸ τοῦ Θ τὰν ΘΜ παράλληλον τᾷ ΑΖ. Πάλιν οὖν κύκλος ἐστὶν ὁ ΘΗΚ καὶ ἐν αὐτῷ ἐλάσσων γραμμὰ τᾶς διαμέτρου ἁ ΘΗ καὶ ἄλλα ἐπιψαύουσα τοῦ κύκλου κατὰ τὸ Θ καὶ λόγος, ὃν ἔχει ἁ ΑΘ ποτὶ τὰν ΑΛ, ἐλάσσων τοῦ ὃν ἔχει ἁ ἡμίσεια τᾶς ΗΘ ποτὶ τὰν ἀπὸ τοῦ Α κάθετον ἐπ' αὐτὰν ἀγμέναν, ἐπειδὴ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἁ ΘΑ ποτὶ ΑΖ ἐλάσσων ἐστί· δυνατὸν οὖν ἐστιν ἀπὸ τοῦ Α ἀγαγεῖν τὰν ΑΠ ποτὶ τὰν ἐπιψαύουσαν, ὥστε τὰν ΡΝ τὰν μεταξὺ τᾶς ἐν τῷ κύκλῳ εὐθείας καὶ τᾶς περιφερείας ποτὶ τὰν ΘΠ τὰν ἀπολαφθεῖσαν ἀπὸ τᾶς ἐπιψαυούσας τοῦτον ἔχειν τὸν λόγον, ὃν ἔχει ἁ ΘΑ ποτὶ τὰν ΑΛ· τεμεῖ δὴ ἁ ΑΠ τὸν μὲν κύκλον κατὰ τὸ Ρ, τὰν δὲ ἕλικα κατὰ τὸ Χ· καὶ ἕξει καὶ ἐναλλὰξ τὸν αὐτὸν λόγον ἁ ΝΡ ποτὶ ΡΑ, ὃν ἁ ΘΠ ποτὶ ΑΛ. Ἁ δὲ ΘΠ ποτὶ τὰν ΑΛ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἁ ΘΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν· ἁ μὲν γὰρ ΘΠ εὐθεῖα μείζων ἐστὶν τᾶς ΘΡ περιφερείας, ἁ δὲ ΑΛ ἐλάσσων τᾶς τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΠΡ ποτὶ τὰν ΑΡ ἢ ἁ ΘΡ περιφέρεια ποτὶ τὰν τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρειαν· ὥστε καὶ ἁ ΡΑ ποτὶ τὰν ΑΝ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ἁ τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν ΘΚΡ περιφέρειαν. Ὃν δὲ λόγον ἔχει ἁ τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφέρεια ποτὶ τὰν ΘΚΡ περιφέρειαν, τοῦτον ἔχει ἁ ΘΑ εὐθεῖα ποτὶ τὰν ΑΧ· δέδεικται γὰρ τοῦτο· μείζονα ἄρα λόγον ἔχει ἁ ΡΑ ποτὶ τὰν ΑΝ ἢ ἁ ΘΑ ποτὶ τὰν ΑΧ· ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα μείζων ἐστὶν οὐδὲ ἐλάσσων ἁ ΖΑ τᾶς τοῦ ΘΗΚ κύκλου περιφερείας· ἴσα ἄρα.

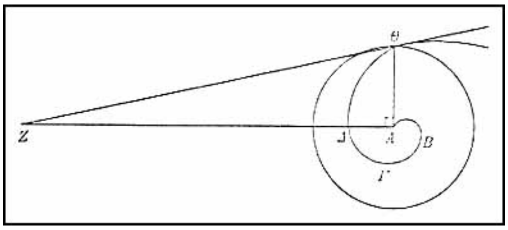
『螺線について』　命題 18

　もし直線が第 1 回転で描かれた螺線に、螺線の終端で接し、そして螺線の原点である点から回転の原線に垂直にある直線がひかれるならば、ひかれた直線は接線と交わり、接線と螺線の原点との間の線分の長さは、第 1 円の円周に等しいであろう。



　ＡＢΓΔΘを螺線とせよ。また点Ａを螺線の原点とし、線ΘＡを回転の原線とし、円ΘＨＫを第１円とせよ。そしてある直線ΘＺがΘで螺線に接するとせよ。またＡＺが、ＡからΘＡに垂線にひらかれたとせよ。するとその直線は、ＺΘとΘＡが鋭角を挟むので、ΘＺに交わるであろう。Ｚで交わるとせよ。ＺＡが円ΘＫＨの円周に等しいということが証明されるべきである。

つまり右図の場合



$\boxed{\quad\quad}$　と第１円の円周が等しい。

円周に等しい直線ができる！

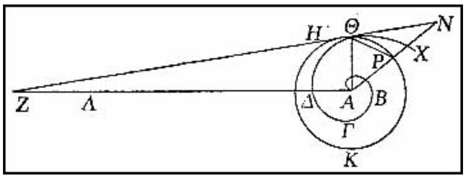
『円の計測』命題１より

円と等しい面積の三角形が作れる！

【証明の方針】
ＺＡ ＝（円ΘＫＨの円周）であることを示す。もし、ＺＡ ＝（円ΘＫＨの円周）でないなら、次の２つのいずれかが成り立つ。
(1) ＺＡ ＞（円ΘＫＨの円周）
(2) ＺＡ ＜（円ΘＫＨの円周）
これらを仮定してそれぞれの場合で矛盾を導き、ＺＡ ＝（円ΘＫＨの円周）を得る。

空欄を埋めて証明（前半部）を完成させよう。

《証明 日本語訳》（前半部）



なぜなら、もしそうでないなら、より大きいかより小さいかである。もし可能ならば、まず（ＺＡが円ΘＫＨの円周より）より大きいとせよ。そこで、線分ＺＡより小さくて、円ΘＨＫの円周より大きいある線分ΛＡをとる。すると、ある円ΘＨＫと、その円の中に直径より小さい線ΘＨがあり、また、ΘＡがＡΛに対してもつ比は、ΘＡがＡＺに対してもつ比よりも大きいので、ＨΘの半分が、ＡからＨΘにひかれた垂線に対してもつ比より大きい。したがって、円周と（ＺΘの）延長された直線の間の線分ＮＰが、ΘＰに対して、ΘＡがＡΛに対するのと同じ比を持つように、ＡからＡＮを、（ＺΘの）延長された直線と交わるようにひくことができる。それゆえ、ＮＰはＰＡに対して、線分ΘＰがＡΛに対するような比をもつであろう。ところでΘＰは、ＡΛに対して、弧ΘＰが円ΘＨＫの円周に対する比よりも小さな比をもつ。なぜなら、線分ΘＰは弧ΘＰよりも小さいし、線分ＡΛは円ΘＨＫの円周よりも大きいから。それゆえ、ＮＰはまたＰＡに対して、弧ΘＰが円ΘＨＫの円周に対するよりも小さな比をもつであろう。したがって、ＮＡ全体はＡＰに対して、弧ΘＰと全円周の和が、円ΘＨＫの円周に対するよりも小さな比をもつ。ところで、ＸＡはＡΘに対して、弧ΘＰと円ΘＨＫの全円周の和が、円ΘＨＫの円周に対してもつような比をもつ。なぜなら、このことは証明されたから。ゆえに、ＮＡはＡＰに対して、ＸＡがＡΘに対するよりも小さな比をもつ。それは不可能なことである。なぜなら、ＮＡはＡＸよりも大きいし、ＡＰはΘＡに等しいから。それゆえ、ＺＡは円ΘＨＫの円周より大きくない。

網掛け部分では以下の補題を使用する。(証明は省略)

『螺線について』 命題７

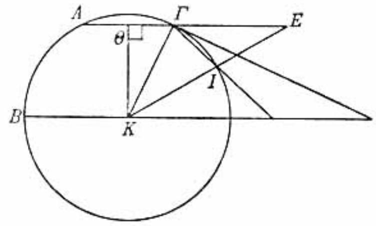


図 3.20

円ＡＢΓとその直径より小さい弦ＡΓがあり、Ｚ：Ｈ＞ΓΘ：ΘＫなる比Ｚ：Ｈが与えられたとする。そのときＥＩ：ＩΓ＝Ｚ：Ｈとなるように、円の中心ＫからＡＥにＫＥをひくことが可能であることを示す。

『螺線について』 命題１５

第２回転で描かれた螺線があり、図のようにＡＨＥとＡＺΛがひかれるとせよ。そのとき、ＡΛ：ＡＥ＝(弧ΘＫＺ＋半径ＡΘの円の円周)：(弧ΘＫＨ＋半径ＡΘの円の円周)が成立することを示す。

《証明 前半部》

(1) ＺＡ ＞（円ΘＫＨの円周）と仮定する。

> 補足
> $A:B>C:D$
> は $\dfrac{A}{B}>\dfrac{C}{D}$
> という古代の表現。

そこで　ＺＡ ＞ ① ＞（円ΘＫＨの円周）となる線分ΛＡをとる。

　　　　円ΘＫＨ上に点があり、ΘＨは直径より小さい。

そして　ΘＡ：ＡΛ ＞ ΘＡ：ＡＺ　　（∵ ＡΛ＜ＡＺ）

であり、また　ΘＡ：ＡＺ ＝ ΘＨ/2：(ＡからＨΘへの垂線)

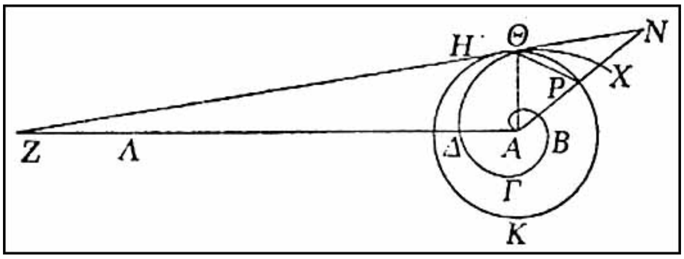
であるから　ΘＡ：ＡΛ ② ΘＨ/2：(ＡからＨΘへの垂線)

となる。

よって命題７より

　　ＮＰ：ΘＰ ＝ ΘＡ：ＡΛ

となるようにＺΘの延長上に点Ｎをとることができる。



それゆえ、ＡΘ ＝ ＡＰより

　　③ ＝ ③

ところで　　ΘＰ：ＡΛ ＜ 弧ΘＰ：(円ΘＫＨの円周)

　　　　　（∵　ΘＰ ＜ 弧ΘＰ、ＡΛ ＞ 円周）

それゆえ　ＮＰ：ＰＡ ＜ 弧ΘＰ：(円ΘＫＨの円周)

したがって

（ＮＰ＋ＰＡ)：ＰＡ ＜ （弧ΘＰ＋円ΘＫＨの円周)：(円ΘＫＨの円周)

　ＮＡ：ＰＡ ＜ （弧ΘＰ＋円ΘＫＨの円周)：(円ΘＫＨの円周)

> 補足：
> $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$
> $\Leftrightarrow \frac{a}{b}+1<\frac{c}{d}+1$
> $\Leftrightarrow \frac{a+b}{b}<\frac{c+d}{d}$

ところで命題１５より

　　ＸＡ：ＡΘ ＝ （弧ΘＰ＋円ΘＫＨの円周)：(円ΘＫＨの円周)

ゆえに　④ ＜ ④　―①

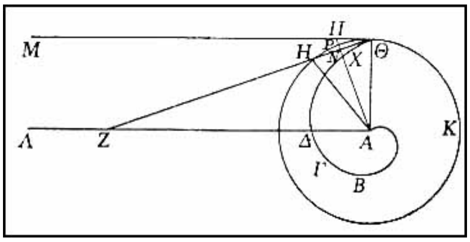
しかし、ＮＡ ＞ ＡＸ であり、ＡＰ ＝ ＡΘ　なので

　　⑤ ＞ ⑤　―②

①と②は矛盾

よって　⑥ ＞ ⑥　ではない。

《証明 日本語訳》(後半部)



そこでまた、もし可能ならば、ZA が円ΘHK の円周より小さいとせよ。そこで再び、AZ よりも大きくて、円ΘHK の円周よりも小さいある線分 AΛをとる。そしてΘから、AZ に平行なΘM をひく。そこで再び、円ΘHK と、その中の直径より小さい線分ΘH と、Θでの円への接線がある。また AΘが AΛに対してもつ比は、ΘA が AZ に対してもつ比より小さいので、HΘの半分が、A から HΘにひかれた垂線に対してもつ比よりも小さい。したがって、円の中の線分(HΘ)と円周との間の線分 PN が、接線から切り取られた線分ΘΠに対して、ΘA が AΛに対してもつような比をもつように、A から接線へ AΠをひくことが可能である。すると AΠは、円を P で、螺線を X で切るであろう。また入れ替えて、NP は PA に対して、ΘΠが AΛに対するのと同じ比をもつであろう。ところで、ΘΠは AΛに対して、弧ΘP が円ΘHK の円周に対するよりも大きな比をもつ。なぜなら、線分ΘΠは弧ΘP よりも大きいし、AΛは円ΘHK の円周に対するより大きな比をもつ。その結果、PA は AN に対して、円ΘHK の円周が弧ΘKP に対するよりも大きな比をもつ。ところで、線分ΘA は AX に対して、円ΘHK の円周が弧ΘKP に対してもつような比をもつ。なぜなら、このことは証明されたから。それゆえ、PA は AN に対して、ΘA が AX に対するよりも大きな比をもつ。それは不可能なことである。ゆえに、ZA は、円ΘHK の円周より大きくなく小さくもない。よって(ZA は円ΘHK の円周に)等しい。

網掛け部分では以下の補題を使用する。(証明は省略)

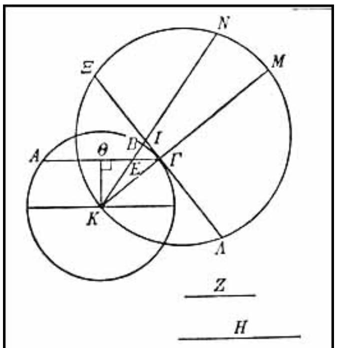


図 3.21

『螺線について』 命題８

円とその直径より小さい弦ＡΓがあり、Γでの円への接線をＡΞとする。Ｚ：Ｈ＜ΓΘ：ΘＫなる比Ｚ：Ｈが与えられると、ＥＢ：ΓＩ＝Ｚ：Ｈとなるように、円の中心ＫからＡΞにＫＩをひくことが可能であることを示す。

『螺線について』 命題１４

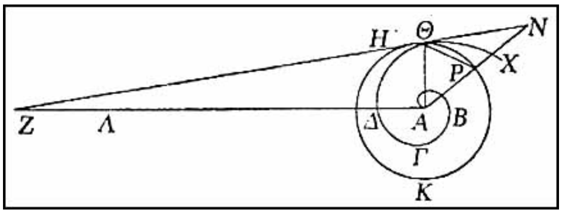
第１回転で描かれた螺線があり、図のようにＡＥＺとＡΔＨがひかれたとせよ。そのとき、ＡＥ：ＡΔ＝(弧ΘＫＺ)：(弧ΘＫＨ)が成立することを示す。

《証明 後半部》

(2) ＺＡ＜（円ΘＨＫの円周）と仮定する。

そこで　（円ΘＫＨの円周）＞ＡΛ＞ＺＡとなる線分ＡΛをとる。

そしてΘからＡＺに平行なΘＭをひく。



円ΘＨＫ上に点Ｈがあり、ΘＨは直径より小さい。

また、ＡΘ：ＡΛ＜ΘＡ：ＡＺ　（∵　ＡΛ＞ＺＡ）

ＡΘ：ＡＺ＝ＨΘ/２：(ＡからＨΘへの垂線)

なので　ＡΘ：ＡΛ＜ＨΘ/２：(ＡからＨΘへの垂線)

したがって命題８より

ＰＮ：ΘΠ＝ΘＡ：ＡΛ

となるようにＡから接線へＡΠをひくことができる。

すると　ＡΠは円とはＰで、螺線とはＸで交わる。

また、ＰＮ：ΘＡ＝ΘΠ：ＡΛ

であり、ΘＡ＝ＡＰであるからＰＮ：ＰＡ＝ΘΠ：ＡΛ

となる。

ところで、ΘΠ：ＡΛ＞弧ΘＰ：(円ΘＨＫの円周)

（∵　ΘΠ＞弧ΘＰ、ＡΛ＜円ΘＨＫの円周）

それゆえ　ＰＮ：ＡＰ＞孤ΘＰ：(円ΘＨＫの円周)

その結果（ＰＡ－ＰＮ)：ＰＡ＜（円ΘＨＫの円周ー弧ΘＰ)：(円ΘＨＫの円周)

ＡＮ：ＰＡ＜弧ΘＫＰ：(円ΘＨＫの円周)

ＰＡ：ＡＮ＞（円ΘＨＫの円周)：弧ΘＫＰ

ところで命題１４より

ΘＡ：ＡＸ＝（円ΘＨＫの円周)：弧ΘＫＰ

それゆえ　ＰＡ：ＡＮ＞ΘＡ：ＡＸ　ー③

ところが　ＰＡ＝ΘＡ，ＡＮ＞ＡＸより

ＰＡ：ＡＮ＜ΘＡ：ＡＸ　ー④

③と④は矛盾。

よってＺＡ＜（円ΘＨＫの円周）ではない。

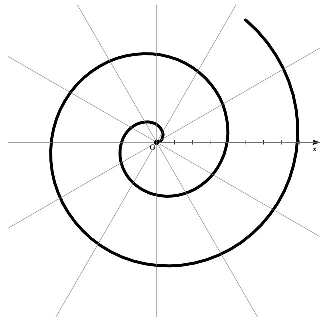
以上(1)、(2)より　ＺＡ＝（円ΘＨＫの円周）

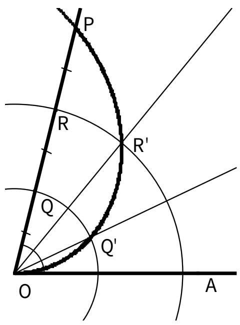
証明終わり

3時間のまとめ

１時間目

原典『螺線について』にある定義を読み取り、アルキメデス螺線を実際に描きその性質を調べた。



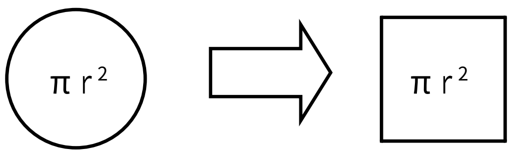


２時間目

アルキメデス螺線の性質を利用して、古代の３大難問の１つである「角の３等分」を行った。さらにもう一つの３大問題である「円積問題」解決のカギとなる螺線の接線について調べていった。

３時間目

アルキメデス螺線を通して円積問題解決の手順を追った。



皆さんにはアルキメデス螺線を通して古代ギリシア数学にふれてもらいました。定木とコンパスによる作図や数式を使用しない証明など、懐かしい数学もあまり慣れない数学もあったと思いますが、いかがでしたか。当時の人々の考えや、当時の数学との違いなどを感じてくれれば幸いです。

短い時間だったので、触れることができず仕舞いの内容もあります。例えば、残った３大問題「立方倍積問題」や「角の３等分」「円積問題」の別の解法など。興味があれば是非皆さん自身で調べてみて下さい。

３日間、本当にありがとうございました。