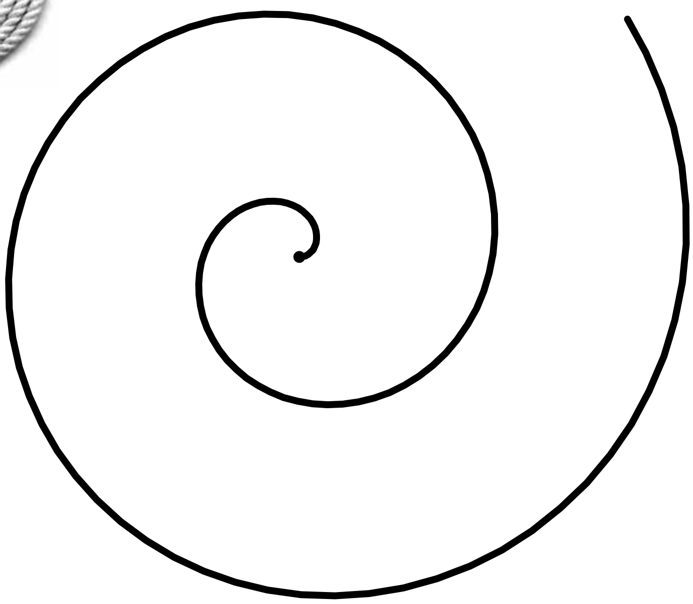
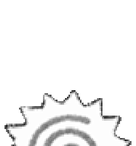
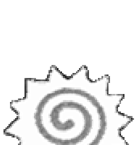
2時間目資料

授業資料

古代の難問と曲線







2年　　組　　番　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

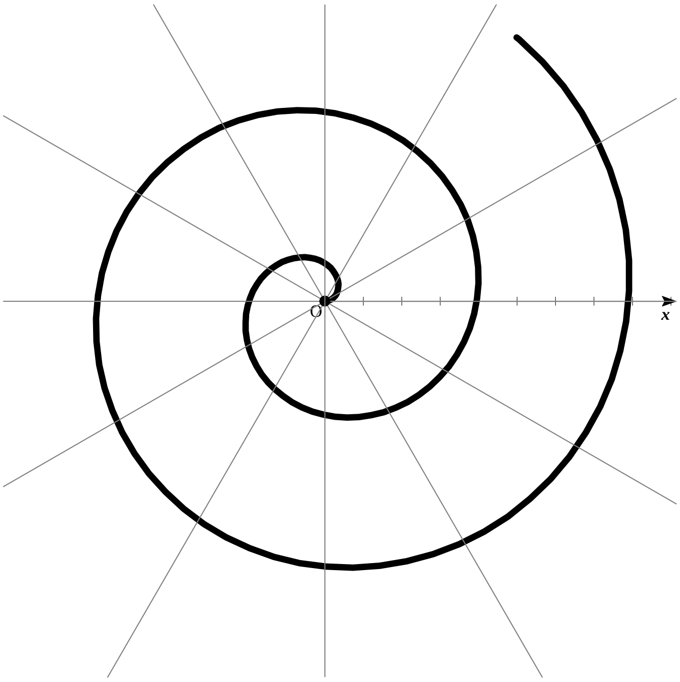
授業者：筑波大学大学院教育研究科　石井寿一

1、前回の復習

アルキメデス螺線とは

「もし直線が平面に引かれ、その一端が固定されたまま、その直線が一様な速さで何回か回転して、それが出発した位置に再び戻ってくるとし、そして直線が回転すると同時に、ある点が固定された端点から、その直線上を一様な速さで運動するならば、その点は平面上に螺線を描くであろう。」　（『螺線について』定義１）

と定義される以下のような曲線であった。



この曲線は定義より

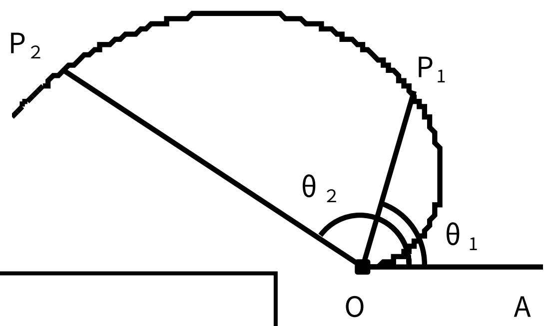
回転した角度と、直線上を運動した距離の比は一定

という性質を持つ。つまり、

O を螺線の原点、OA を回転の原線とし、P_1、P_2は螺線上の点。

$OP_1=r_1$、$OP_2=r_2$、

$\angle AOP_1=\theta_1$、$\angle AOP_2=\theta_2$

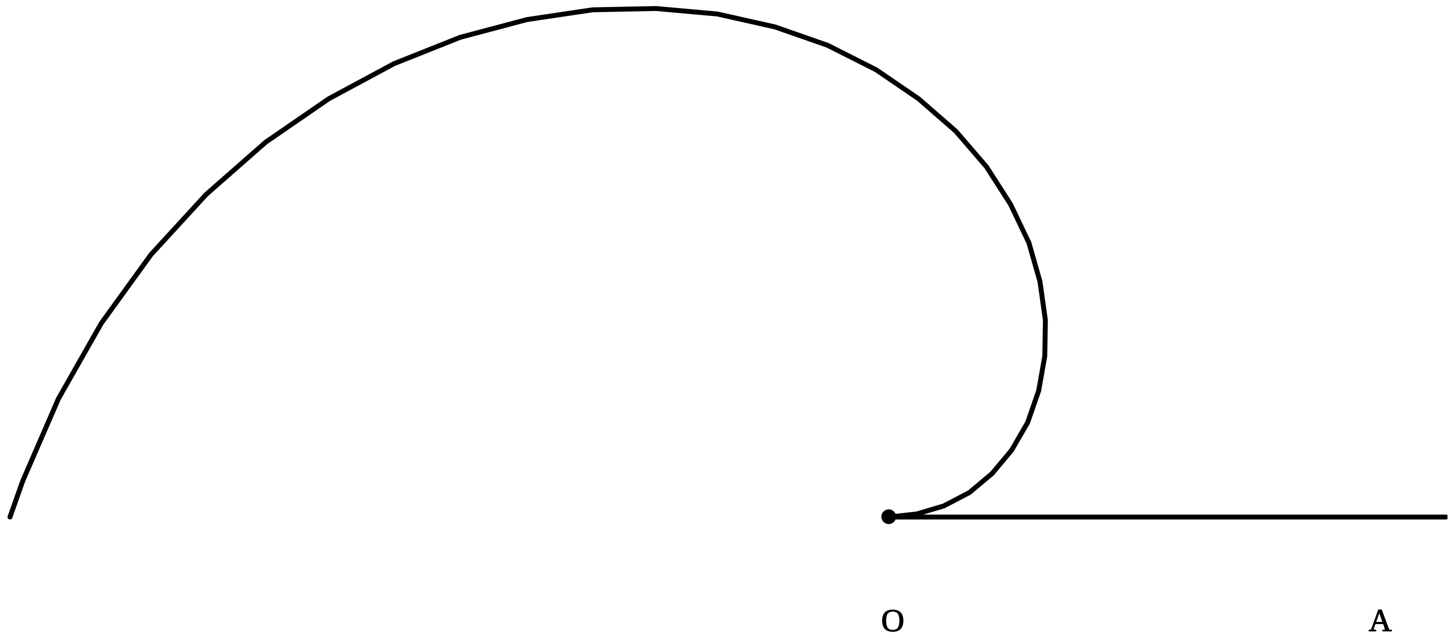


とすると、$r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$の関係は

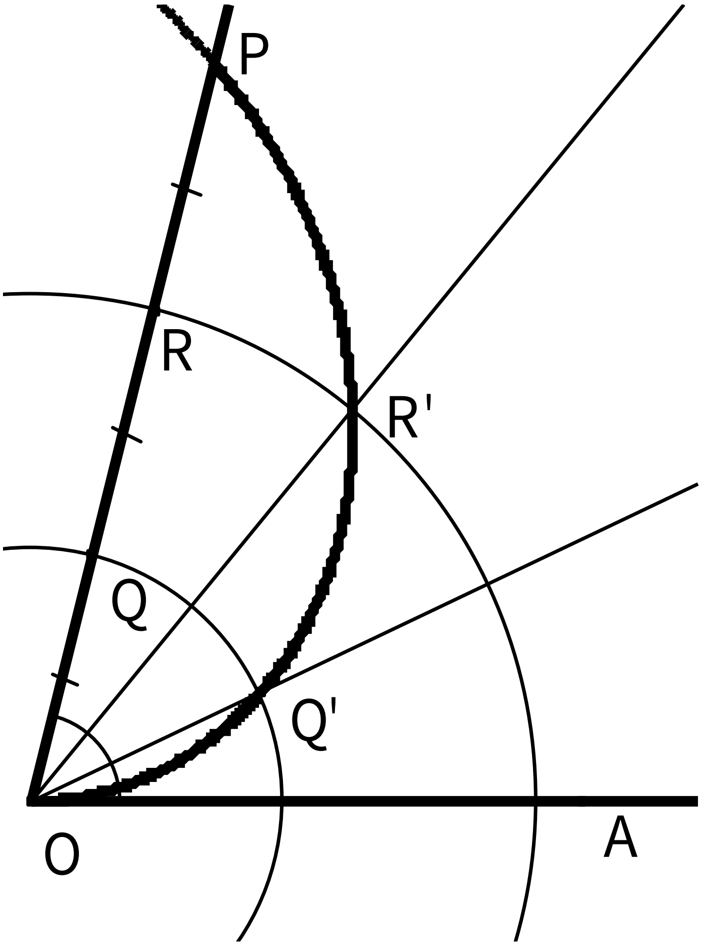
2、アルキメデス螺線による角の３等分線の作図

問、点Ｏは螺線の原点、直線ＯＡは螺線の原線。点Ｏを頂点とする角を作成し、その角を３等分しよう。その際、直線ＯＡが角を構成する１辺となるように作成すること。

※角を構成するもう１つの辺は、螺線と交点を持つように描いてください。



角の３等分線作図の手順



1、任意の角の頂点を螺線の原点Ｏに、角をはさむ直線の１つを螺線の原線にあわせる。

2、もう１つの直線と螺線との交点をＰとおき､線分ＯＰを３等分し、それぞれの点をＱ，Ｒとする。

3、Ｏを中心とし、半径をＯＱ、ＯＲとした円を描く。これらの円と螺線との交点をそれぞれＱ’、Ｒ’とする。

4、Ｑ'、Ｒ’とＯとを結ぶ。この直線が角の３等分線である。

《証明》

∠ＡＯＰ ＝ θ、ＯＰ ＝ ｒ　とすると

ＯＱ ＝ ＯＱ' ＝ $\boxed{}$

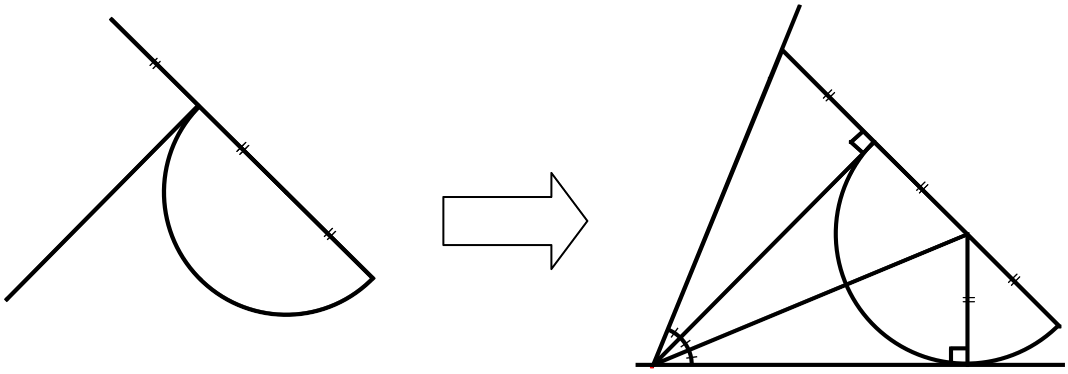
∠ＡＯＱ’＝ θ_1とおくと、螺線の性質より

これ以降は自分で示してみよう。

参考

実は、アルキメデスが螺線を研究するより前から角を３等分する道具や曲線は存在していた。その例の一つがこれ。

【ソフィストの三等分規】



アルキメデスは角の３等分を解決するために螺線を研究したのではなく、円積問題を解決しようとして研究していた。

3、螺線の接線

　アルキメデスは「螺線の接線」というものを考えました。

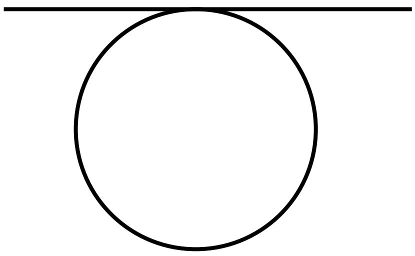
ちなみに「円の接線」の定義は

　　　「円と会し延長されて円を切らない直線は円に接するといわれる。」

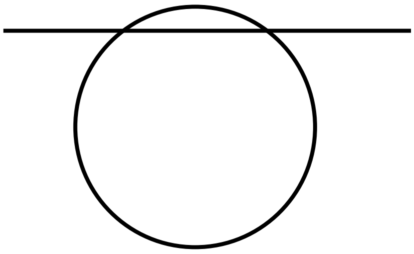
（ユークリッド原論 第３巻 定義２）

つまり、

接線



接線ではない



『螺線について』　命題１３

ιγʹ.

Εἴ κα εὐθεῖα γραμμὰ τᾶς ἕλικος ἐπιψαύῃ, καθ' ἓν μόνον ἐπιψαύσει σαμεῖον.

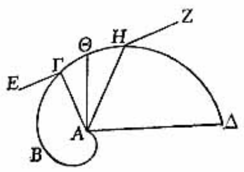


Fig. 11

῎Εστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς τὰ Α, Β, Γ, Δ, ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἕλικος τὸ Α σαμεῖον, ἀρχὰ δὲ τᾶς περιφορᾶς ἁ ΑΔ εὐθεῖα, καὶ ἐπιψαυέτω τᾶς ἕλικος εὐθεῖά τις ἁ ΖΕ. Φαμὶ δὴ καθ' ἓν μόνον σαμεῖον ἐπιψαύειν αὐτᾶς.

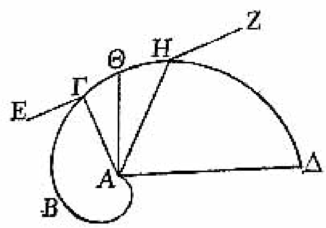
᾿Επιψαυέτω γάρ, εἰ δυνατόν, κατὰ δύο σαμεῖα τὰ Γ, Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΑΗ, καὶ ἁ γωνία δίχα τετμάσθω ἁ περιεχομένα ὑπὸ τᾶν ΑΗ, ΑΓ, καθ' ὃ δὲ σαμεῖον ἁ δίχα τέμνουσα τὰν γωνίαν τᾷ ἕλικι ποτιπίπτει, ἔστω τὸ Θ. Τῷ δὴ ἴσῳ ὑπερέχει ἅ τε ΑΗ τᾶς ΑΘ καὶ ἁ ΑΘ τᾶς ΑΓ, ἐπειδὴ ἴσας γωνίας περιέχοντι ποτ' ἀλλάλας· ὥστε διπλάσιαί ἐντι αἱ ΑΗ, ΑΓ τᾶς ΑΘ. ᾿Αλλὰ τᾶς ἐν τῷ τριγώνῳ [τᾶς ΑΘ] δίχα τεμνούσας τὰν γωνίαν μείζονές ἐντι ἢ διπλάσιαι· δῆλον οὖν ὅτι, καθ' ὃ συμπίπτει σαμεῖον τᾷ ΓΗ εὐθείᾳ ἁ ΑΘ, μεταξὺ τῶν Θ, Α ἐντὶ σαμείων· τέμνει ἄρα ἁ ΕΖ τὰν ἕλικα, ἐπειδή τι τῶν ἐν τᾷ ΓΘΗ σαμείων ἐντός ἐστι τᾶς ἕλικος. ῾Υπέκειτο δὲ ἐπιψαύουσα· καθ' ἓν ἄρα μόνον ἅπτεται ἁ ΕΖ τᾶς ἕλικος.

　もし直線が螺線に接するならば、それは唯一点で接するであろう。

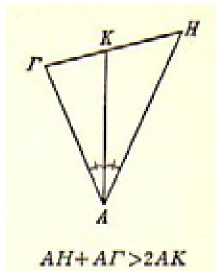
【ギモン】　「接する」ってことは、「接点は一つ」ってことではないの？

この命題は　　　　　法で証明されている。

　なぜなら、もし可能なら２点Γ、Hで接するとせよ。そして、AΓ、AHがひかれ、AH、AΓに挟まれた角が２等分されたとせよ。そして、その角を２等分する直線が、螺線と出会う点をΘとせよ。するとAHはAΘを、AΘは ①　　 を等しいだけ凌駕する。なぜなら、それらは互いに等しい角を挟むから。したがって、AHとAΓ（の和）は ②　　　 の２倍である。ところで、<u>三角形（ΓAH）において角（ΓAH）を２等分する線分の２倍よりも、（AHとAΓの和は）大きい</u>。そこで、AΘが直線ΓHと交わる点は、２点Θ、Aの間にある。ゆえに、EZはその螺線と交わる。なぜなら、ΓΘH上の点のあるものは、その螺線の内側にあるから。ところでEZは接線であると仮定されていた。ゆえに、EZは、螺線に唯一点で接する。



※ 下線部は右図を参照。



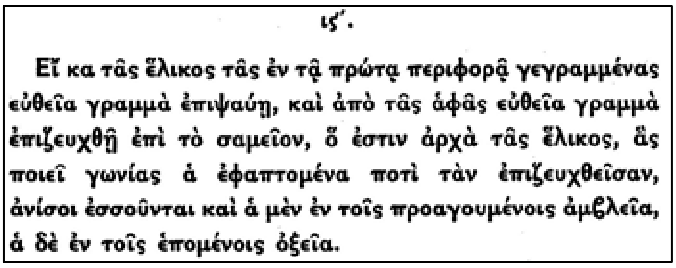
問

１、①と②を埋めて証明を完成させよう。

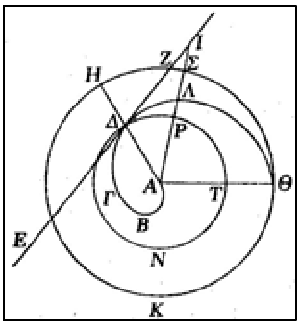
２、この証明で仮定している部分はどこですか。

３、仮定により生じる矛盾はどの部分ですか。

『螺線について』　命題１６


ιϛʹ.

Εἴ κα τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γεγραμμένας εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιψαύῃ, καὶ ἀπὸ τᾶς ἁφᾶς εὐθεῖα γραμμὰ ἐπιζευχθῇ ἐπὶ τὸ σαμεῖον, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἅς ποιεῖ γωνίας ἁ ἐφαπτομένα ποτὶ τὰν ἐπιζευχθεῖσαν, ἀνίσοι ἐσσοῦνται καὶ ἁ μὲν ἐν τοῖς προαγουμένοις ἀμβλεῖα, ἁ δὲ ἐν τοῖς ἑπομένοις ὀξεῖα.



もし直線が、第１回転で描かれた螺線に接し、その接点から直線が螺線の原点である点までひかれるならば、接線が引かれた直線とつくる（二つの）角は等しくなくて、前方にある角は鈍角になり、後方にある角は鋭角になるであろう。

つまり

上図では ① が鈍角で、 ② が鋭角となる。