1 時間目資料

授業資料

古代の難問と曲線

2 年　　組　　番　氏名

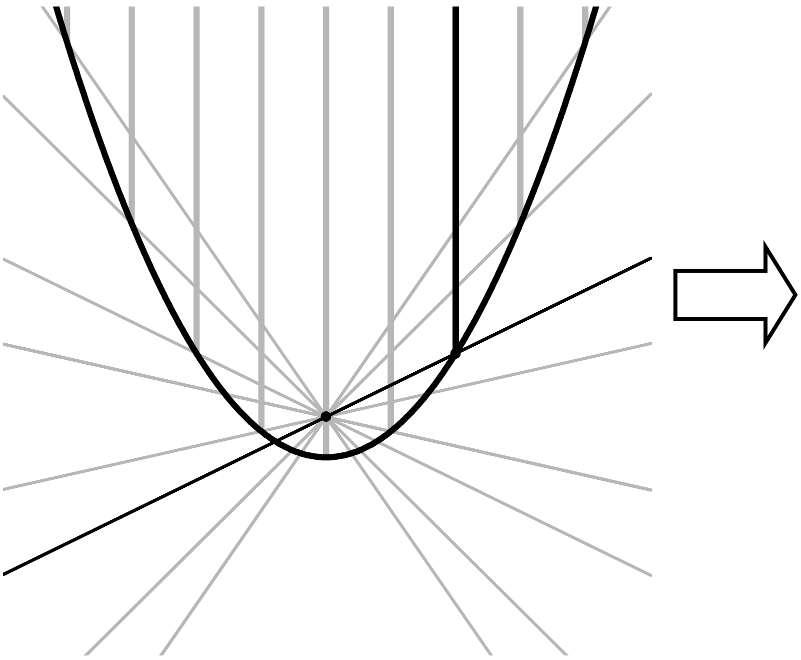
授業者：筑波大学大学院教育研究科　石井寿一

1、はじめに

高速道路などで見られるきれいなカーブ、もちろんいい加減に設計したカーブではありません。これはクロソイド曲線といって、一定速度を保ちながら徐々にハンドルを切っていくとこのようなカーブになります。ドライバーの安全を考えて設計されたものです。

みなさんもこれまでにいくつか曲線について学んできたと思います。例えば放物線、サインカーブ、コサインカーブ。放物線は、軸に平行な線は反射すると全て焦点と呼ばれる点を通る性質を持っています。パラボラアンテナはこの性質を利用したものです。また、三角関数の和の形をした級数（フーリエ級数と呼ばれる）を使うと、複雑な周期運動などを表すことができるので、振動や波動の研究に役立ちます。

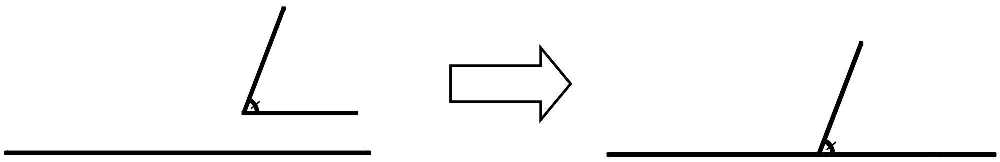
このように、曲線の持つ性質を応用して何かを作ったり、別の問題を解決したりできるのです。この授業では特別な曲線を通して、昔の数学に触れながら古代の数学の難問に挑んでいきましょう。



問、　定木とコンパスだけで、これできますか？

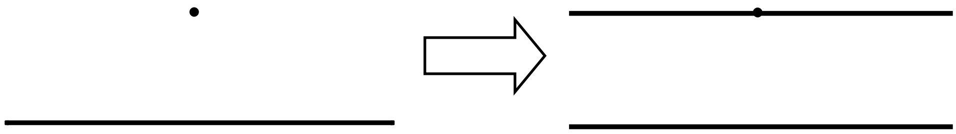
a）与えられた直線上に、その上の点において与えられた角に等しい角を作ること

（　　できる！　　　　　　　できない。　　）



b）与えられた点を通り、与えられた直線に平行線をひくこと

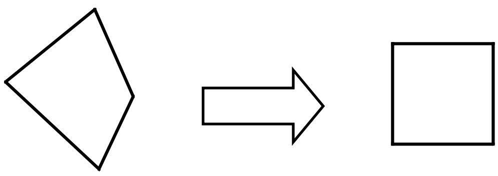
（　　できる！　　　　　　　できない。　　）



c）与えられた直線図形に等しい面積の正方形を作ること

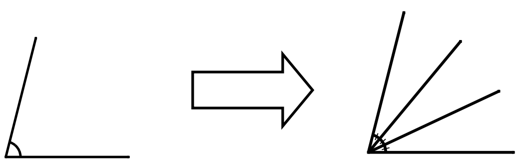
※「直線図形」とは…線分に囲まれた図形のこと。

（　　できる　　　　　　　できない　　）



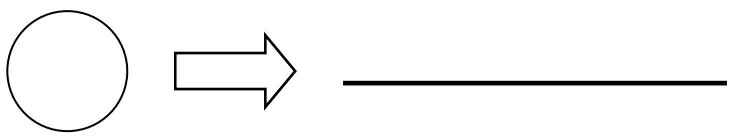
d）与えられた角を三等分すること

（　　できる！　　　　　　　できない。　　）



e）与えられた円の円周に等しい長さの直線をつくること

（　　できる！　　　　　　　できない。　　）



2、ユークリッドと「原論」

● ユークリッド（Ｅｕｃｌｉｄ）

・紀元前 365 年～紀元前 275 年

・古代ギリシアの数学者、天文学者。

・「ユークリッド原論」の著者

● ユークリッド原論

『原論』は全部で 13 巻から構成され、467 もの命題を含んでいるので、我々はこの本から、ギリシア古典期の初歩的な数学的知識を全て見出すことができる。この中では結論を一連の命題（証明すべき「定理」と、直線定木とコンパスだけを用いて作図できる「問題」）として提示している。

ユークリッド原論の中で、問ａ）、ｂ）、ｃ）は作図が示されている。

ａ）は第１巻命題２３

ｂ）は第１巻命題３１

ｃ）は第２巻命題１４

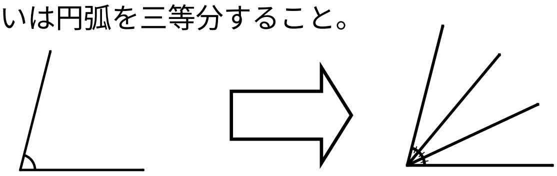
（参考として後ろに付けておきます。）

3、古代ギリシア時代と数学

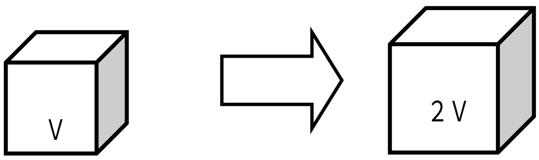
この授業では古代ギリシアの数学にスポットを当てます。まず当時の数学がどのようなものだったかを考えていこう。

ソフィストたちの研究では次の有名な 3 問題がその焦点となったが、どれもみな定木とコンパスだけを使用して作図する問題であった。

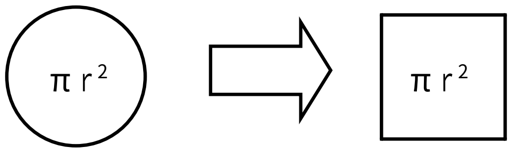
(1)任意の角あるいは円弧を三等分すること。



(2)立方体の倍積問題。すなわち、与えられた立方体の 2 倍の体積を有する立方体を作ること。



(3)円積問題。すなわち、与えられた円の面積と、まったく等しい面積を有する正方形を作ること。



およそ数学の問題のなかで、これらの 3 問題ほど、長いあいだ熱心に根気よく論究されたものはないであろう。ギリシア人の最高の知力はこれに傾けられ、文芸復興時代の最大の数学者たちもこの問題に取り組んだ。教養あるなしに関わらず、賢者、奇人を問わず、いろいろの人々がこれらの問題を征服しようとした。時代の知能をしぼって試みられたが、回答を得るに至らなかった。ついにこれらの問題は、ギリシア人の設けた作図の約束に束縛されるかぎりでは、どうしても解くことができないだろうというように考えられてきた。この予想は、後になって厳密な証明を得て、確証された。

（小倉金之助補訳　カジョリ初等数学史　より）

※ソフィスト…ギリシア時代に登場した職業教師。教授に対して報酬を受け取った。彼らは主として修辞学を教えたのであるが、そのほかに哲学、数学および天文学も教授した。

4、アルキメデスの業績

●アルキメデス（BC287 年～BC212 年）

・アレクサンドリアで数年学んだ後出生地であるシラクサに戻り終生故郷で過ごした。

・数学だけでなく、天文学、流体力学、機械学、工学一般など幅広い分野に関心を持っていた。

・主な著作『円の計測』『球と円柱について』『螺線について』

●『螺線について』

アルキメデスが研究した曲線「アルキメデス螺線」について述べられている。７つの定義と２８の命題からなる。この授業のメインテーマ。

5、アルキメデス螺線の定義

原典：アルキメデス著『螺線について』より

『螺線について』　定義１～７

ΟΡΟΙ

α′. Εἴ κα εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ καὶ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος αὐτᾶς ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ὁσακισοῦν ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾷ γραμμᾷ περιαγομένᾳ φέρηταί τι σαμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαμεῖον ἕλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

β′. Καλείσθω οὖν τὸ μὲν πέρας τᾶς εὐθείας τὸ μένον περιαγομένας αὐτᾶς ἀρχὰ τᾶς ἕλικος.

γ′. Ἁ δὲ θέσις τᾶς γραμμᾶς, ἀφ᾽ ἇς ἄρξατο ἁ εὐθεῖα περιφέρεσθαι, ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς.

δ′. Εὐθεῖα, ἃν μὲν ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ διαπορευθῇ τὸ σαμεῖον τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, πρώτα καλείσθω, ἃν δ᾽ ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ τὸ αὐτὸ σαμεῖον διανύσῃ, δευτέρα, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως ταύταις ὁμωνύμως ταῖς περιφοραῖς καλείσθωσαν.

ε′. Τὸ δὲ χωρίον τὸ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ πρώτᾳ περιφορᾷ γραφείσας καὶ τᾶς εὐθείας, ἅ ἐστιν πρώτα, πρῶτον καλείσθω, τὸ δὲ περιλαφθὲν ὑπό τε τᾶς ἕλικος τᾶς ἐν τᾷ δευτέρᾳ περιφορᾷ γραφείσας καὶ τᾶς εὐθείας τᾶς δευτέρας δεύτερον καλείσθω, καὶ τὰ ἄλλα ἑξῆς οὕτω καλείσθω.

ϛ. Καὶ εἴ κα ἀπὸ τοῦ σαμείου, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, ἀχθῇ τις εὐθεῖα γραμμά, τᾶς εὐθείας ταύτας τὰ ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐφ᾽ ἅ κα ἁ περιφορὰ γένηται, προαγουμένα καλείσθω, τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα ἑπομένα.

ζ′. Ὅ τε γραφεὶς κύκλος κέντρῳ μὲν τῷ σαμείῳ, ὅ ἐστιν ἀρχὰ τᾶς ἕλικος, διαστήματι δὲ τᾷ εὐθείᾳ, ἅ ἐστιν πρώτα, πρῶτος καλείσθω, ὁ δὲ γραφεὶς κέντρῳ μὲν τῷ αὐτῷ, διαστήματι δὲ τᾷ διπλασίᾳ εὐθείᾳ δεύτερος καλείσθω, καὶ οἱ ἄλλοι δὲ ἑξῆς τούτοις τὸν αὐτὸν τρόπον.

（「Ａｒｃｈｉｍｅｄｅ」２巻より）

《日本語訳》

定義

1、もし直線が平面に引かれ、その一端が固定されたまま、その直線が一様な速さで何回か回転して、それが出発した位置に再び戻ってくるとし、そして直線が回転すると同時に、ある点が固定された端点から、その直線上を一様な速さで運動するならば、その点は平面上に螺線を描くであろう。

2、それから、直線が回転しているときに固定されている直線の端点が、螺線の原点と呼ばれるとせよ。

3、そして、直線が回転を始めた線の位置が、回転の原線と呼ばれるとせよ。

4、直線に沿って動く点が、第１回転の間に通過する線分が第１線分と呼ばれ、その同じ点が、第２回転の間に通過する線分が第２線分と呼ばれ、以下同様に、回転数に従って呼ばれるとせよ。

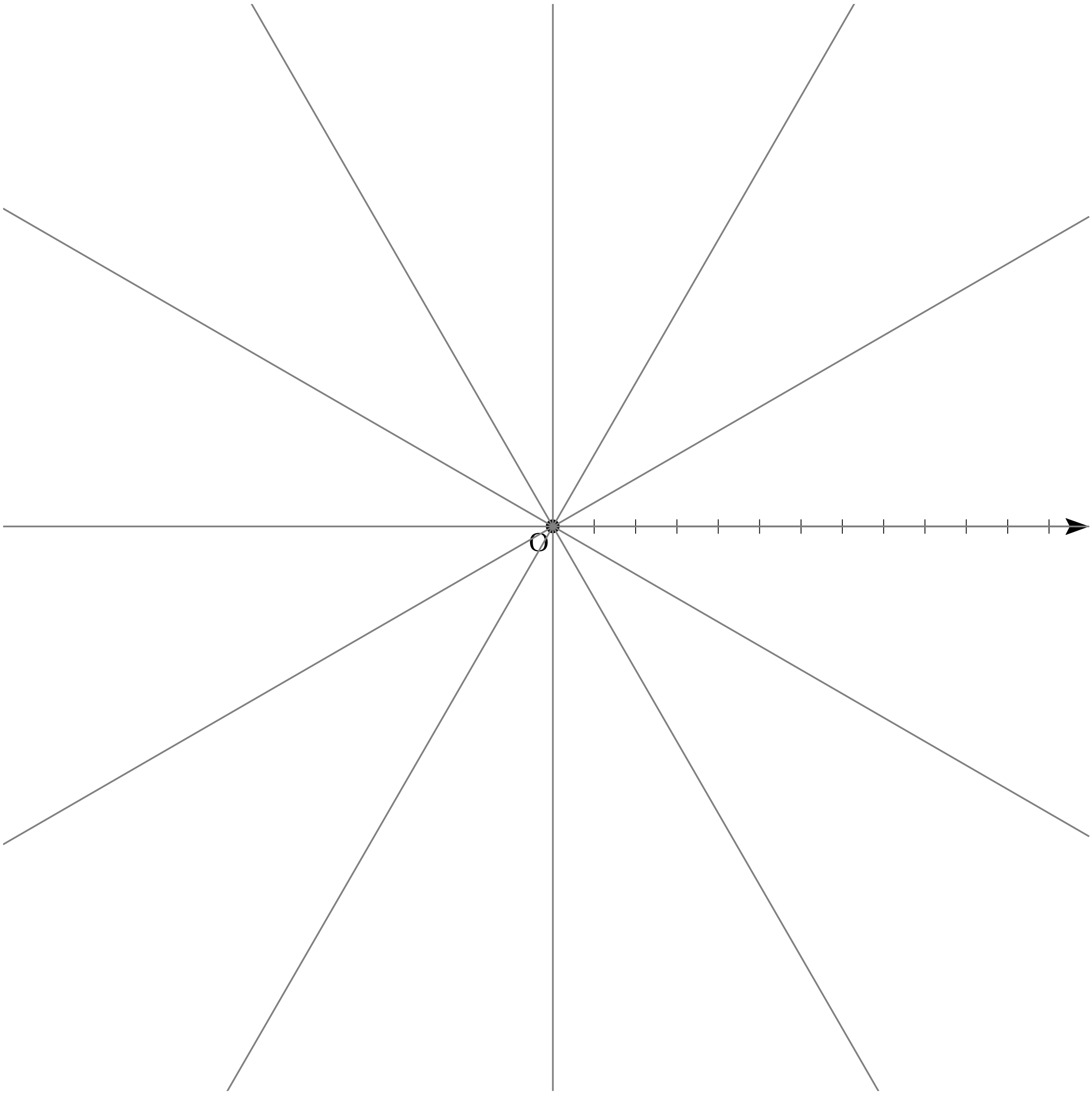
5、第１回転で描かれた螺線と、第１線分によって囲まれた面積が第１面積と呼ばれ、第２回転で描かれた螺線と、第２線分によって囲まれた面積が第２面積と呼ばれ、以下同様に呼ばれるとせよ。

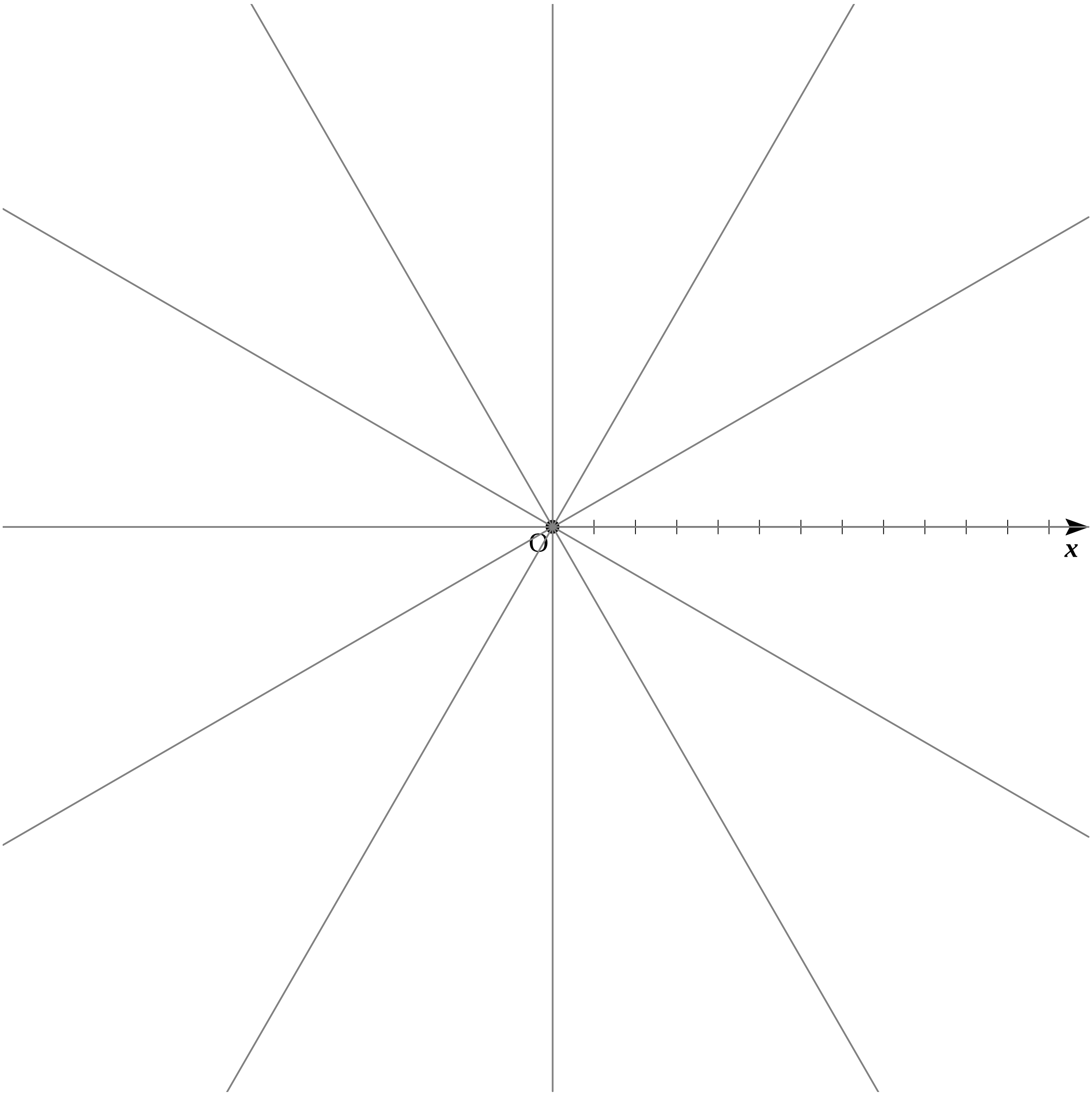
6、もし螺線の原点である点から、ある直線が引かれると、回転が生じるのと同じ側にある方が前方と呼ばれ、他の側にある方が後方と呼ばれるとせよ。

7、螺線の原点である点を中心とし、第１線分を半径として描かれた円が、第１円と呼ばれ、同じ点を中心とし、２倍の半径で描かれた円が、第２円と呼ばれ、以下同様にこのように呼ばれるとせよ。

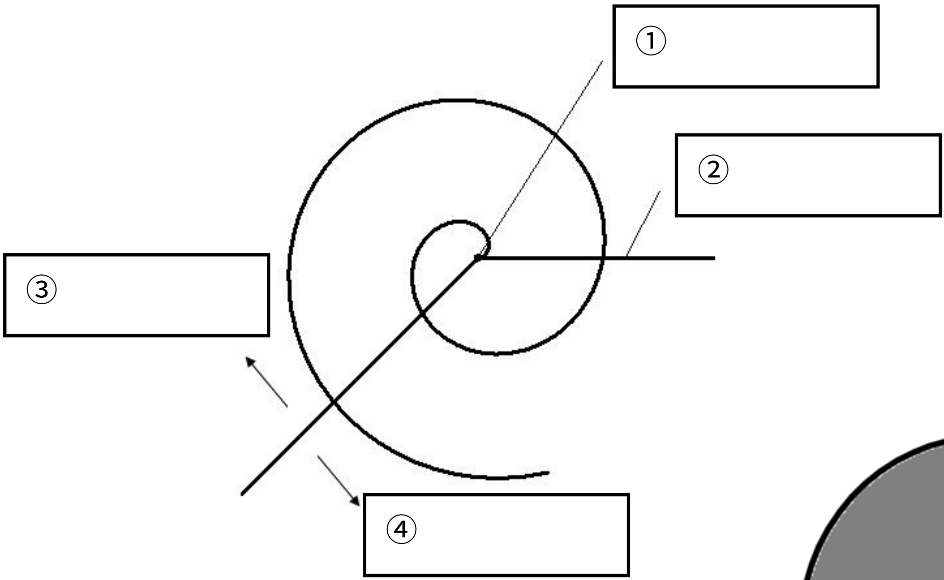
（「数学の歴史Ｉ　ギリシャの数学」共立出版　より）

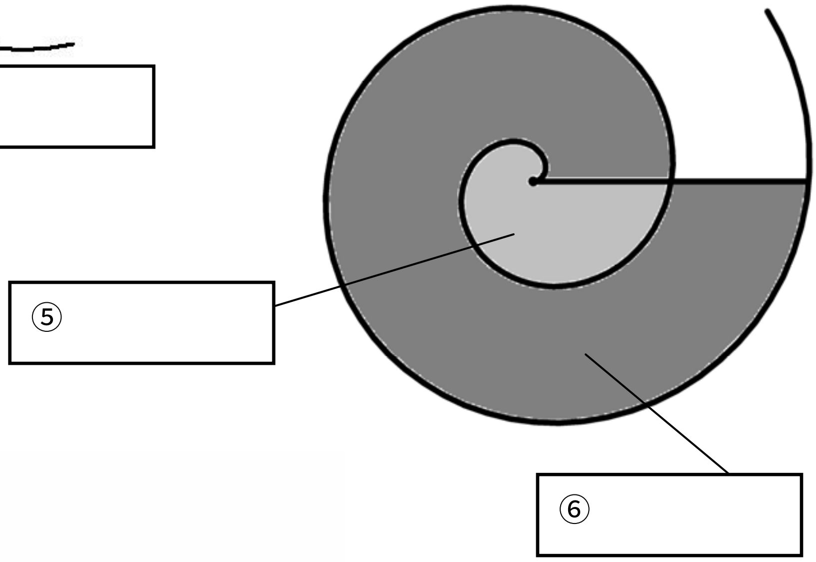
問、定義 1 にしたがってアルキメデス螺線の概形を描いてみよう。

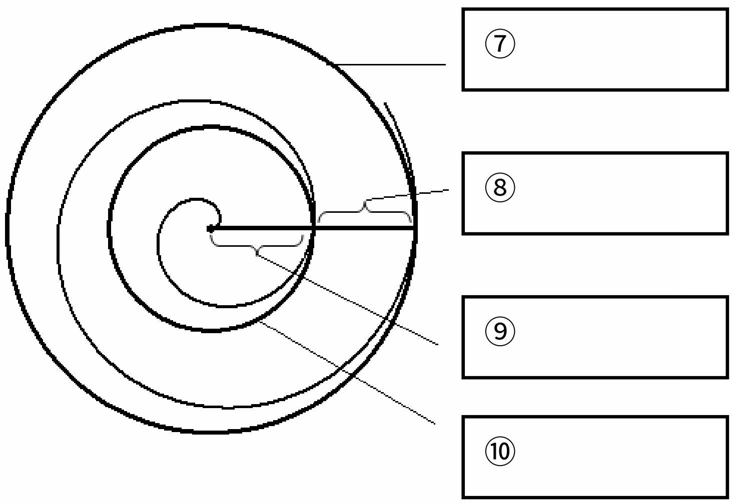



O
x

問、定義２～７で定められた螺線の各名称を当てはめてみよう。





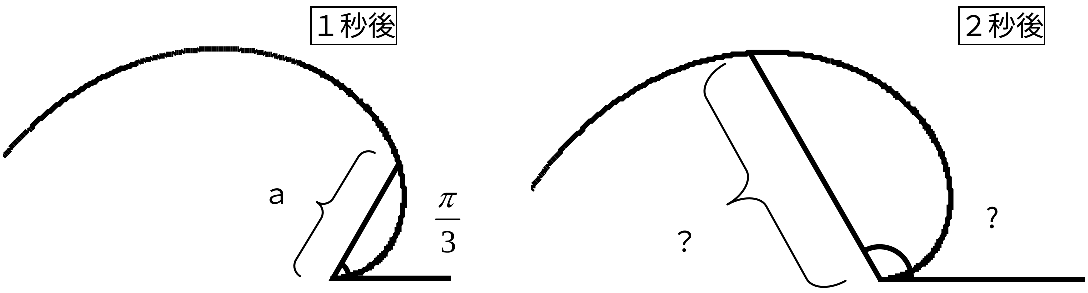


6、アルキメデス螺線の性質

再び定義１より

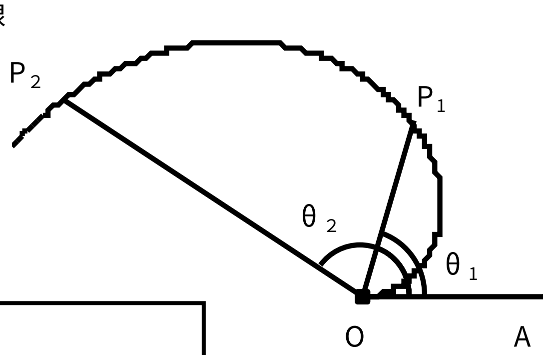
「もし直線が平面に引かれ、その一端が固定されたまま、その直線が一様な速さで何回か回転して、それが出発した位置に再び戻ってくるとし、そして直線が回転すると同時に、ある点が固定された端点から、その直線上を一様な速さで運動するならば、その点は平面上に螺線を描くであろう。」

例えば、１秒間で直線が$\frac{\pi}{3}$だけ回転し、ある点が端点から直線上を距離ａだけ移動するならば、２秒間では直線が$\boxed{}$ だけ回転し、ある点は端点から直線上を距離 $\boxed{}$だけ移動する。



回転した角度と、直線上を運動した距離は、回転時間に比例。
回転した角度と、直線上を運動した距離の比は一定。

点Ｏを螺線の原点、線分ＯＡを回転の原線とし、P_1、P_2は螺線上の点。
$OP_1=r_1$、$OP_2=r_2$、
$\angle AOP_1=\theta_1$、$\angle AOP_2=\theta_2$



とすると、$r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$の関係は

$\boxed{}$

と表すことができる。

『螺線について』　命題１２

ιβ'.

Εἴ κα ποτὶ τὰν ἕλικα τὰν ἐν μιᾷ περιφορᾷ ὁποιαοῦν γεγραμμέναν ἀπὸ τᾶς ἀρχᾶς τᾶς ἕλικος εὐθεῖαι ἐμπεσῶντι ὁποιαιοῦν ἴσας ποιοῦσαι γωνίας ποτ' ἀλλάλας, τῷ ἴσῳ ὑπερέχοντι ἀλλαλᾶν.

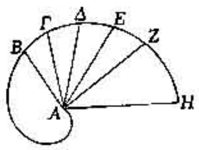


Fig. 10

Ἔστω ἕλιξ, ἐφ' ἇς αἱ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ ἴσας γωνίας ποιοῦσαι ποτ' ἀλλάλας. Δεικτέον ὅτι τῷ ἴσῳ ὑπερέχει ἁ ΑΓ τᾶς ΑΒ καὶ ἁ ΑΔ τᾶς ΑΓ καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως.

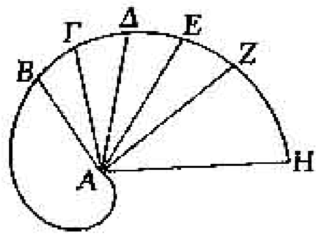
Ἐν ᾧ γὰρ χρόνῳ ἁ περιαγομένα γραμμὰ ἀπὸ τᾶς ΑΒ ἐπὶ τὰν ΑΓ ἀφικνεῖται, ἐν τούτῳ τῷ χρόνῳ τὸ σαμεῖον τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον τὰν ὑπεροχὰν διαπορεύεται, ᾇ ὑπερέχει ἁ ΓΑ τᾶς ΑΒ, ἐν ᾧ δὲ χρόνῳ ἀπὸ τᾶς ΑΓ ἐπὶ τὰν ΑΔ, ἐν τούτῳ διαπορεύεται τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ ΑΔ τᾶς ΑΓ. Ἐν ἴσῳ δὲ χρόνῳ ἁ περιαγομένα γραμμὰ ἀπό τε τᾶς ΑΒ ἐπὶ τὰν ΑΓ ἀφικνεῖται καὶ ἀπὸ τᾶς ΑΓ ἐπὶ τὰν ΑΔ, ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ἴσαι ἐντί· ἐν ἴσῳ ἄρα χρόνῳ τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον σαμεῖον διαπορεύεται τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ ΓΑ τᾶς ΑΒ, καὶ τὰν ὑπεροχάν, ᾇ ὑπερέχει ἁ ΑΔ τᾶς ΑΓ. Τῷ ἴσῳ ἄρα ὑπερέχει ἅ τε ΑΓ τᾶς ΑΒ καὶ ἁ ΑΔ τᾶς ΑΓ, καὶ αἱ λοιπαί.

もし任意の１回転で描かれた螺線に、その螺線の原点から、互いに等しい角をつくる任意個の線分が置かれるならば、それらは互いを等しいだけ凌駕する。

つまり、右図のような場合では

$\boxed{}$

ということ。

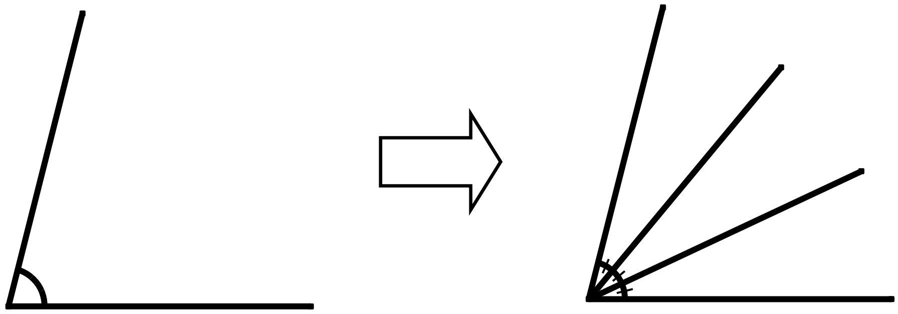


問、アルキメデスの証明を追って空欄を埋め、証明を完成させよう。

なぜなら、回転する線が、ＡＢからＡΓに達する時間に、その直線に沿って動く点は、ΓＡが ①＿＿ を凌駕する差を通過する。そして、ＡΓからＡΔに達する時間に、ＡΔが ②＿＿ を凌駕する差を通過する。ところで、角が等しいので、回転する線は、ＡＢからＡΓまでとＡΓから ③＿＿ までと、等しい時間で達する。したがって、その直線に沿って動く点は、ΓＡがＡＢを凌駕する差と、ＡΔが ④＿＿ を凌駕する差を、等しい時間で通過する。ゆえに、ＡΓはＡＢを、ＡΔはＡΓを、等しいだけ凌駕する。そして、残りも同様である。

7、角の３等分問題

任意の角あるいは円弧を三等分すること

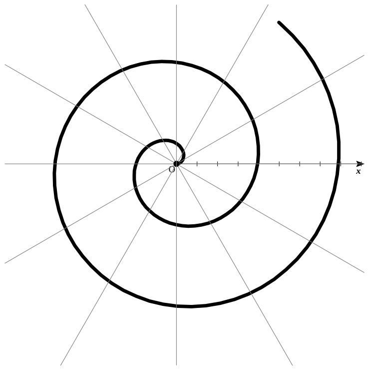


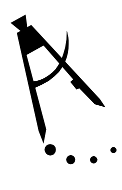
ギリシア人が直角以外の角を３等分する問題に出くわしたのは、疑いもなく、辺が９または９の倍数の正多角形を円に内接させようと企てたときであった。

（T･L･ヒース著　ギリシア数学史）

また、「角の２等分」「線分の２等分」「線分の３等分」は定木とコンパスのみで作図することが可能だったので、「角の３等分」もできるだろうと考えたのかもしれません。

しかし、アルキメデス螺線を使えば、あとは定木とコンパスだけで角を３等分することができます！

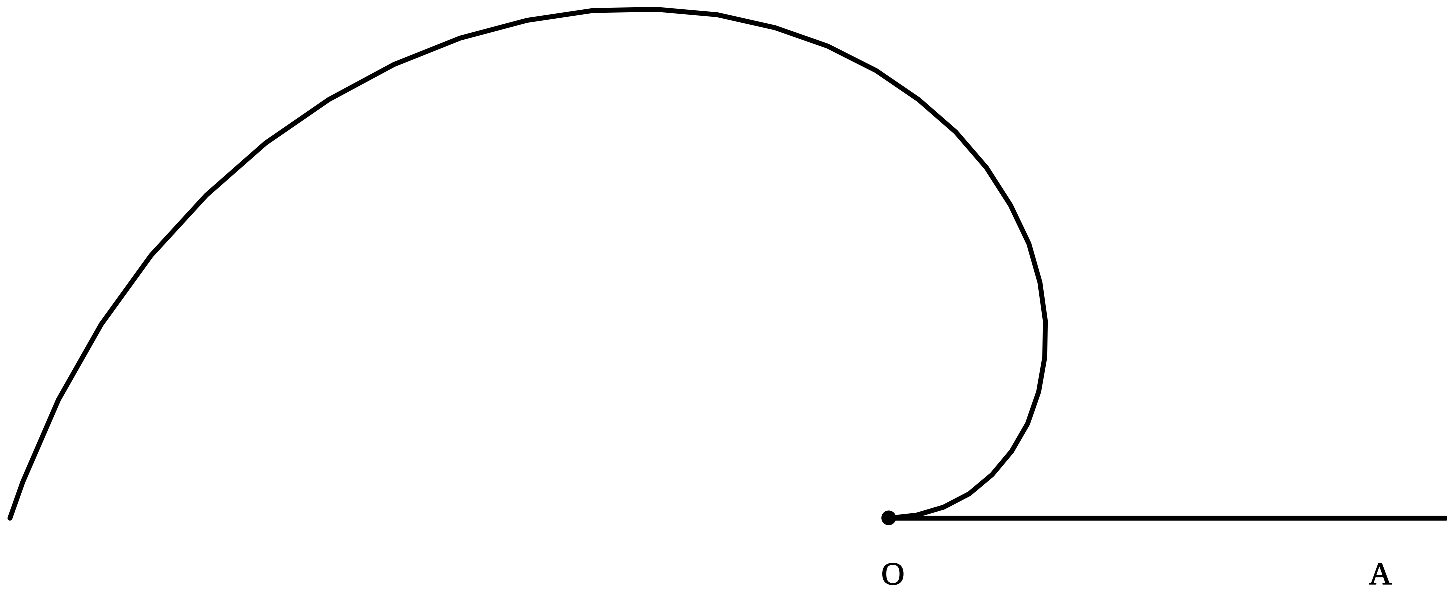




8、アルキメデス螺線による角の３等分線の作図

問、点Ｏは螺線の原点、直線ＯＡは螺線の原線。点Ｏを頂点とする角を作成し、その角を３等分しよう。その際、直線ＯＡが角を構成する１辺となるように作成すること。

※角を構成するもう１つの辺は、螺線と交点を持つように描いてください。



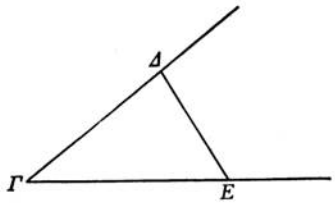
参考 ユークリッド原論

《第１巻　命題２３》

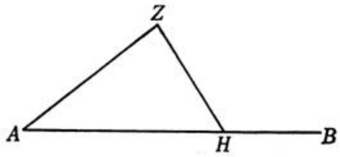
23

与えられた直線上にその上の点において与えられた直線角に等しい直線角をつくること。

与えられた直線を AB, その上の点を A, 与えられた直線角を角 $\Delta\Gamma E$ とせよ。このとき与えられた直線 AB 上にその上の点 A において与えられた直線角 $\Delta\Gamma E$ に等しい直線角をつくらねばならぬ。



$\Gamma\Delta$, ΓE の双方の上に任意の点 Δ, E がとられ, ΔE が結ばれたとせよ。そして3線分 $\Gamma\Delta$, ΔE, ΓE に等しい3線分から三角形 AZH がつくられ, $\Gamma\Delta$ は AZ に, ΓE は AH に, ΔE は ZH に等しくなるようにせよ。



そうすれば2辺 $\Delta\Gamma$, ΓE は2辺 ZA, AH にそれぞれ等しく, 底辺 ΔE は底辺 ZH に等しいから, 角 $\Delta\Gamma E$ は角 ZAH に等しい。

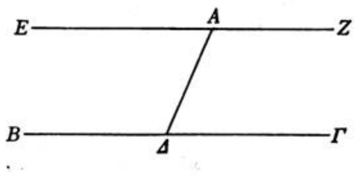
よって与えられた直線 AB 上にその上の点 A において与えられた直線角 $\Delta\Gamma E$ に等しい直線角 ZAH がつくられた。これが作図すべきものであった。

《第１巻　命題３１》

31

与えられた点を通り, 与えられた直線に平行線をひくこと。

与えられた点を A, 与えられた直線を $B\Gamma$ とせよ。このとき点 A を通り直線 $B\Gamma$ に平行線をひかねばならぬ。



$B\Gamma$ 上に任意の点 Δ がとられ, $A\Delta$ が結ばれたとせよ。そして直線 ΔA に対してその上の点 A において角 $A\Delta\Gamma$ に等しい角 ΔAE がつくられたとせよ。そして直線 AZ が EA と一直線をなして延長されたとせよ。

そうすれば直線 $A\Delta$ が2直線 $B\Gamma$, EZ に交わり錯角 $EA\Delta$, $A\Delta\Gamma$ を互いに等しくしたから, EAZ は $B\Gamma$ に平行である。

よって与えられた点 A を通り与えられた直線 $B\Gamma$ に平行な直線 EAZ がひかれた。これが作図すべきものであった。

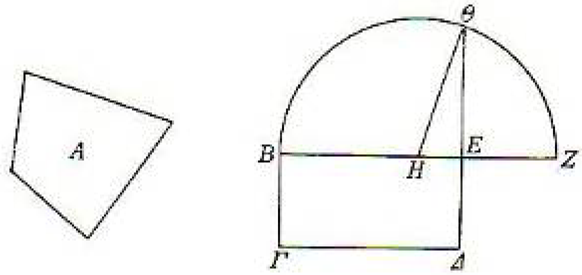
補足：ここでは錯角が等しいことが前提となっているが、前の命題ですでに証明されている。その証明は省略する。

《第２巻　命題１４》

14

与えられた直線図形に等しい正方形をつくること。

与えられた直線図形を A とせよ。このとき直線図形 A に等しい正方形をつくらねばならぬ。



直線図形 A に等しい直角平行四辺形 $B\Delta$ がつくられたとせよ。そうすればもし BE が $E\Delta$ に等しければ，命じられたことはなされたことになるであろう。なぜなら正方形 $B\Delta$ が直線図形 A に等しくつくられたから。もし等しくなければ，BE, $E\Delta$ の一方が大きい。BE が大きいとし，BE が Z まで延長され，EZ が $E\Delta$ に等しくされ，BZ が H で2等分され，H を中心とし，HB, HZ の一を半径として半円 $B\Theta Z$ が描かれ，ΔE が Θ まで延長され，$H\Theta$ が結ばれたとせよ。

そうすれば線分 BZ は H において等しい部分に，E において不等な部分に分けられたから，BE, EZ にかこまれた矩形と EH 上の正方形との和は HZ 上の正方形に等しい。そして HZ は $H\Theta$ に等しい。それゆえ矩形 BE, EZ と HE 上の正方形との和は $H\Theta$ 上の正方形に等しい。ところが ΘE, EH 上の正方形の和は $H\Theta$ 上の正方形に等しい。ゆえに矩形 BE, EZ と HE 上の正方形との和は ΘE, EH 上の正方形の和に等しい。双方から HE 上の正方形がひかれたとせよ。そうすれば残りの BE, EZ にかこまれた矩形は $E\Theta$ 上の正方形に等しい。ところが EZ は $E\Delta$ に等しいから，矩形 BE, EZ は $B\Delta$ である。それゆえ平行四辺形 $B\Delta$ は ΘE 上の正方形に等しい。そして $B\Delta$ は直線図形 A に等しい。ゆえに直線図形 A も $E\Theta$ 上に描かれた正方形に等しい。

よって与えられた直線図形 A に等しい正方形，すなわち $E\Theta$ 上に描かれうる正方形がつくられた。これが作図すべきものであった*)。

*) すなわち，$x^2=a\cdot b$ を満足する線分 x を求めることにほかならない.

補足：ここでは与えられた直線図形に等しい面積の直角平行四辺形(長方形)を作ることができることが前提だが、前の命題からそれが可能であることが示される。その証明は省略する。