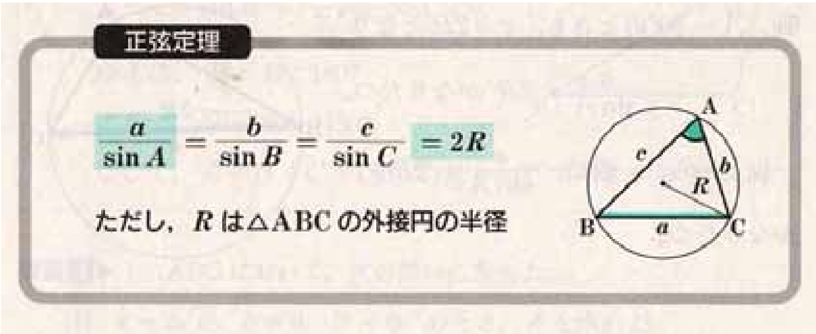
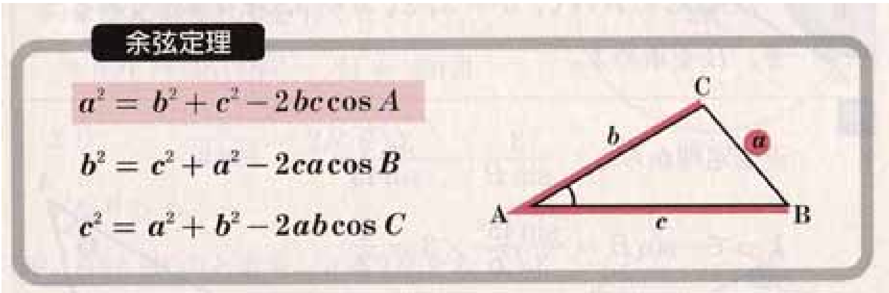
「球面上の数学」
授業資料（2 時間目）

～球面上の「三角比」～





埼玉県立春日部高等学校

２年______組______番

名前____________________

（授業者：筑波大学大学院教育研究科１年・中村稔）

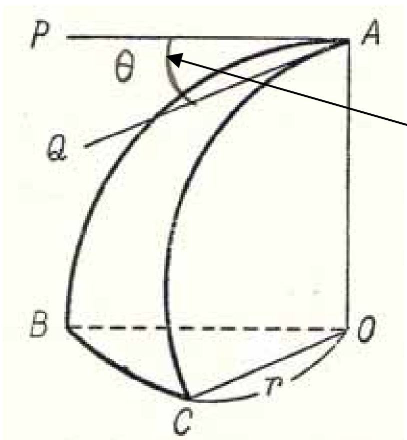
０、前回の復習

・“ 球面上の最短距離は大円上で考える。”
・同経度の２地点間の距離を求めた。
・“ 球面三角形は３つの大円の交わりから定義される。”
・（メネラウスの紹介）

１、球面上の「角」

角度について、『球面学』第１巻では以下のように定義している。

（定義）ＡＢ、ＡＣを大円の弧、Ａにおけるそれぞれの弧の接線ＡＰ、ＡＱを引く。そのとき∠ＰＡＱを∠A(＝∠BAC)とする。



この角を∠Ａと定義する。

半径ｒのとき、ＢＣ＝ $\boxed{}$ ＝ $\boxed{}$

２、球面上の「正弦・余弦定理」

「地球上のある２地点間の距離を求める」ための準備として、球面上の正弦定理・余弦定理が必要なので、始めにそれらを導こう。

授業では、余弦定理の証明のみを行います。正弦定理についてはテキストの最後に参考として証明を載せてあります。

◎単位球（＝半径１の球）面上の三角形について次が成り立つ。

《球面正弦定理》

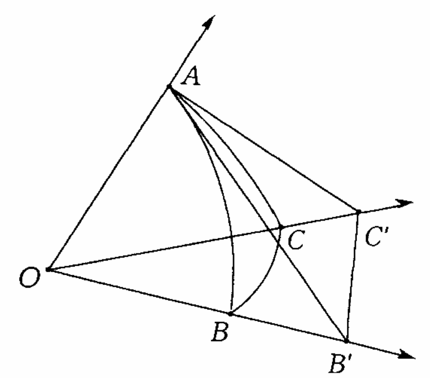
$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

《球面余弦定理》

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$
$$\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B$$
$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$$

平面の場合と比較してみてください。（表紙参照）

球面余弦定理の証明



　ＢＣ＝ａ、ＣＡ＝ｂ、ＡＢ＝ｃとする。
（ｂ、ｃが鋭角の場合を考える）
　左図のように、ＯＢの延長線と大円弧ＡＢのＡにおける接線との交点をＢ'、ＯＣの延長線と大円弧ＡＣのＡにおける接線との交点をＣ'とする。

平面三角形ＡＢ'Ｃ'について、平面余弦定理から

Ｂ'Ｃ'^{2}＝ $\boxed{}$ ･･･①

ただし、Ａ＝∠Ｂ'ＡＣ'

また、平面三角形ＯＢ'Ｃ'において、平面余弦定理から

Ｂ'Ｃ'^{2}＝ $\boxed{}$ ･･･②

ところで、∠ＢＯＣ＝ａ（＝１・ＢＣ）

①＝②より、

$\boxed{}$ ＝ $\boxed{}$

･･･③

さらに、平面三角形ＯＡＢ'について、三平方の定理から

$\boxed{}$ ･･･④

同様に、平面三角形ＯＡＣ'について、三平方の定理から

$\boxed{}$ ・・・⑤

④、⑤を③に代入して変形すると・・・

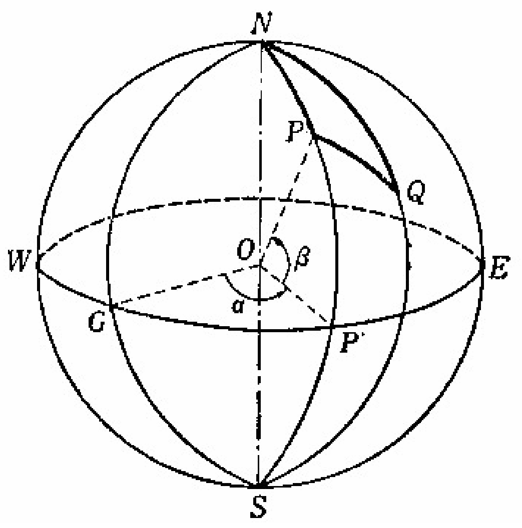
$\boxed{}$

３、球面幾何学の地理学への応用

ここでは、地球上のある２地点間の距離を求める。前回は同経度の２地点間の距離を求めたが、ここでは一般の２地点間の距離を計算してみよう。

＜ワークシート問題＞
東京､ロンドン間の距離を求めよ｡ただし､東京は東経 139°40′、北緯 35°40′に､ロンドンは西経 0°10′､北緯 51°30′にあるものとする。地球の半径は 6378km とする。円周率は 3.14 とする。

＊三角関数表はテキストの最後に載せてあります。



まず、**単位球**として考えてみましょう。
左図で、Ｐをロンドン、Ｑを東京、Ｎを北極とします。

地球儀を見ながら考えて見ましょう。

（1）ＮＰ，ＮＱを求めてください。（北緯を考えます）
（2）∠Ｎを求めてください。（東経、西経を考えます）
（3）ＰＱを求めてください。
（4）1°は何 km でしょうか。（地球の半径を使って求めてください）
（5）東京・ロンドン間の距離は？

参考

東京・大阪(東経 139°40′、北緯 35°40′)間
＝約 350km

東京・シドニー(東経１５１°１０′、南緯３３°５３′)間
＝約 7840km

東京・ニューヨーク(西経７３°５９′、北緯４０°４５′)間
＝約 10850km

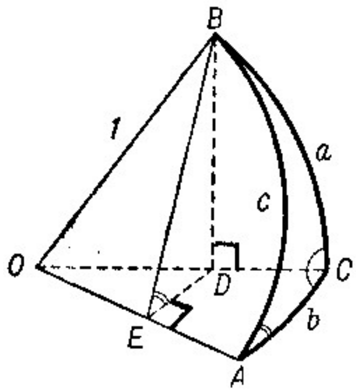
４、まとめ・次回予告

平面	球面
直線	大円
正弦定理・余弦定理 ・$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ ・$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$	
三角形の内角の和	
三角形の合同条件	

$\boxed{\text{参考}}$：球面上の「正弦定理」の証明

１、球面上の「正弦（サイン）」

まず、球面上の直角三角形を考える。



$C = \frac{\pi}{2}$ (=直角) とする。

$\sin A = \sin BED = \frac{BD}{BE}$ …①

また（角の）定義より

$\angle BOD = a$

$\angle BOE = c$

$\sin a = \sin\angle BOD = \frac{BD}{OB} = \frac{BD}{1} = BD$ …②

$\sin c = \sin\angle BOE = \frac{BE}{OB} = \frac{BE}{1} = BE$ …③

①、②、③より

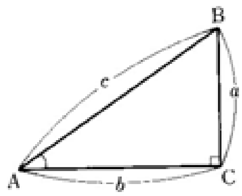
$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$　となる。

平面三角形の場合の正弦（サイン）は次のようであった。

右の図の直角三角形 ABC において，

$\sin A = \frac{a}{c}$,　$\cos A = \frac{b}{c}$

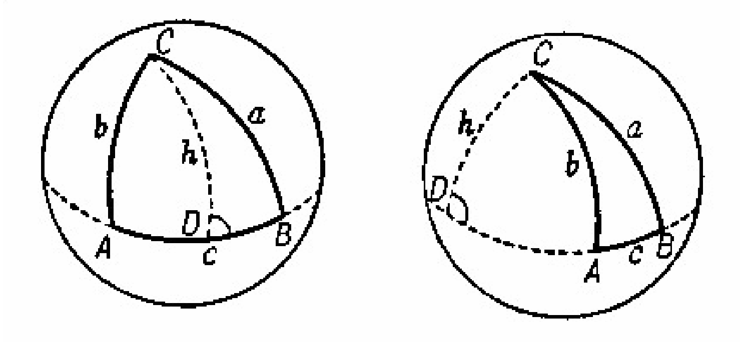
である。



（高等学校数学Ｉ、啓林館、１９９７）

２、球面上の「正弦定理」

球面上の「正弦（サイン)」を使って、球面上の「正弦定理」を求めてみよう。



球面三角形ＡＢＣの頂点Ｃからその対辺ＡＢまたはその延長と直交する大円の弧をＣＤとする。ＣＤ＝ｈとする。

球面三角形ＡＣＤにおいて、$\sin A = \dfrac{\sin h}{\sin b}$

$$\therefore \quad \sin h = \sin A \sin b \cdots ①$$

また、球面三角形ＤＢＣにおいて、

$$\sin B = \frac{\sin h}{\sin a}$$

$$\therefore \quad \sin h = \sin B \sin a \cdots ②$$

①、②より

$$\sin A \sin b = \sin B \sin a$$

$$\therefore \quad \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} \cdots ③$$

同様にして、$\dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C} \cdots ④$

③、④より　$\dfrac{\sin a}{\sin A} = \dfrac{\sin b}{\sin B} = \dfrac{\sin c}{\sin C}$　（証明終わり）