「球面上の数学」
授業資料（1 時間目）

～球面上の「直線」・「三角形」～

埼玉県立春日部高等学校

２年＿＿＿＿組＿＿＿＿番

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

（授業者：筑波大学大学院教育研究科１年・中村稔）

0、はじめに

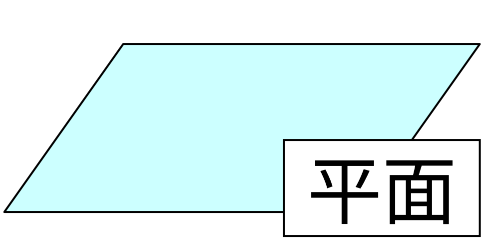
＜授業の目標＞

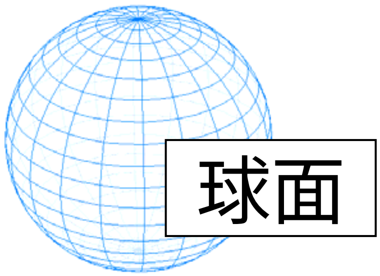
①「地球上のある 2 地点間の最短距離」を求める
②「三角形の合同条件」を検討する

これを地球儀上で考えてみたいと思います。

そのために、「**球面幾何学**」とよばれる学問が必要です。これは、地球儀のような「球の表面」で直線や三角形を考える、というものです。

「球面幾何学」は「平面幾何学」（みなさんが学校で習ってきた図形の内容）と似通った部分も多いです。もちろん、平面では成り立っても球面では成り立たない性質、またその逆の性質もあります。





「平面」と「球面」の似ているところ、違っているところ、平面の考え方が拡張されているところなどが、３時間の授業で分かっていただければと思っています。

1、球面上の「直線」

球面上の２点を結ぶ最短経路はどのような線になるでしょうか。

＜ワークシート問題①＞
世界地図（メルカトル図法）と地球儀を使って、東京とニューヨーク、東京とボゴタ（コロンビア）の最短経路を考えてみて下さい。

東京

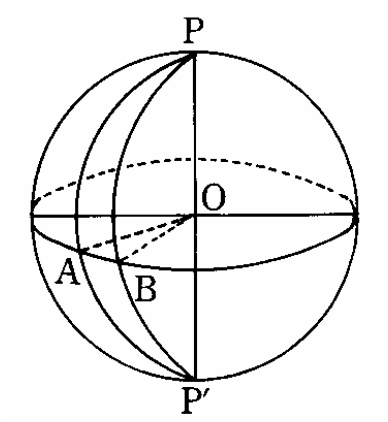
ニューヨーク

ボゴタ

『球面学』第１巻（メネラウス著）には、球面上の最短距離について次のように書かれています。

球の中心を通る平面と球面の交わりを**大円**という。

大円上の２点で、大円は２つの円弧に分かれ、小さい方の弧を２点間の**距離**と呼ぶ。



平面上の２点を結ぶ最短経路は、２点を結ぶ**直線**上で考えた。
球面上の２点を結ぶ最短距離は、２点を結ぶ（　　　　　）上で考える。

＜ワークシート問題②＞
（１） 赤道は大円か？
（２） 経線は大円か？
（３） 緯線は大円か？
地球儀を見て考えてみて下さい。

２、「地球上の 2 地点間の距離」を求める

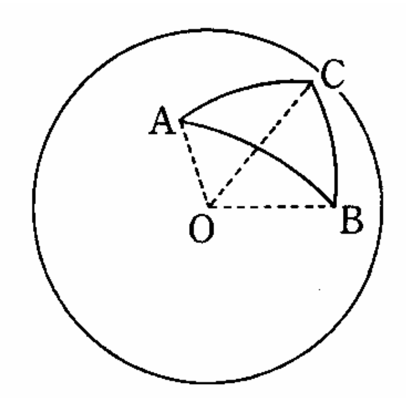
次回、「東京とロンドンの間の距離」を求めます。今日はその練習として、日本とパラオの間の距離を求めてみましょう。

＜ワークシート問題③＞
明石（日本）、コロール（パラオ）間の距離を求めよ。ただし、明石は東経 135°、北緯 35°に、コロールは東経 135°、北緯７°にあるものとする。地球の半径は 6378km とする。円周率は 3.14 とする。

３、球面上の「三角形」

メネラウスの『球面学』第１巻では、球面上の三角形（＝球面三角形）を次のように定義している。

（定義）３つの大円が交わってできる３つの円弧からなる図形を**球面三角形**という。

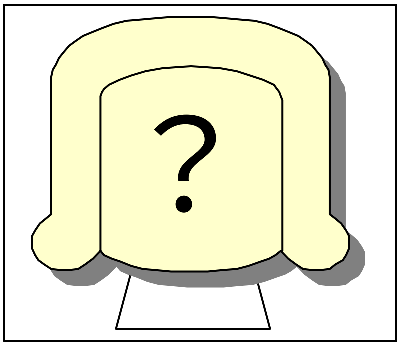


４、まとめ・次回予告

平面	球面
直線	
正弦定理・余弦定理	
三角形の内角の和	
三角形の合同条件	

次回、電卓を持ってきてください！！

$\boxed{\text{参考}}$：メネラウス（Menelaus）について



ギリシャの数学者・天文学者で、西暦１００年頃生きていた人。日本で言えば弥生時代の頃。

主な著作：**『球面学』**『円における弦について』『幾何学原理』

彼はその他にも数学や天文学に関する著作を残しているが、現在残っているのは『球面学』のアラビア語版だけである。他の作品については、メネラウスが「書いた」という事実しか分かっていない。また、彼は天体観測をやっていたことが分かっている。

『球面学』は３巻からなっていると言われています。

第１巻：球面上の図形（三角形や直線）について
第２巻：球面幾何学の天文現象への応用について
第３巻：有名な「メネラウスの定理」（横断線定理）について
書かれています。（コールマン（1970）「数学史」東京書籍より）

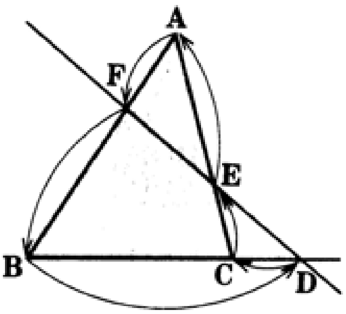
$\boxed{\text{参考}}$：メネラウスの定理・チェバの定理

　メネラウスの定理と似た定理で「チェバの定理」というのを習ったかと思います。

メネラウスの定理

△ABCの頂点を通らない直線が辺 BC，CA，AB またはその延長線と交わる点をそれぞれ D，E，F とするとき，次の式がなりたつ。

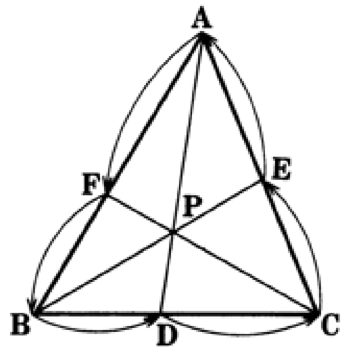
$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$



チェバの定理

1点 P と△ABC があり
直線 AP と辺 BC の交点を D
直線 BP と辺 CA の交点を E
直線 CP と辺 AB の交点を F
とするとき，次の式がなりたつ。

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$



（新版数学Ａ，実教出版，1999 より）

　チェバ（1647～1734）はイタリアの数学者で、『直線について』という書物のなかでチェバの定理に触れています。メネラウスとチェバでは時代が 1500 年以上も違うのに、同じような定理が発見されているのです。