中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.192-204、2006年3月

正弦・余弦定理の活用に関する授業研究

―平面・球面三角法の応用を通して―

筑波大学大学院修士課程教育研究科
中村　稔

章構成

要約

本研究では、球面三角法を中心にして、地球儀を用いた球面三角形の考察、球面上の距離計算を行う活動を取り入れた授業実践を行った。これにより生徒は三角法の有用性、また数学が具体的な事象の考察に活用できることを実感し、数学的な見方・考え方のよさを認識することができた。その結果、生徒たちの数学観の変容が見られた。

キーワード：球面三角法、有用性、数学的な見方・考え方

１．はじめに

高等学校学習指導要領（1999）では、数学Ⅰの内容（３）図形と計量において「直角三角形における三角比の意味、それを鈍角まで拡張する意義及び図形の計量の基本的な性質について理解し、角の大きさなどを用いた計量の考えの有用性を認識するとともに、それらを具体的な事象の考察に活用できるようにする。」とある。しかし、平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査報告書－高等学校数学数学Ⅰ－（2004、p.105）によれば、正弦定理と余弦定理の意味とその応用について、ふだんの生活や社会生活の中で役立つと思った生徒は 7.7％、役に立つと思わなかった生徒は 77.4％であり、生徒は数学的な見方や考え方のよさを十分認識していないと思われる。

青木（2001）は、「日本の学校教育の現状では、数学では理論だけを教えればよく、応用は理科や技術などの他教科の時間に扱えばよいという傾向がある。」と述べている。また、長崎（2001）は、「社会の問題を数学的に解釈し、さらに数学が解決したことを論理的に保証することを経験することによって、算数・数学は社会の進歩と安定に貢献しているという意識をもつことができるようになる。」と述べている。

高等学校学習指導要領（1999）には、地理Ａの内容（1）ア「球面上の世界と地域構成」という単元がある。筆者はこの単元の扱いについて、３社の教科書を調べた結果、３社とも等角・大圏航路、地図投影法についての説明はあり、距離と

方位の求め方について書かれている教科書も 1 社あったが、その数学的説明は為されていなかった。また、学習指導要領の内容の取り扱いでは「地図の投影法には深入りしないこと」（p.41）、高等学校学習指導要領解説地理歴史編（1999）には「各国の位置関係、方位については、…（中略）…作業的、体験的な学習の過程を通して…」（p.167）とある。この点から、他教科の時間に数学の応用があまり扱われていない現状がうかがえる。

本研究では、授業実施校の生徒が 1 年次で地理を全員履修しているという状況から、地理学・測地学の要素を含んだ数学の教材を用いた授業を行い、生徒の数学観の変容を図る。地図を用いた授業実践として、野沢・小林（2005）のヴィニョーラの天井画作図器と地図を題材にした授業が挙げられる。この研究では、主に地図投影法に関する授業実践の成果が述べられている。野沢・小林は、「本授業を通して、生徒は興味関心を持って活動し、数学が生活に関わっていることを理解できたと考えられる。また、数学観の変容を促すことができた。」と報告している。球面上の世界の数学を扱う活動を行うことで、生徒が三角法を「具体的な事象の考察への活用できる」ようになると考える。

以上を踏まえ、本研究では、球面三角法を題材とした授業を行い、生徒の数学観の変容を考察する。

２．研究目的・研究方法

（１）研究目的

地球儀を用いた球面三角形の考察、および地球儀上の距離計算を行う活動を通して、数学的な見方や考え方のよさを認識し、数学観の変容が授業内で達成することができるかを考察する。

上記の目的を達成するために、以下の課題を設定する。

課題１：地球儀を用いた球面三角形の考察、球面上の距離計算を行う活動を通して、数学が具体的な事象の考察に活用できることを実感できるか。

課題２：課題１を通して、数学的な見方や考え方のよさを認識することができるか。また、数学観の変容を促すことができたか。

（２）研究方法

球面三角法に関するテキストを作成し、授業を行う。授業中に行うワークシート、授業の事前・事後のアンケート、授業を撮影したビデオをもとに考察する。

３．教材化

（１）教材観

球面三角法は、非ユークリッド幾何学、特に球面幾何学における三角法であり、高等学校で学ぶユークリッド幾何学とは違った性格をもった幾何学である。球面幾何は同じ非ユークリッド幾何である楕円・双曲幾何などよりも構造が分かりやすく、ユークリッド幾何と非ユークリッド幾何を比較検討するにあたり、球面幾

中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.192-204、2006年3月

何は最も適した題材といえる。また、数学以外の分野である測地学や地理学を始め、測量一般の歴史とともに発展してきた学問分野でもある。球面三角法は社会の必要によって生まれてきた数学であり、現在でも多くの理論の基礎として使われている。

球面三角法に関する教材を作成するにあたって、球面上の距離計算という具体的な授業の達成目標を定めた。球面三角法を具体的な問題に応用することにより、三角法の有用性をより実感しやすくなると考えた。授業では正弦定理・余弦定理を主に扱った。また、球面上の位置関係、長さを角度で表すという球面幾何特有の考え方を理解しやすくするため、必要に応じて地球儀や作図ツールを用いた。

球面三角法は、数学としての平面三角法の応用、または航海術や測地学など道具として必要とされる場合が多い。専門分野に進む人に限らず、（球面に代表される非ユークリッド空間など）普段と違う空間で数学を考えることにより、物事の見方・考え方が広がると思われる。本研究では、普通科高校の文系・理系の混合クラスで授業を行った。

（２）教材の数学的解説

①球面三角法の概要

球面三角形（図１）は、便宜上単位球面上の場合を考えることにする。球面上の直線は大円の弧で、角は大円の交角で定義される。ある点で交わる２つの曲線の交角とは、その点における２つの曲線の接線のなす角をいう（図２）。このとき、三角形の各辺の長さは角度で表されることになる。授業では、大円・球面三角形・交角といった球面幾何学の諸定義を、メネラウスの『球面学』に書いているとされる記述をもとに、地球儀や作図ツールを使って確認した。

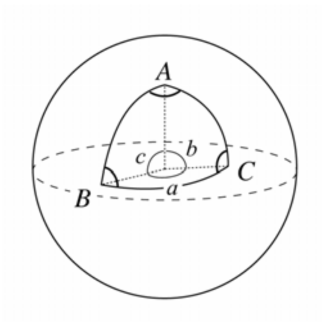


図１　球面三角形

球面上の正弦定理・余弦定理は次の通りである。

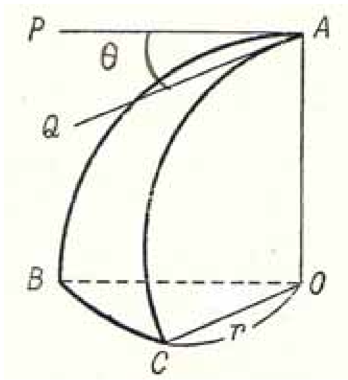


図２　交角

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}$$

（球面正弦定理）

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$
$$\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B$$
$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$$

（球面余弦定理）

授業では、球面上の距離計算を目標としたため、球面余弦定理について証明を行った。証明は場合分けがやや複雑であるが、鋭角三角形の場合に限定して、長さが角度で表されることを主眼において、穴埋め式のワークシートを用いた。

球面三角形では内角の和は一定ではない。平面の場合と違い、内角の和が変動する。大円や小円に垂直な球の直径をそれらの円の軸、軸の両端を円の極という。ある球面三角形に対して、各辺の極を頂点とする三角形を極三角形（図３）という。２つの極三角形の一方の各角は、他方の各角の対辺と補角をなす。この性質により、球面余弦定理は次のように変形できる。

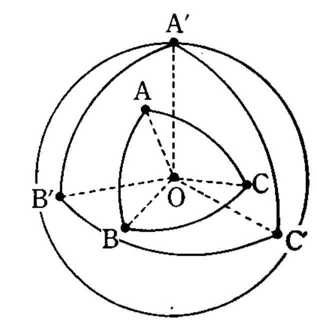


図３　極三角形

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$
$$\cos B = -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b$$
$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$

②球面上の距離計算

球面余弦定理を用いることにより、緯度・経度が分かっている地球儀上の２地点間の距離を計算することができる。

図４において、Ｐ点とＱ点の緯度・経度が分かっている場合、緯度差からＮＰ、ＮＱの長さが、経度差から∠Ｎの大きさが分かる。△ＮＰＱにおいて２辺夾角が分かっているので、球面余弦定理からＰＱの長さを求めることができる。授業では、東京・ロンドン間の距離を具体的に求めた。

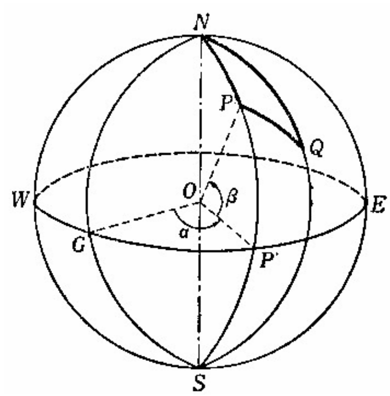


図４　北極を１頂点とする球面三角形

（３）本教材と他分野・他教科とのつながり

本教材は、数学Ⅰの「図形と計量」の分野を始め、数学Ｂの「空間座標とベクトル」、地理Ａの「球面上の世界と地域構成」、農業科・工業科における測量（特に三角測量と三辺測量）などの内容と関連している。

特に地理においては、学習指導要領にも記されている通り、地球儀や地図を活用する活動がある。図５は教科書の一部であるが、地球儀上の距離と方位の求め方が図で説明されている。また、実際に方位を求める課題が載っている。別の教科書では「地球儀上のある５つの都市を東京から近い順に並べてみよう」といった距離に関する課題もある。このような課題に取り組む学習活動においては、空間把握や縮尺、角度といった数学的な知識も必要になってくる。この点から本教材は地理（特に地球儀や地図の活用）の内容に密接に関係しているといえる。

数学においても、特に応用・活用場面において、このような距離や方位を求める活動は必要であろう。また、生徒が主体的に取り組む学習活動として、このよ

中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.192-204、2006年3月

うな活動は適切だと思われる。

授業ではこのような他分野とのつながり、また三角法の有用性を生徒が自ら実感できるよう､「球面上の数学」と題し、敢えて三角法・正弦･余弦定理・地理という言葉を前面に押し出すことはしなかった。

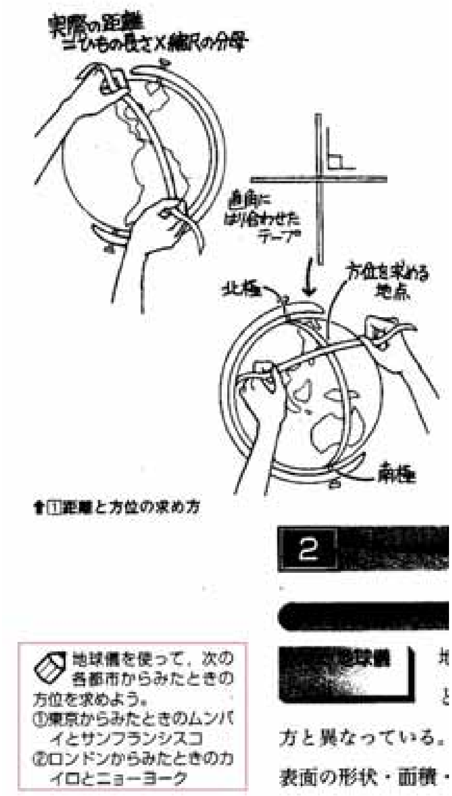


図５「高校生の新地理Ａ」
(二宮書店)より

４．授業概要

（１）授業環境

日時：平成 17 年 10 月 25～28 日(65 分×3 時間)

対象：埼玉県立高等学校第２学年（２クラス計 80 名）

準備：コンピュータ（Windows)、ビデオプロジェクタ、ビデオカメラ、実物投影機、Microsoft Power Point、作図ツール（Cabri3D)、地球儀(生徒用 20 個、演示用１個)、輪ゴム、ビニールボール、世界地図、事前・事後アンケート、授業テキスト、ワークシート

（２）授業展開

＜1 時間目＞

【授業目標】

球面幾何の基本的概念である大円について、地球儀を使って体験的に理解するとともに、歴史原典の定義を用いて大円の概念を検討し、球面上の最短距離について理解する。また、同経度上の２地点間の距離を計算する。

【授業内容】

①導入

まず、３時間の授業全体の目標を説明した。「球面幾何学とは何か」について３時間で行う活動の概要を、事前アンケートと絡めながら地球儀やビニールボールを使って簡単に説明した。

写真１　輪ゴムのかけ方を説明する生徒

②展開

<u>学習活動(1)：「東京とニューヨークの最短距離を地球儀を使って考える」</u>

ここでは、地球儀上の２地点間の最

短距離について、その２地点を通る経路を地球儀に輪ゴムをはめることで表現してもらった（写真１）。また、どのようにはめたのかをワークシートに言葉で記述してもらった。

多くの生徒が輪ゴムで大円を示していた。机間指導の際に、「どんな方針で、どのように輪ゴムをかけましたか？」と聞いたところ、「輪ゴムが一番伸びるところ」「輪ゴムが安定するところ」「円の周の長さが一番長くなるところ」「球の中心を通る」といった意見があった。しかし、「なぜそれが最短？ほんとにそれで最短？」と聞くと「なんとなく」「…」など説明につまる生徒が多くいた。

<u>学習活動(2)：「『大円』とは何かを、歴史原典に基づいて検討する」</u>

先程の活動について何人かの生徒に発表してもらった後、大円とは何かをメネラウスの「球面学」の記述に基づいて考えた。そして、大円の定義に基づいて「赤道・経線・緯線は大円か」を地球儀を使いながら検討してもらった。また、作図ツールによる説明も行った。

<u>学習活動(3)：「明石・コロール間の距離を計算する」</u>

ここでは、同経度上の２地点間の距離を具体的に計算してもらった（図６）。図を描きながら考える生徒も多く見られた。計算方法を含め、１人の生徒に発表してもらった。

③まとめ

最後に球面三角形について、作図ツールを用い説明した。また、メネラウスの紹介、メネラウスの定理(１年次で既習)と球面幾何との関係を補足説明の形で行った。

＜２時間目＞

【授業目標】

地球儀上の任意の２地点間の距離の計算方法について考える。またその準備として長さと角度の関係、球面余弦定理について理解する。

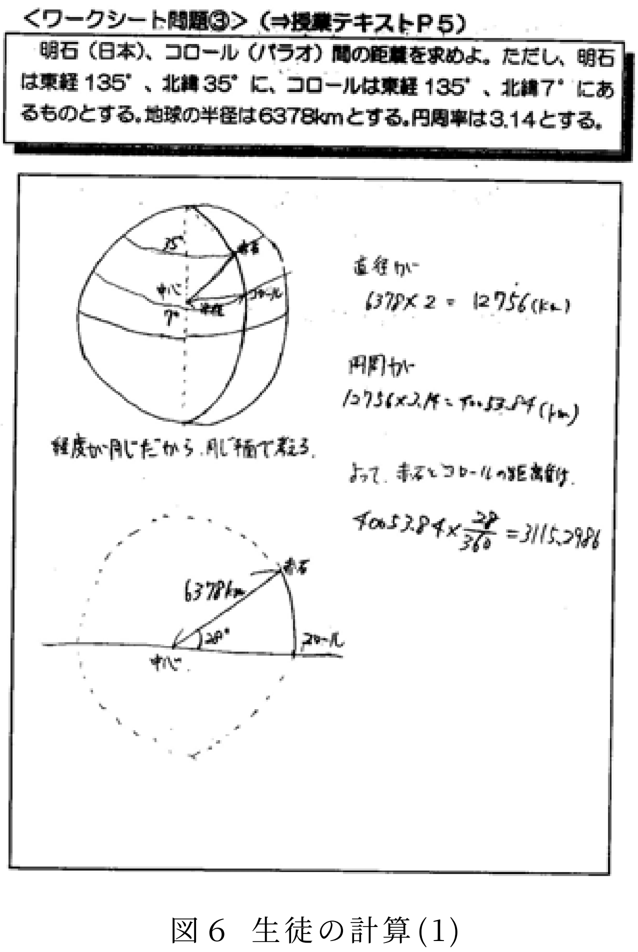


図６　生徒の計算(1)

【授業内容】

①導入（前回の復習）

大円、球面三角形、そして同経度上の２地点間の距離の計算方法の復習を行った。

中学校･高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.192-204、2006年3月

②展開

学習活動(1)：「球面余弦定理を証明する」

まず、球面上の角の表し方について、「球面学」の記述に基づいて確認した。その後、単位球面上の球面正弦定理・球面余弦定理を紹介した。長さと角度の関係の理解を確実にすることを主眼において、球面余弦定理の証明を穴埋め形式のワークシートでやってもらった。時間をおいて、確認を行った。

学習活動(2)：「東京・ロンドン間の距離を計算する」

球面幾何学の地理学への応用として、授業全体の目標の１つである「地球儀上の２地点間の距離計算」を行った。

③まとめ

学習活動(2)において、どのように球面余弦定理を使ったらよいかを確認し、計算は次回までの課題とした。

＜３時間目＞

【授業目標】

三角形の合同条件を正弦・余弦定理によって検討する。また、この手法の応用として、球面三角形の合同条件を球面正弦・余弦定理から導き出すことにより、三角法の有用性を実感する。

【授業内容】

①導入（前回の復習）

球面正弦定理・球面余弦定理がどのような定理であったのかを復習した。

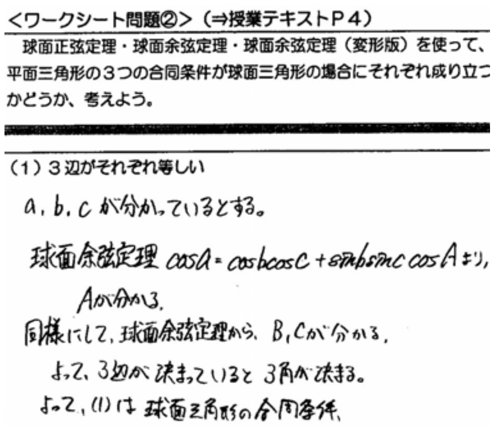
②展開

学習活動(1)：「平面三角形の合同条件を検討する」

中学校で学習した「３辺相等、２辺夾角相等、１辺両端角相等」が合同条件であることを、正弦定理・余弦定理を使って検討してもらった。合同とは何か、検討するとはどういうことかを確認した上で考えてもらった。

学習活動(2)：「球面三角形の合同条件を検討する」

平面の場合の手法の応用として、球面三角形の合同条件を考えてもらった（図７）。その際、内角の和が一定でないことを作図ツールで確認した。「３角相等」は球面で合同条件になるか（図


<ワークシート問題②>（⇒授業テキストＰ４）
球面正弦定理・球面余弦定理・球面余弦定理（変形版）を使って、平面三角形の３つの合同条件が球面三角形の場合にそれぞれ成り立つかどうか、考えよう。

（１）３辺がそれぞれ等しい

a, b, c が分かっているとする。

球面余弦定理 $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ より、

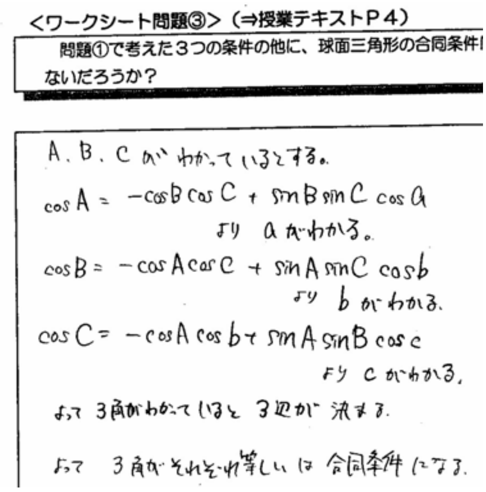
A が分かる。

同様にして、球面余弦定理から、B, C が分かる。

よって、3辺が決まっていると 3角が決まる。

よって、(1) は 球面三角形の合同条件。

図７生徒の解答(2)


<ワークシート問題③>（⇒授業テキストＰ４）
問題①で考えた３つの条件の他に、球面三角形の合同条件
ないだろうか？

A, B, C がわかっているとする。

$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$

より a がわかる。

$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b$

より b がわかる。

$\cos C = -\cos A \cos b + \sin A \sin B \cos c$

より c がわかる。

よって 3角がわかっていると 3辺が決まる。

よって 3角がそれぞれ等しい は 合同条件 になる。

図８ 生徒の解答(3)

８)、球面での相似条件とは何かなど発展的な内容についても考えてもらった。

③まとめ

３時間を通してのまとめとして、最短距離、三角法、内角の和、合同条件など平面と球面における諸性質を比較した。

５．議論

３時間の授業終了後、生徒に対して授業に関するアンケート調査を行った。この結果を中心に以下課題の考察を行う。

（１）課題１に対する議論

課題１：地球儀を用いた球面三角形の考察、球面上の距離計算を行う活動を通して、数学が具体的な事象の考察に活用できることを実感できるか。

生徒の中には空間認識を苦手とする者も多く、特に球面上の距離計算の考え方を理解できた生徒が非常に少なかった。しかし、地球儀を用いた大円の検討や、作図ツールによる説明は好評であった。生徒のアンケートにも「実際に地球儀などで調べて考えたのでより一層分かったような気がした」「カブリによる説明は分かりやすかった」という意見があった。生徒が主体的に取り組める活動は、生徒が自ら考え検討することで、理解がより深まるものだと思われる。

以下は特に課題１における活動に対するアンケート結果である。

<u>質問：授業を通して数学に対する見方や考え方が変わったか、学んでよかったことは何か、感想等</u>

＜アンケートに対する生徒の答え＞

①以前地理で軽く触れた地球上の２点間の距離をやって数学はやはり様々な教科と直結しているんだと再認識した。

②数学はテストができればいいやと思っていたが､東京－ロンドン間の距離を求めたりと現実社会に応用ができて、やはり数学は現実社会に必要なんだと思った。

③数学は生きていく上で､単に計算にしか使わないと思っていたけど､地球上の２点を求めたり、色々なところで応用できるということが分かった。

④数学の対象となるものが身の回りにたくさんあるんだという見方ができるようになった気がする。

生徒①は地理との関係を認識している。また生徒②も「現実社会」という数学以外の他分野との関係に言及している。生徒③④は、具体的に数学が使われている場面を通じて、身の回りの数学的な見方・考え方ができるものがあるという認識をもったようである。生徒①～④はいずれも数学が具体的な事象の考察に活用できることを実感したと思われる。

以上のことより、本研究の授業実践において課題１は達成されたといえる。

中学校･高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.192-204、2006年3月

（２）課題２に対する議論

課題２：課題１を通して、数学的な見方や考え方のよさを認識することができるか。また、数学観の変容を促すことができたか。

授業全体を通しての感想、分かったことについて以下のような意見があった。

＜アンケートに対する生徒の答え＞
⑤数学はちょっと見方を変えれば、いくらでも広がるんだということ
⑥平面で満足していた自分は、狭かった。
⑦対象にする空間の違いによってさまざまな新しい発見があること
⑧どんなものにも数学的な式や計算が存在しているのかどうかとても興味深かった。
⑨平面で成り立つ条件が球面で成り立たないのは興味深いと思った。違った次元でも物事を考えてみるのは面白い。
⑩（球面三角形の）内角の和の最大を探してみたいと思った。
⑪球面三角形の内角の和は 180 度にならないという点が違う。180 度以上なら、何度までいくのか知りたいと思った。

生徒⑤～⑧は、球面幾何の学習活動を通して、平面以外にもさまざまな空間が存在し、対象によって性質が変わること、また逆に見方を考えることで数学の対象を広げることができることを認識したようである。これは、球面をテーマといした今回の諸学習活動がきっかけになったと思われる。生徒⑨は、（平面とは）異なった空間で物事を考えることに興味を抱いている。これは、学校数学がユークリッド幾何学、特に平面幾何に内容が限定されているということ、また限定されているにも関わらず他の空間について存在も含めてあまり教えられていない現状がうかがえる。

生徒⑩⑪は、授業の内容に関連して、より発展的な内容に興味を抱いている。新しい見方・考え方を発見し、それを応用しようとする態度がうかがえる。

生徒⑤～⑪のいずれも、本授業を通して数学的な見方や考え方のよさを認識することができたと考えられる。またその結果、数学観の変容を促すことができた。以上より、本研究の授業実践において課題２は達成されたといえる。

６．おわりに

本研究では、球面幾何を題材とした授業を行うことにより、数学的な見方や考え方のよさを認識することができるか、生徒の数学観に変容が見られるかどうかを考察した。

授業においては、実際に地球儀を使っての大円の概念の確認、球面三角法を応用した距離の計算を行ったことで、生徒は球面幾何を体験的に理解するとともに、球面幾何学の必要性を認識したことが確認できた。上述の議論からも、生徒の数学観に変容があったことが確認できた。また、事後アンケートの「学校ではやら

ないことをやったので新鮮味があってよかった」「パソコンによる立体的な図形の説明・具体例などが分かりやすかった」といった意見からも分かる通り、普段と違った内容やテクノロジーを用いた授業を行うことで、生徒はより興味を持って授業に取り組むことができたと思われる。

その一方で、「難しかった」「もっと時間があれば球面の未知な部分がみえたかもしれない」という生徒の答えもあった。立体や空間を苦手とする生徒が多いこと、また理系と文系との混合授業だったためクラス内で理解の差が大きくなってしまったのが原因だと思われる。また、内容的にも球面上の角度の表現や多少込み入った三角比の計算など、難しい部分があったのも事実である。球面幾何学の内容よりも色々な空間で物事を考えることの重要性を授業の主目標とし、数学的な見方・考え方のよさをより実感できるような授業を組み立てる必要がある。また、高等学校において球面幾何学をどのように位置づけるかについて、カリキュラムの問題と関連して考えていく必要がある。これらを今後の課題とする。

謝辞

最後になりますが、授業研究の実施に際して、埼玉県立春日部高等学校の早乙女勤先生、江森弘明先生をはじめ数学科の先生方には多大なご協力と共に、貴重なご意見ご指導を頂きました。心より御礼申し上げます。

註）

本研究は、文部科学省科学研究費特定領域研究(2)課題番号 17011014「代数・幾何・微積分の動的理解を促す「使える数学」教材サイトの開発に関する研究—数学用機械と JAVA による移動・変換と関数・微積ハンズオン教材の WEB 化研究（II）—」（研究代表者礒田正美）による研究の一環として行われた。

引用・参考文献

文部省(1999).*高等学校学習指導要領解説数学編理数編*.実教出版
文部省(1999).*高等学校学習指導要領解説地理歴史編*.実教出版
国立教育政策研究所教育課程研究センター(2004).*平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査報告書－高等学校数学 数学Ⅰ－*.実教出版
長崎栄三編著(2001).*算数・数学と社会・文化のつながり－小・中・高校の算数・数学教育の改善を目指して－*.明治図書
穂刈四三二(1973).*基礎数学講座 3 巻 平面球面三角法*.共立出版
前原潤(1998).*入門 有限・離散の数学 5 円と球面の幾何学*.朝倉書店
安達忠次(1976).*理論・応用数学演習全書 4 三角法・フーリエ解析の演習*.森北出版
佐藤裕(1984).*測地学の基礎*.山海堂
ボイヤー(1984,加賀美鐵雄・浦野由有[訳]).*数学の歴史 2*.朝倉書店
フロリアン・カジョリ(1955,小倉金之助[補訳]).*初等数学史(上)古代中世篇*.生活

百科刊行会
エー･コールマン、アー･ペー･ユシケービッチ(1970,山内一次･井関清志[訳]).*数学史１*.東京書籍
エー･コールマン、アー･ペー･ユシケービッチ(1971,山内一次･井関清志[訳]).*数学史２*.東京書籍
青木弘(2001).*中学校数学科における「数学の応用」に焦点をあてた教材開発の研究―身近な場面に潜んでいる数学を解き明かす発想に着目して―*.平成 13 年度筑波大学修士論文
野沢和弘･小林徹也(2005).*地図を題材にした数学の授業実践に関する一考察―天井画作図器を用*いて―.中学校･高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12).Numeracy の規定の諸相と歴史文化志向の数学教育―新しい教育課程へのアプローチ―.筑波大学数学教育研究室.p162-174
山本芳彦他(1997).*高等学校数学Ⅰ　改訂版*.新興出版社啓林館
山本正三他(2003).*高校生の新地理Ａ*.二宮書店
藤原健蔵他(2003).*高等学校　地理Ａ*.第一学習社
山本茂他(2003).*高等学校　現代地理Ａ*.清水書院