授業研究第2日目

和算

～零約術(巻之二)～

水穂神社　算額

年　組　番	
氏名	

授業者:筑波大学大学院修士課程教育研究科教科教育専攻
数学教育コース
永田　岳

零約術～大成算経～

零約

假如有乗数三筒零八釐六竜六絲一忽四微二纎弱問約率

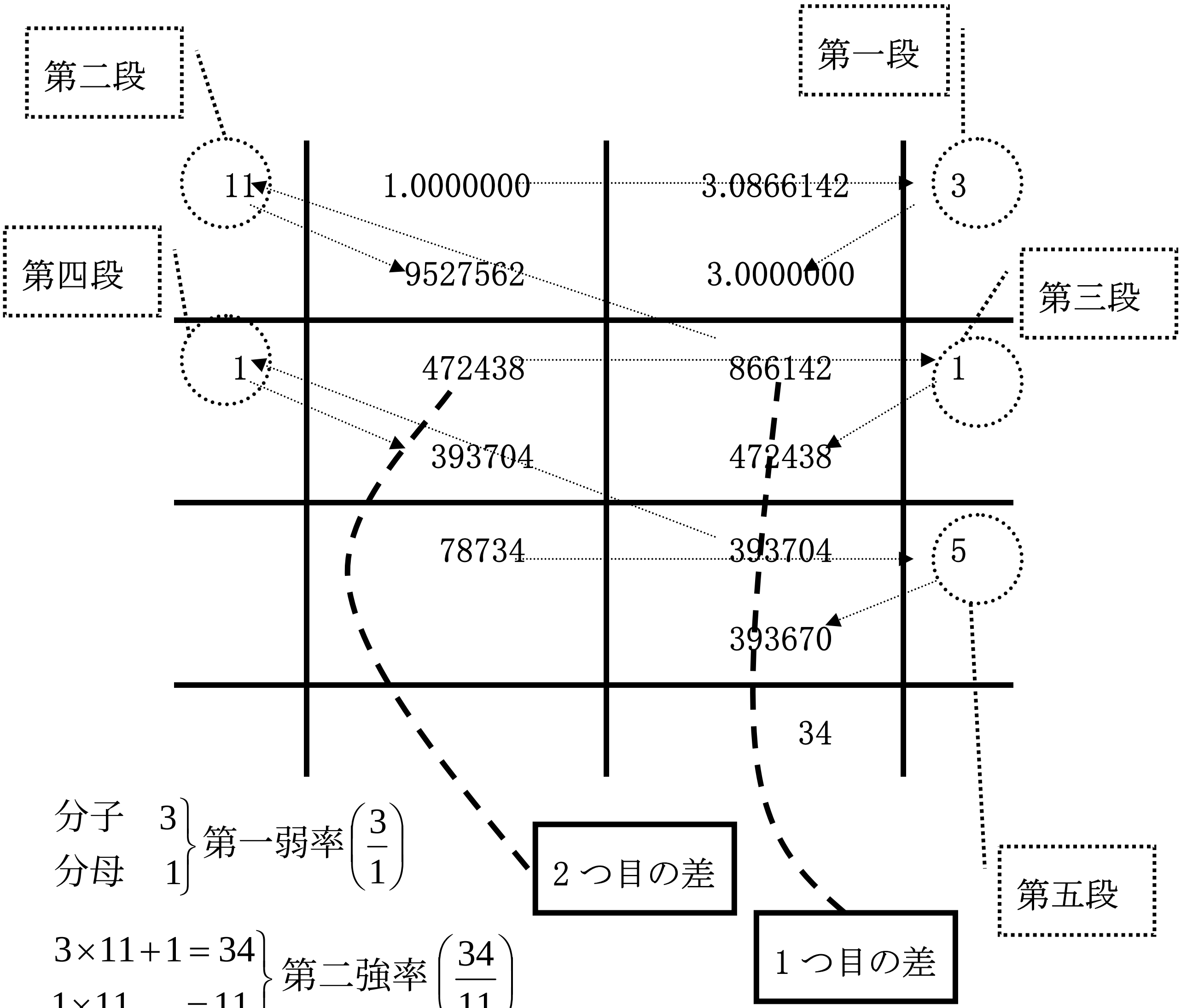
答曰　乗率　三百九十二

除率　一百二十七

法曰　置乗数三筒〇八六六一四二以一箇鳥除数以之除乗数三筒〇八六六一四二得一段三箇差八釐六六一四二以段数三即為乗率以一筒為除率得第一弱率以一差八釐六六一四二除除数一筒得第二段一十一筒差四釐七二四三八以段数一十一乗第一率加一筒於乗率得第二強率乗除三十四一十一以二差四釐七三四三八除一差八釐六六一四二得第三段一筒差三釐九三七〇四以叚数一乗第二率加第一率得第三弱率乗三十七除一十二以三差三釐六六一四二除二差四釐七二四三八得第四叚一筒差七竜八七三四以叚数一乗第三率加第二率得第四強率乗七十一除二十三以四差七竜八七三四除三差三釐九二七〇四得第五叚五筒差三四微以叚数五乗第四率加第三率得第五弱率乗三百九十二除一百二十七於是以除率一百二十七即除五差三四微得二沙六七七強是第五商差於原商三箇〇八釐六絲一四二之較八位合以爲精率

零約術の仕組み

《 3.0866142 の近似分数を求めなさい 》



$$\left.\begin{array}{ll}\text{分子} & 3\\ \text{分母} & 1\end{array}\right\}\text{第一弱率}\left(\frac{3}{1}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}3\times11+1=34\\ 1\times11\quad\;\;=11\end{array}\right\}\text{第二強率}\left(\frac{34}{11}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}34\times1+3=37\\ 11\times1+1=12\end{array}\right\}\text{第三弱率}\left(\frac{37}{12}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}37\times1+34=71\\ 12\times1+11=23\end{array}\right\}\text{第四強率}\left(\frac{71}{23}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}71\times5+37=392\\ 23\times5+12=127\end{array}\right\}\text{第五弱率}\left(\frac{392}{127}\right)$$

之を以って精率とする。

【現代語訳】

零約

問題　3.0866142 を零約（近似分数に）しなさい

答え　$\dfrac{392}{127}$

分子（左の列の最初）を 3.0866142、分母（右の列の最初）を 1 と置く。そうすると、その商は 3.0866142 となる。

$$\frac{3.0866142}{1}=3.0866142$$

（3.0866142 から 1.0000000 を引けるだけ引くことを考えるとき、１を 3 回引けるので）**第一段目の数字は 3** とおく。
その**差は 866142**（3.0866142－1.0000000×３＝0.0866142)。
このとき、第一段目の数字である 3 を分子にし、分母を 1 として、

ここから第一率【弱率】（$\dfrac{3}{1}=3<3.0866142$）を得る。

1 つ目の差 866142 を 1.0000000 から引けるだけ引くことを考えると、11 回引けるので、**第二段が 11** となる。
そのときの**差は 472437**（1.0000000－0.0866142×11＝0.0472437)。

第二率の分子の数は、第一率の分子の数の 11 倍に 1 を加えたもの（３×11＋1）とし、第二率の分母の数は、第一率の分母の数を 11 倍したもの（1×11）とする。これにより、第二率の分子 34 分母 11【強率】

（$\dfrac{34}{11}=3.0909\cdots>3.0866142$）を得る。

次に、1 つ目の差 866142 から二つ目の差 473438 を除く（引けるだけ引く）ことを考えると（473438 は 1 回引けるので)、**第三段は１**を得る。

差は３９３７０４（0.0866142－0.0473438×1＝0.0393704）。

そして、第二率の分子の数と分母の数をそれぞれ１倍し（この１は第三段の数を示す）、それに、第一率の分子の数と分母の数をそれぞれに加えることで、第三率の分子３７（34×1＋3）分母１２（11×1＋1）【弱率】

（$\frac{37}{12} = 3.0833\cdots < 3.0866142$）を得る。

次に、二つ目の差４７２４３８から三つ目の差３９３７０４を除く（引けるだけ引く）ことを考えると（393704は１回引けるので）、**第四段は１**を得る。
差は７８７３４（0.0473438－0.0393704×1＝0.0078734）。

そして、第三率の分子の数と分母の数をそれぞれ１倍し（この１は第四段の数を示す）、それに第二率の分子の数と分母の数を、それぞれに加えることで、
第四率の分子　71（37×1＋34）分母　23（12×1＋11）【強率】

（$\frac{71}{23} = 3.08695\cdots > 3.0866142$）を得る。

次に、３つ目の差３９２７０４から四つ目の差７８７３４を除き（引けるだけ引くことを考えると、78734は５回引けるので）、**第五段に５**を得る。
差は３４（0.0393704－0.0078734×5＝0・000034）。

以上から、第四率の分子の数と分母の数を５倍（この５は第五段の数を示す）し、第三率の分子の数と分母の数をそれぞれに加えることで、
第五率の分子　392（71×5＋37）分母　127（23×5＋12）【弱率】

（$\frac{392}{127} = 3.0866141\cdots < 3.0866142$）を得る。

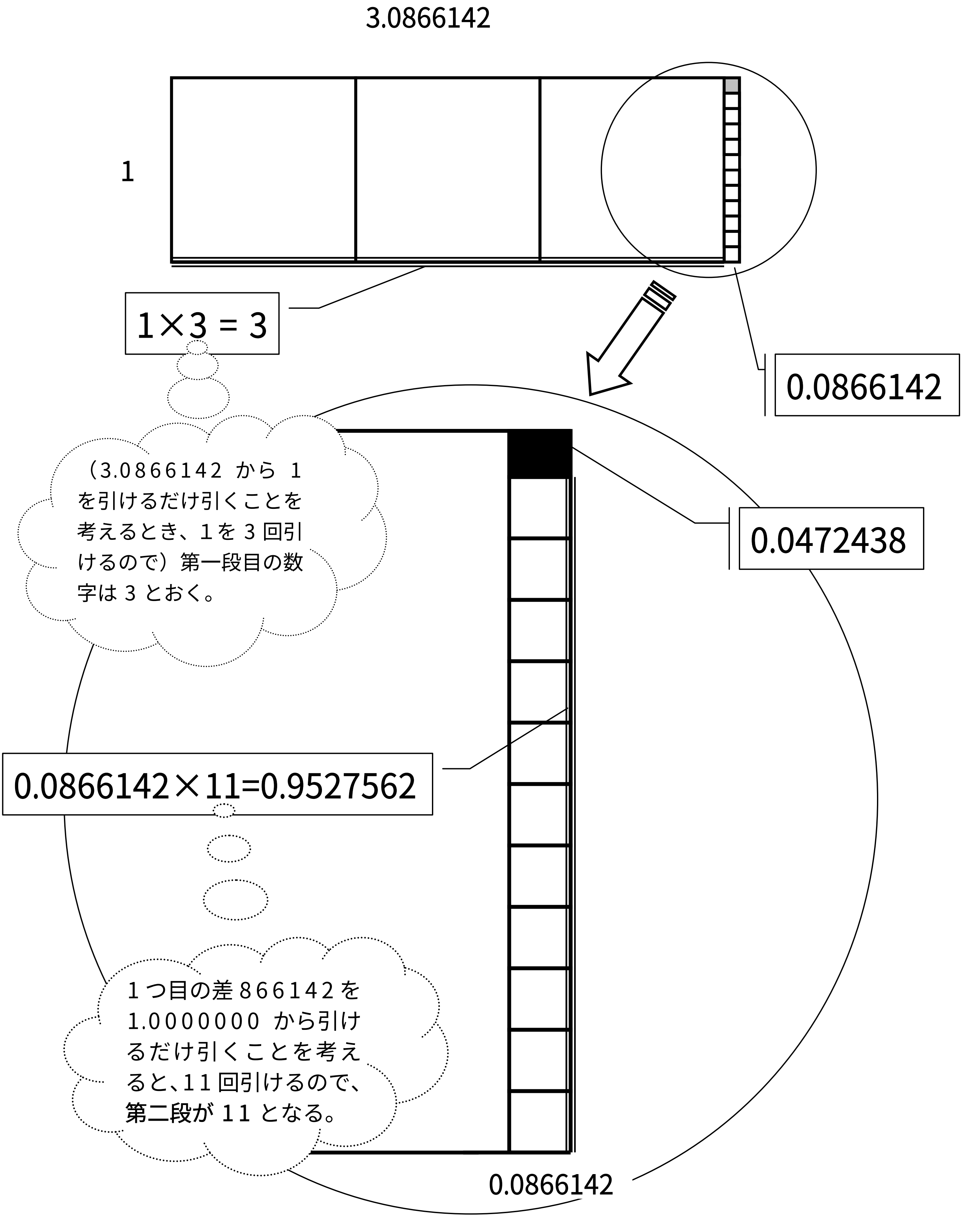
是、もとの商３.0866142と第五率を較べると８位まで合う。
之を以って、精率とする。
　　　※　実際は７位まで合う。

【 **問題Ⅰ－ⅰ** 】

下の文章は大成算経の現代語訳の一節です。この文章のいっていること

を表や図を使って説明しなさい。

（3.0866142 から 1.0000000 を引けるだけ引くことを考えるとき、1を 3 回引けるので）**第一段目の数字は 3** とおく。 その差は **866142** （3.0866142 － 1.0000000 × 3 ＝ 0.0866142）。 （中略） 1 つ目の差 866142 を 1.0000000 から引けるだけ引くことを考えると、11 回引けるので、**第二段が 11** となる。

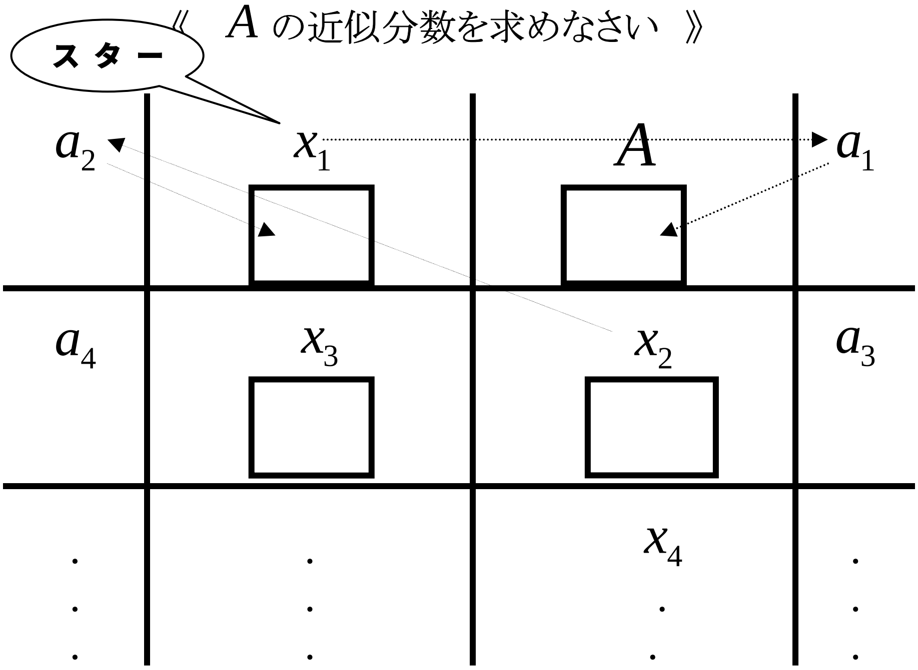


3.0866142
1
1×3 = 3
0.0866142
（3.0866142 から 1 を引けるだけ引くことを考えるとき、1 を 3 回引けるので）第一段目の数字は 3 とおく。
0.0472438
0.0866142×11=0.9527562
1 つ目の差 866142 を 1.0000000 から引けるだけ引くことを考えると、11 回引けるので、第二段が 11 となる。
0.0866142

【 問題Ⅰ－ⅱ 】

下の表は3.0866142を A として考えたときの零約術の表です。空欄を埋めなさい。

《 A の近似分数を求めなさい 》



$$\left.\begin{array}{ll}\text{分子} & a_1 = p_1 \\ \text{分母} & x_1 = q_1\end{array}\right\}\text{第一弱率}$$

$$\left.\begin{array}{l} p_1 \times a_2 + 1 = p_2 \\ q_1 \times a_2 \qquad = q_2\end{array}\right\}\text{第二強率}$$

$$\left.\begin{array}{l} p_2 \times a_3 + p_1 = p_3 \\ q_2 \times a_3 + q_1 = q_3\end{array}\right\}\text{第三弱率}$$

$$\left.\begin{array}{l} p_3 \times a_4 + p_2 = p_4 \\ q_3 \times a_4 + q_2 = q_4\end{array}\right\}\text{第四強率}$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{} \times \boxed{} + \boxed{} = p_5 \\ \boxed{} \times \boxed{} + \boxed{} = q_5\end{array}\right\}\text{第五弱率}$$

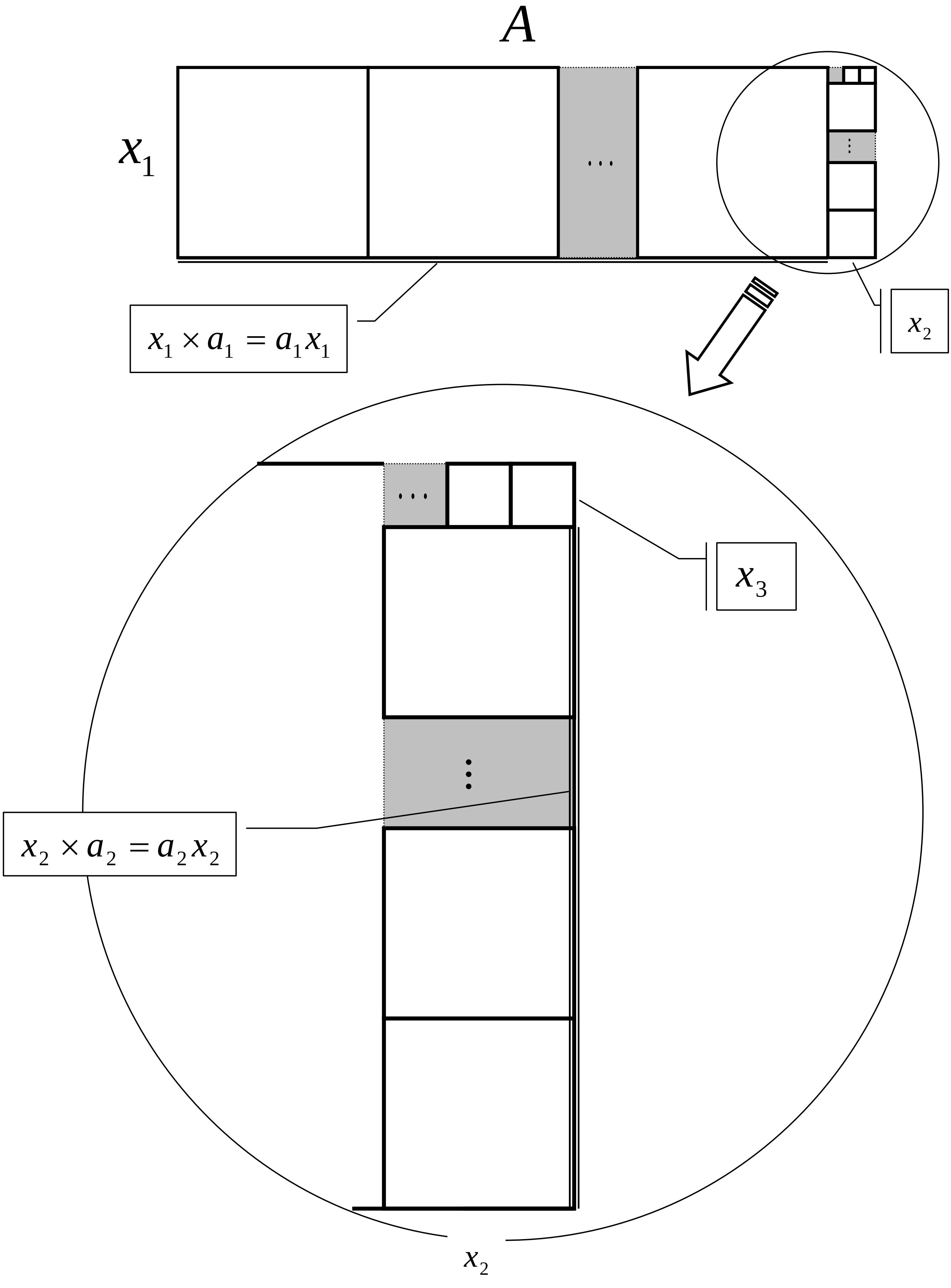
近似分数 $= \dfrac{p_n}{q_n}$

『第n率』はどうなっているでしょうか。

$$\boxed{\qquad \times \qquad + \qquad = p_n}$$

$$\boxed{\qquad \times \qquad + \qquad = q_n}$$

$(n \geq 3)$



A
x_1
$x_1 \times a_1 = a_1 x_1$
x_2
x_3
$x_2 \times a_2 = a_2 x_2$
x_2

零約術で出た値が本当に近似分数になっているのか確かめてみよう。

【 問題 II − i 】

3.0866142 を連分数で表しなさい

$$3.0866142 = \frac{3.0866142}{1} =$$

【 問題Ⅱ－ⅱ 】

第五弱率を連分数に直しなさい。

3.0866142 $\frac{392}{127}=$

【 問題Ⅱ－ⅲ 】

『3.0866142 の零約術による近似分数』と『3.0866142 の連分数』を比較し、零約術がどのように近似しているかをグループで話し合ってまとめなさい。

【補足資料】

零約術による近似分数の仕組みを文字を使った連分数で表すと次のようになります。

$$A = a_1 x_1 + x_2$$
$$x_1 = a_2 x_2 + x_3$$
$$x_2 = a_3 x_3 + x_4$$

$$\Longrightarrow \quad x_n = a_{n+1} x_{n+1} + x_{n+2}$$

《　A の近似分数を求めなさい　》

$$A = \frac{A}{1} = \frac{a_1 x_1 + x_2}{x_1} = a_1 + \frac{x_2}{x_1} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{x_1}{x_2}}$$

$$= a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{x_1}{x_2}} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{a_2 x_2 + x_3}{x_2}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{x_3}{x_2}}$$

$$= a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{x_2}{x_3}}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{a_3 x_3 + x_4}{x_3}}} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{x_4}{x_3}}}$$

$$= \cdots \qquad = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

【零約術と連分数】

〖　第一弱率　〗

3.0866142　$\frac{3}{1}$

〖　第二強率　〗

3.0866142　$\frac{34}{11}=\frac{3\times 11+1}{1\times 11}=3+\frac{1}{11}$

〖　第三弱率　〗

3.0866142　$\frac{37}{12}=3+\frac{1}{12}=3+\cfrac{1}{\cfrac{11\times 1+1}{1}}=3+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{1}}$

〖　第四強率　〗

3.0866142　$\frac{71}{23}=3+\frac{2}{23}=3+\cfrac{1}{\cfrac{23}{2}}=3+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{2}}=3+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{\cfrac{2}{1}}}=3+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}$

和

２日目ワークシート（No.1）

**グループ　　　　　　　　　　**

【　問題Ⅱ－ⅲ　】

零約術による近似分数はどのような近似になっているのかをグループで話し合ってまとめなさい。

課題（11 月 14 日）

年　　組　名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\sqrt{1} = 1.000000000$	$\sqrt{7} = 2.645751311$
$\sqrt{2} = 1.414213562$	$\sqrt{8} = 2.828427125$
$\sqrt{3} = 1.732050808$	$\sqrt{9} = 3.000000000$
$\sqrt{4} = 2.000000000$	$\sqrt{10} = 3.162277660$
$\sqrt{5} = 2.236067978$	$\sqrt{11} = 3.316624790$
$\sqrt{6} = 2.449489743$	$\sqrt{12} = 3.464101615$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{分子} & a_1 = p_1 \\ \text{分母} & x_1 = q_1 \end{array}\right\} \text{第一弱率}$$

$$\left.\begin{array}{l} p_1 \times a_2 + 1 = p_2 \\ q_1 \times a_2 \qquad = q_2 \end{array}\right\} \text{第二強率}$$

$$\left.\begin{array}{l} p_2 \times a_3 + p_1 = p_3 \\ q_2 \times a_3 + q_1 = q_3 \end{array}\right\} \text{第三弱率}$$

$$\left.\begin{array}{l} p_3 \times a_4 + p_2 = p_4 \\ q_3 \times a_4 + q_2 = q_4 \end{array}\right\} \text{第四強率}$$

$$\left.\begin{array}{l} p_4 \times a_5 + p_3 = p_5 \\ q_4 \times a_5 + q_3 = q_5 \end{array}\right\} \text{第五弱率}$$

√ の零約

	1.000000000		

規則性・気づいたこと