出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（13）
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.181-191、2006年3月

零約術による異文化体験の効果に関する研究

―原典として『大成算経』を利用して―

筑波大学大学院修士課程教育研究科
永田　岳・関　正貴

章構成

要約

本研究では、数学を人の営みとして捉える視点から、江戸時代の数学の和算を題材とした。特に今回は和算の中でも、『大成算経』の中の零約術を教材として授業研究を行った。その結果、和算の原典解釈と追体験による異文化体験によって、数学に対する興味・関心を促すこと、また、物事の特徴に注目し、その特徴を未知の事柄を類推する能力を向上することができた。

キーワード：和算，零約術，近似分数，連分数，平方根

1　はじめに

1980 年度におこなわれた第 2 回国際数学教育調査から、日本の中学･高校生は他国の生徒に比べ「数学と社会はあまり関係ない」と思っていることが明らかになった。さらに、1994 年度におこなわれた第 3 回国際数学･理科教育調査第 1 段階調査、1998 年度におこなわれた第 2 段階調査においてもこの意識・態度の傾向は明確に現れた。また、1999 年 3 月に告示された高等学校学習指導要領第 2 章第 4 節数学の中の数学基礎の目標には「数学と人間とのかかわりや、社会生活において数学が果たしている役割について理解させ、数学に対する興味・関心を高めるとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し数学を活用する態度を育てる。」とある。以上のことから、子どもたちは数学が自分や社会と離れていると感じており、このことは課題となっていることがいえる。この課題に対する方策として、筆者は和算を用いた授業が有効であると考えた。

礒田(2001)は、数学を人の文化的営みであると理解し数学観の変容を促すことについては、異文化体験による文化的視野の覚醒が寄与しうること、そして、そのような文化的視野の覚醒に対しては数学史がその契機を提供しうることを指摘している。また、そのような文化的視野の覚醒を導く異文化体験においては、「文化比較に通じる課題設定をした上で、他者の身になって考えてみる、他者の世界において考えてみることが有効な方策とな

る」ことを述べている。詳しくは 3 章で述べるが、現在学校で教えられている数学のもとは西洋からの数学が中心である。したがって、本研究において、和算は「異文化」として捉える。

また、長崎(2001)は算数・数学に社会・文化をつなげることに 4 つの意味合いを述べている。そのうち 4 つ目の意味合いとして「数学を文化として楽しみことができるようになる」(p.12)ことをあげている。「数学は何千年もの歴史を持った貴重な文化遺産であるとともに、それらは人間が創ってきたものである。人間が創ってきた文化の発展・継承にふれるとともに、その偉大さを楽しむことができる。」(p.12)と述べている。特に和算は日本の江戸時代の文化の 1 つであり、日本の歴史をもった文化遺産にあたる。したがって、和算を学ぶことで生徒に数学に対するあらたな興味･関心を与えることができると考えられる。

以上のことを踏まえ、本研究では、和算における原典解釈「異文化体験」として、「無意識に潜む自らの数学文化を自覚すること」と「数学的なものの見方や考え方のよさを認識できること」を目指す。

2　研究目的・研究方法

『大成算経』を使った原典解釈によって、数学観、特に今回は無理数の概念に関する変容を図ることを考察する。ただし、「原典」とは、翻訳文献まで含めることにする。

目的達成のため、以下の課題を設定する。

課題 1：江戸時代の日本における数学の原典解釈を通じて、数学に対する興味･関心を喚起することがきるか。

課題 2：零約術による無理数へのアプローチを通じて、パターンに注目し、そのパターンを用いて未知の部分を類推するという能力を高めることができるか。

研究方法

『大成算経』をもとにオリジナルの教材を作成し、授業を行う。ビデオによる授業記録と、事前・事後アンケートをもとに考察する。

3　『大成算経』の中の零約術の教材化

3.1　零約術

今回、零約術（れいやくじゅつ）を教材化するにあたり、関孝和、建部賢弘・賢明によって書かれた『大成算経』に焦点を当てた。加藤(1964)は「『大成算経』は関孝和の晩年の書物であり、その作成には関孝和の高弟に当たる建部兄弟の助力が大きく関与している。」といっている。『大成算経』の中で用いている零約術をもちいた問題の解説はすべて言語によるものであり、表や図は使用していない。しかし、その内容

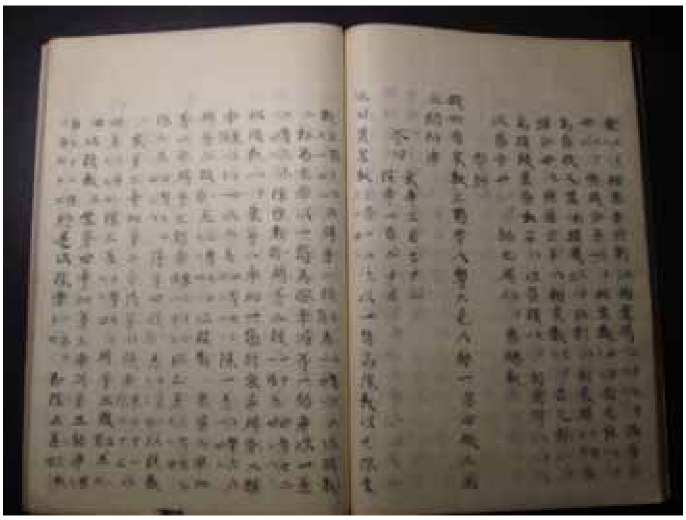


図 3.1　大成算経

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（13）
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.181-191、2006年3月

から零約術のための計算として両一術(りょういちじゅつ)、翦管術(せんかんじゅつ)という和算特有の計算をしていることがうかがえる。

生徒にとって零約術はもちろん和算自体もはじめて聴く言葉である。これは、事前アンケートで確認されている。したがって、生徒にとって和算の中の零約術を学ぶということは異文化を理解するということに当たる。これは実際零約術を学んだ後に行った事後アンケートで生徒の「学校で習っていない数学」・「今までとは違う考え方」という発言からもうかがえる。

礒田(2002)は、「他者の立場を想定し、他者への共感するとともに、他者の考えを鏡に自らの考えを明らかにする数学的活動」を、解釈学的営みをいう言葉で表現している。具体的な活動として、「歴史上の原典を開き、その原典を記した人の立場や考えかを想定し、その人に心情を重ねて解釈すると、今、自分たちの学ぶ数学が、異なる時代・文化背景に生きた人々によって、まるで異なる時代様式で研究され、表現されていたことが体験できる」といっている。また、解釈学的営みを通じて、「数学自身とそれを生み出した人間とのかかわりを知る数学教育にかかわる社会・文化は、他者への共感という人間の営みを通じて主観的に共有される」といっている。このことから、数学的活動に解釈的営み適用することで、数学が発展してきた過程、数学の必要性を知る中で、工夫・驚き・感動を味わい、数学を学ぶことの面白さ・考えることの楽しさを味わうことができると考える。

また、零約術の中に出てくる数字は小数と整数のみである。無理数に当たる数字も近似し有理数で表されている。連分数は今回の零約術の授業で有理数から無理数への橋渡しの役割をしている。すべての生徒が連分数という言葉を聴くのは初めてであった。しかし、連分数の考えをこれまでに使ったことがある生徒は数人いた。また、連分数は知らずとも分数の理論のみで連分数を理解することは容易である。したがって、連分数は零約術を理解するための既知の知識となる。

以上のことから、原典解釈を通じ江戸時代の数学を追体験すること、また、無理数のこれまでの特質とことなる新しい特質を知ることでより一層数学への興味・関心を喚起することができると考え、『大成算経』の中の零約術を本研究の題材とした。

3.2　零約術の計算方法

両一術・翦管術は二元一次不定方程式の解法である。両一術は $ax \pm by = \pm 1$ の解法であり、翦管術は $ax \pm by = \pm c$ の解法である。逐次的に x と y の漸近数を求めていく解法であり、上述したように零約術の計算方法と同様の手法である（翦管術も同様である）。まず、両一術について「$19x - 27y = 1$ を満足する x を求めよ」の問題を用いて説明をおこなう。尚、この問題は『大成算経』の中の諸約之法に掲載されている問題である。両一術では、図 3.1 のような表を用いた計算をおこなう。

2	19 16	27 19	1
1	3 2	8 6	2
	1	2	

図 3.1　両一術

まず、19 と 27 という数字の小さいほうを用い

る。27 から 19 を引けるだけ引くことを考えると、1 回分だけ引くことができる。すなわち、

$$27-19\times 1=8$$

となる。次にこの「8」を用いる。19 から 8 を引ける
だけ引くことを考えると、2 回引くことができる。

$$19-8\times 2=3$$

同様に繰り返しおこなうと、

$$8-3\times 2=2$$

$$3-2\times 1=1$$

とおこなっていく。このとき、両端に現れた数字を
『大成算経』では「段」と呼び、現れた順に「第一段、第二段・・・」と呼ぶ。ここで、第 n 段の数字を a_n と表す。また、n 番目の x の漸近数を q_n とおいたとき、両一術では次の公式から、x の漸近数を q_n を求める。

$$q_n=q_{n-2}+q_{n-1}\times a_{n-1} \qquad \left(\text{ただし、}q_0=0,\, q_1=1\text{とする}\right)$$

上の公式から、$q_5=10$ を求めることができる。したがって、$x=10$ としている。

以上が両一術の計算方法となる。『大成算経』の零約術にもこの方法が用いられている。零約術は近似分数を求める方法である。したがって、次の関係が成り立つ。

$$3.0866142 \quad = \quad \frac{3.0866142}{1} \qquad \frac{y}{x}$$

$$3.0866142x - y \qquad 0$$

この式をもとに、零約術では両一術と同様の手法で近似分数を求める。

4　零約術の解説

零約術は不尽数を簡単な分数で表すための術である。例えばπの値を $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$ とし、$\sqrt{2}$ を $\frac{41}{29}$, $\frac{58}{41}$ という近似分数の形に変形するための術である。これは、関孝和によって創められたものである。零約という単語も関孝和の拾遺諸約（しゅういしょやく）、括要算法（かつようさんぽう）等に始めて見られる。関の零約術は、後の和算家の零約術とは大きく異なる。関の零約術は一種の平均法によって次第に真の値に近づけていくものである。しかし、大成算経に書かれている零約術はこれとは大きく異なり、連分数と同一の理論に基づいている。大成算経は関の晩年に、高弟建部賢弘・賢明兄弟の助力のもと、関の研究を纏め上げた書物である。したがって、建部兄弟の考えが加えられていることは明確であり、どこまでが関の研究でどこからが建部兄弟の研究であるかは不確かである。しかし、綴術算経（てつじゅつさんけい）のなかで賢弘がいうには、この零約術は兄賢明の創案であると主張している。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（13）
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.181-191、2006年3月

大成算経の零約術は不尽数を連分数に展開し、その近似分数を不尽数として扱うというきわめて近代的なやり方である。しかし、この計算方法は、和算特有の両一術，翦管術が用いられている。これらの術の中にも連分数の理論が見られる。特に、建部の累約術にいたってはこの連分数の理論がより一層活用されている。これらの研究から大成算経の零約術を生み出し、他の和算家の研究によって零約術は発展していった。

5　『大成算経』の中の零約術を題材とした授業研究

(1) 授業環境

日時：平成 17 年 11 月 9 日、14 日、16 日 (計 45 分×3 回)

対象：栃木県立佐野高等学校 2 学年(37 名)

準備：実物投影機、ビデオプロジェクタ 2 台、Microsoft Power Point、事前・事後アンケート、授業テキスト

(2) 授業展開

〔1 時間目〕

目標：零約術を説明する前段階として、連分数について、特に仮分数を正則連分数に変形する方法を習得する。また、原典の中に出てくる近似分数に対して「どのようにしてこの数字が出てきたのだろうか」という疑問を抱かせ、2 時間目につなげる。

<u>局面 1：連分数の説明</u>

まず、連分数の導入として、「長方形のできるだけ少ない正方形を使ってしきつめなさい（合同とは限らない）」という図形の問題を出題した。

この問題は、後に行う零約術の幾何的な説明、および、連分数と零約術の関係につながる。

次に、仮分数から連分数をつくる方法を示した。そして、先ほどの図形の問題と正則連分数の関係を確認した。この後、生徒に仮分数から正則分数に直す練習問題を出題した。

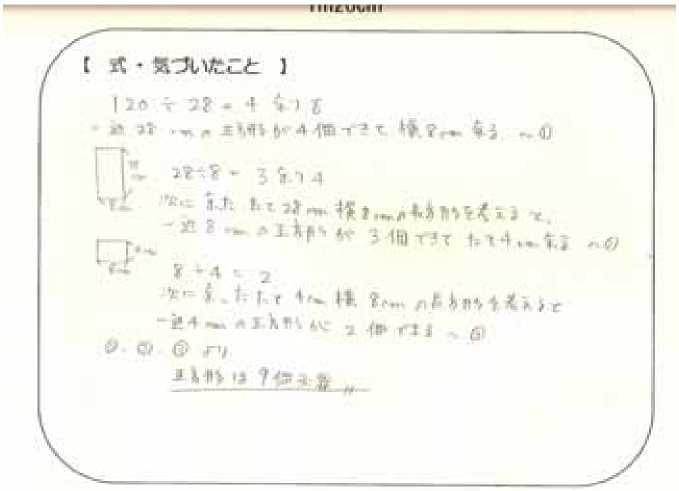


図 5.1　長方形の問題に対する生徒の解答

<u>局面 2：『3.0866142（原典内の数字）』の近似分数</u>

「3.0866142 を分数、あるいは、近似分数で表してみよう」という発問をした。生徒からは以下の回答が得られた。

- $\dfrac{15433071}{5000000}$（約分による解答）
- $\dfrac{308}{100}$（近似による解答）

- $\frac{77}{25}$ （挟み撃ちによる解答）

その後で『大成算経』の中の 3.0866142 の近似分数の値である $\frac{392}{127}$ を紹介した。そして、生徒に「どのようにしてこの数字が出てきたのだろうか」という疑問を抱かせるように促した。最後にその方法が載っている書物である『大成算経』を紹介して、1 時間目を終了とした。

〔2 時間目〕

目標：『大成算経』の原典解釈を通じて、零約術のアルゴリズムを考察する。また、零約術でどのような近似がおこなわれているのかを、連分数との比較から確認する。

局面 1：零約術のアルゴリズム

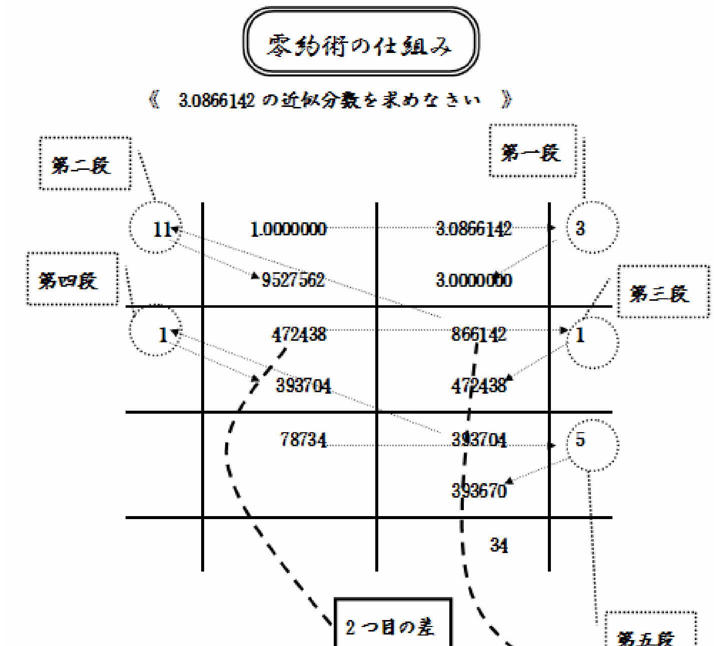
生徒にはあらかじめ原典と現代語訳、そしてこの内容に関する以下の課題を与えておいた。

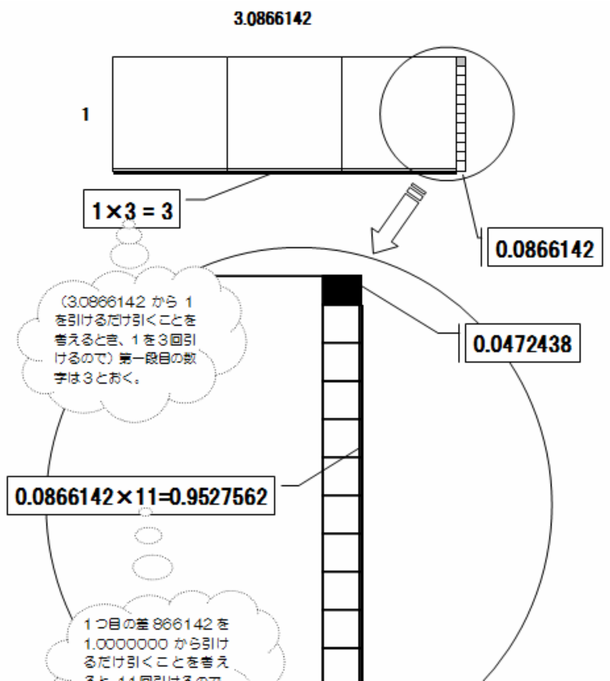
(1) 現代語訳の文章中に出てくる弱率と強率の違いは何ですか。
(2) 第二段の 11 は何を示していますか。現代語訳の文章の中の言葉を使って答えなさい。
(3) 第四率を求めるためにどのような計算をしていますか。
(4) 精率と呼ばれる形の近似分数はいくつですか。

弱率と強率の関係は、現代の逐次近似法と異なる零約術の特徴とも言える点である。現代の逐次近似法は、真の値を超えない範囲で徐々に真の値に近づいていく。零約術は逐次近似であるけれど、その近似の方法は、真の値に較べ小さい値・大きい値を交互に繰り返しながら真の値に近づいていく。小さい値の近似のとき弱率といい、大きい値のとき強率という。

また精率とは、零約術で表した最終的な近似の値の事を指す。

この課題で、生徒が難色を示した問題は(2)であった。現代語訳の部分をそのまま抜粋し、意味を把握できなかった生徒が大部分であった。(2)の解説として、表を使った解説と、1 時間目の長方形を使った解説をおこなった。





出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（13）
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.181-191、2006年3月

図 5.2　零約術の表と図による説明

この後、3.0866142 を文字に置き換えて、この表の一般化をおこなった。

<u>局面 2：零約術と正則連分数の比較</u>

1 時間目に行った連分数の説明と、この時間で行った零約術の説明から、「連分数と零約術には何か共通点がある。」という思いを持っている生徒が何人かいると考えられた。ここでの目的はこの共通点を明確することにある。そのために、まず、「3.0866142 を連分数で表してみよう」という発問をした。そしてその後、零約術との共通点を考察するように指示をした。その後で、文字を用いてこの関係を一般化した形で表した。

11	1.0000000 9527562	3.0866142 3.0000000	3
1	472438 393704	866142 472438	1
	78734	393704 393670	5
		34	

$$\frac{3.0866142}{1}=3+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cdots}}}}$$

図 5.3　零約術と連分数の関係

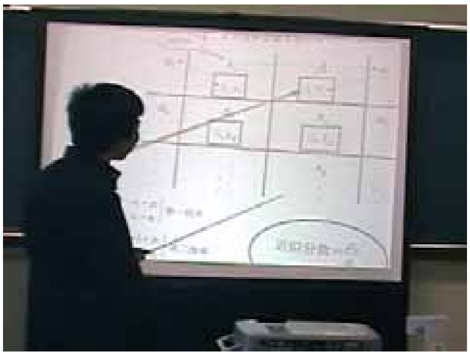


図 5.4 一般化の説明の様子

〔3 時間目〕

目標：現在の記数法（アラビア記数法）を用いて　桁を行う。また、零約術の結果から、それぞれの平方根で表される無理数の規則性を考察し、同じ規則を持つものに分類する。

2	1.000000000 828427124	1.414213562 1.000000000	1
2	171572876 142135620	414213562 343145752	2
2	29437256 24386596	71067810 58874512	2
		12193298	

<u>局面 1：平方根で表される無理数の零約術</u>

生徒にはあらかじめ、「4 人 1 組のグル

ープで、$\sqrt{1}$～$\sqrt{12}$の零約術をしなさい。
（有理数である$\sqrt{1}$と$\sqrt{4}$と$\sqrt{9}$は除く）」という課題と解答用紙、そして、そのとき方の例として$\sqrt{2}$の零約術をおこなった表を与えておいた。つまりは「1 人につき 2 つの無理数に関して零約術をおこないなさい」という課題である。

図 5.5　$\sqrt{2}$の零約術

この課題で、何人かの生徒は途中まで計算し規則性を見出し、残りの部分を推測するという方法を用いていた。

局面 2：平方根で表される無理数の規則性の考察

零約術により求められた無理数の中にどんな規則性があるのか、また、その規則性から無理数をどのように分類することができるかをグループごとに検討させ、発表をおこなった。あるグループから以下のような対話が得られた。

【対話】

生徒 A：$\sqrt{2}$を零約術で計算すると段の数字が最初の数字以外全部 2 になっているな。
生徒 B：$\sqrt{5}$と$\sqrt{8}$と$\sqrt{10}$と$\sqrt{12}$も同じ形だぜ。ここらへん全部同じグループじゃねえの。
生徒 A：$\sqrt{2}$と$\sqrt{5}$と$\sqrt{10}$は最初の段の数の 2 倍が他の段の数になっているけど、$\sqrt{8}$と$\sqrt{12}$にはそんな関係はないから、ここは別のグループになるじゃねえの

最後に事後アンケートと事後問題の説明をして授業を終了した。

6　考察

(1) 課題 1 について

課題 1：江戸時代の日本における数学の原典解釈を通じて、数学に対する興味･関心を喚起することがきるか。

1. 生徒の発言から

① 精度がすごい
② 最初はわけがわからなかったけど、仕組みがわかると計算が面白くなった。
③ 算額の問題にはどんなものがあるのか知りたい
④ 江戸時代の数学がこんなに難しいとは思わなかった。
⑤ 計算が多くて大変だったけど、計算をしているうちにだんだん法則がみえてきた面白くなった。
⑥ 表記の仕方を変えるとこれまでわからなかった法則がでてくる

上に挙げたものは生徒の授業中・授業後の発言である。
①～⑥の発言から、今回の和算の授業は生徒に数学に対する興味･関心を与えることができたといえる。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（13）
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.181-191、2006年3月

2.　事後アンケートより

【授業の感想】
①　普段の授業と違う発展した内容
②　教科書と違ってややこしくて理解に苦しんだ。
③　こんな数学もあったのだと知った
④　江戸時代の日本の数学がこんなに難しいものであるとは思わなかった。
⑤　数学が日本に関係のあるものとは思わなかった
⑥　むずかしい
【今回の授業を通じて数学に対するイメージは変わりましたか。変わった人はその理由も書いてください】
⑦　新しい考え方を知ったから
⑧　和算・連分数をしったから
⑨　規則性を見つける面白さを知った
⑩　知らないことに挑戦して、深く考えたから

上に挙げたものは生徒のアンケートの記述からの抜粋である。

①～⑤から、生徒が学校で習っている数学との違いを認識している。また、①～②および④～⑥から、生徒が和算のレベルの高さを実感したことがわかる。以上から、生徒が原典解釈をつうじて和算がどのような数学かということ認識できたといえる。このことをふまえたうえで、生徒の数学に対する興味･関心を喚起することができたかを考察する。⑦～⑩から、それぞれ内容は若干異なるが、数学の新しい一面を知りそのこと契機となり、自己の持つ数学観が変わったということがわかる。また、「いいえ」と答えた生徒の⑪では、さらに深く追求していけば、自己の数学観が変わると感じていることがわかる。この思い自身が興味･関心への契機となりえると考えられる。

以上の 1・2 より、本研究の授業実践において課題 1 は達成されたといえる。

（2）課題 2 について

課題 2：零約術による無理数へのアプローチを通じて、特徴に注目しその特徴から未知の部分を類推するという能力を高めることができるか。

3 時間の授業を終了した後に、以下の 2 つの問題のいずれかを選択しといてもらった。この問題の回答と事後アンケートから、課題 2 について検討していく。

問題 1　(12 名)
授業中分類したグループに $\sqrt{1}$ ～ $\sqrt{12}$ 以外の平方根を加えなさい。
問題 2　(19 名：誤答 2 名)
$\sqrt{101}$ を近似分数にするとき、どのような方法が考えられますか。実際にその方法で近似分数を作ってみてください。

1.　問題 1 より

問題 1 を選択した生徒の回答の方法はさまざまであった。1 つのグループに注目して新しい範例を回答したり、図 6.1 のように考え

られる　すべてのグループの範例を 1 つずつ回答するなどとい回答もみられた。

どの回答からも、生徒が自分で分類したグループに対して、その特徴を意識して新しい範例を回答していることが明確に見られた。

図 6.1　問題 1 の解答

2. 問題 2 より

問題 2 の解答として、無解答を除いて以下の 3 通り見られた。( ) の中の数字は解答した全体の人数に対する解等者の数を表す。

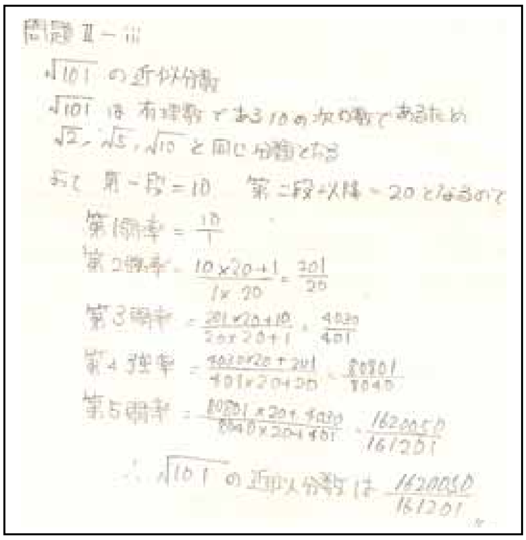


図 6.2　問題 2 に対する生徒の解答

解答 1　(2/17)

① 計算機等で $\sqrt{101}$ の近似値（小数）を出す。

② 零約術により段の数字を出す。

③ 零約術の公式を用いて、逐次近似で順に近似を行う。

解答 2　(2/17)

① 計算機等で $\sqrt{101}$ の近似値（小数）を出す。

② 零約術により段の数字を出す。

③ 連分数で近似分数を出す。

解答 3　(8/17)

① 計算機等で $\sqrt{101}$ の近似値（小数）を出す。

② 零約術により段の数字を途中まで出す。

③ $\sqrt{101}$ の特徴に注目し、後に来る数字を推測する。

④ 連分数で近似分数を出す。

解答 4　(5/17)

① $\sqrt{101}$ が $\sqrt{2}$ と同じ分類（有理数の次の数）になる。

② 段の数字を推測し、連分数で近似分数を作る。

解答 1 は、2 時間目の授業で行った零約術の計算方法とまったく同じ方法である。解答 2 は、③で連分数が使われている。零約術の連分数の関係は 2 時間目の授業で行った。「逐次近似で求める零約術の公式を使うより連分数を用いたほうが一回で導くことができて効率がいい」と思いこの方法を用いたと考えられる。解答 3 は 3，4 段目の数字を求め後の数字を推測している。解答 4 は $\sqrt{101}$ が有理数の次の数であることに注目し、$\sqrt{2}$ と同じ分類であるから、段になる数を類推し、連分数で解答したと考えられる。解答 2 は解答 1 に比べ効率が良い方法となっている。

解答 1 から 4 のうち、もっとも数が持つ特徴に注目している解答が 4 であることはい

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究（13）
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.181-191、2006年3月

うまでもない。解答 4 は問題 2 を選択した生徒のなかで半数が解答した。また、解答 3 は解答 4 とは別の特徴に注目していることがわかる。解答 3 は問題 2 に対して、解答 4 ほど作業が少なくならない解答であるが、未知の部分を類推する能力を使っていることがわかる。

3.　事後アンケートより

今回の授業を通して数学に対するイメージが変わりましたか。理由とともにお答えください

①　規則性を見つける面白さを知ったから

②　形を変えることで、複雑な数字に規則性が見えてくることが興味深いから

③　規則性を見つけることが、なぞなぞを解く感じに似ているから

数学で大切なことは何であると思いますか。

④　規則性を発見し、未知の部分に適応すること

以上のような回答が見られた。特に④の回答をした生徒は全体の半数以上（アンケート回答者 33 名に対し 17 名）であった。この結果を見る限り、生徒は規則性に注目すること、そしてその規則性を未知の部分に応用するということの重要さと面白さを感じたと考えられる。

1～3 の結果から、零約術による無理数へのアプローチを通じて、パターンに注目し、さらに、そのパターンを用いて未知の部分を類推するという能力を高めることができたと考えられる。

7　おわりに

本研究では、和算を教材とし、原典解釈を通じて、生徒の数学への興味・関心を高め、数学観が変容することについて考察した。

その結果、大部分の生徒が数学のこれまで知らない一面を知り、新しい数学観を得ることができた。しかし、中には今回の授業にある内容だけが和算の内容であり、無理数にしか適応できないとういう和算に対する狭い考えをあたえてしまった。

今後の課題としては、「数学的な見方や考え方のよさ、数学の美しさ」を感じてもらうことで数学に対する興味・関心を喚起する方策を考えると同時に、今回は和算の零約術を用いたが、和算のほかの手法における解釈学的営み・異文化体験を考えていくことがあげられる。

謝辞

研究授業の実施に際して、茨城県立筑波高等学校の赤塚明洋先生、および、栃木県立佐

野高等学校の会田英一先生をはじめとする数学科の先生方には、多大なるご協力とご指導をいただきました。ここに厚く御礼申し上げます。

注

本研究は、文部科学省科学研究費特定領域研究(2)課題番号 17011014 「代数・幾何・微積分の動的理解を促す「使える数学」教材サイトの開発に関する研究―数学用機械と JAVA による移動・変換と関数・微積ハンズオンの教材の WEB 化研究（Ⅱ）―」（研究代表者 礒田正美）による研究の一環として行われた。

引用・参考文献

文部科学省(1999). *高等学校学習指導要領*

礒田正美(2001). 異文化体験からみた数学の文化的視野の覚醒による一考察―隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて―. *筑波数学教育研究*, 20, pp.39-48

礒田正美(2002). 解釈学からみた数学的活動論の展開―人間の営みを構想する数学教育学へのペースペクティブ―. 筑波数学教育研究, 第 21 号, pp1-10

長崎栄一(2001). *算数・数学と社会・文化のつながり* 明治図書

小山正孝(1994). 平方根の指導. *CRECER 第 2 巻*. 東京書籍

R.R .スケンプ(1971).*数学学習の心理学*（藤永保/銀林浩訳）. 新曜社

大成算経

加藤平左衛門(1964). *和算の研究 整数論*. 日本学術振興会

川本亨二(1999). *江戸の数学文化*. 岩波書店

佐藤健一(2000). *新・和算入門*. 研成社

大矢真一(1987). *和算入門*. 日本評論社

平山諦(1993). *和算の誕生*. 恒星社厚生閣