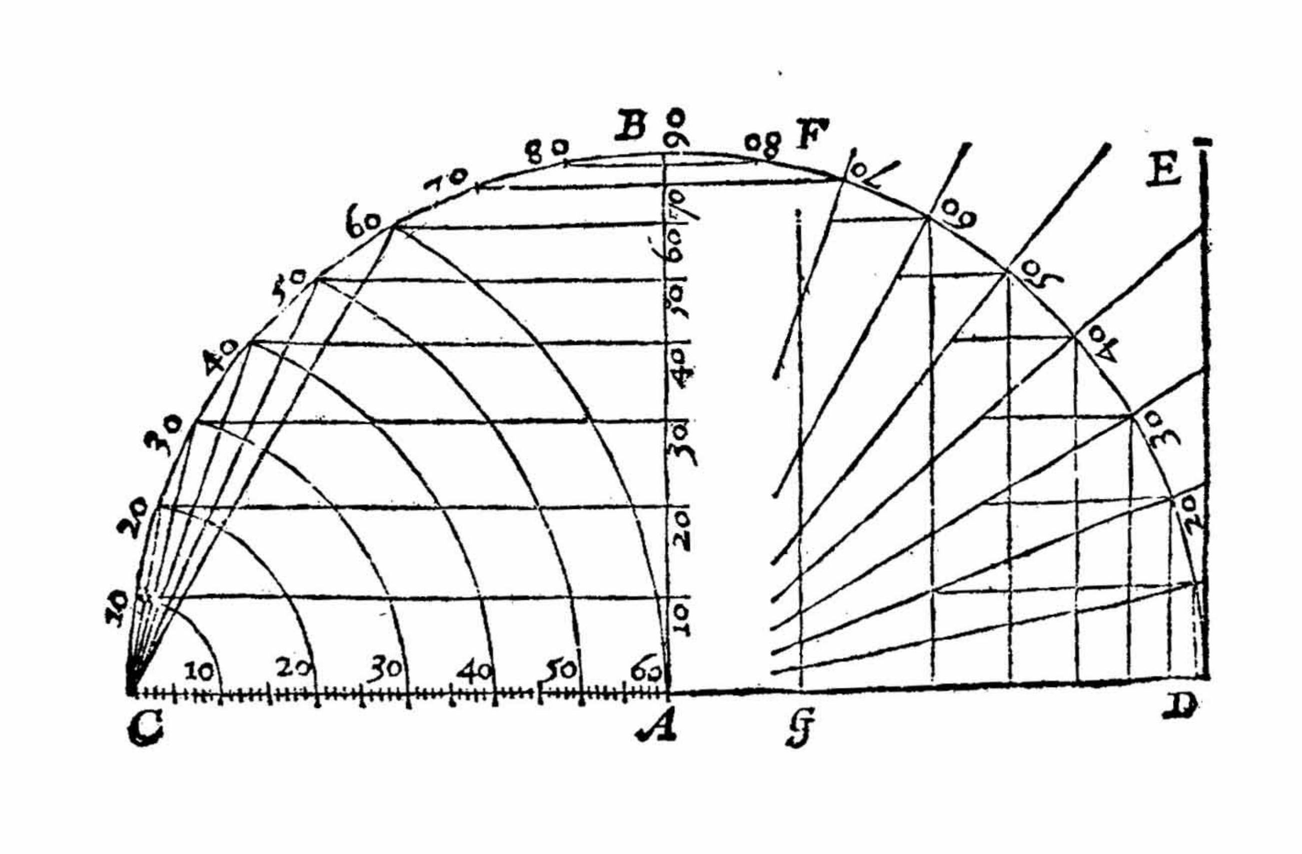
２時間目資料

授業資料

～セクターと sine～



２年　　　組　　　番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

授業者：筑波大学大学院修士課程教育研究科　近藤　俊輔

０．前回の復習

前回の授業では

- セクターの line of Sines を使って、ある角度の sine を求める方法
- 角度がそれに対応する弧で表されること
- sine、chord、Radius の定義
- セクター上での line of Sines の分割(line of Sines にどのように目盛りが刻まれたか)

を学習しました。

今回の授業では、実際にセクターの line of Sines を使って、色々な値(与えられた円の半径、半径が異なる場合の sine)を求め、セクターの原理を理解しよう。

１．line of Sines の使い方(１)

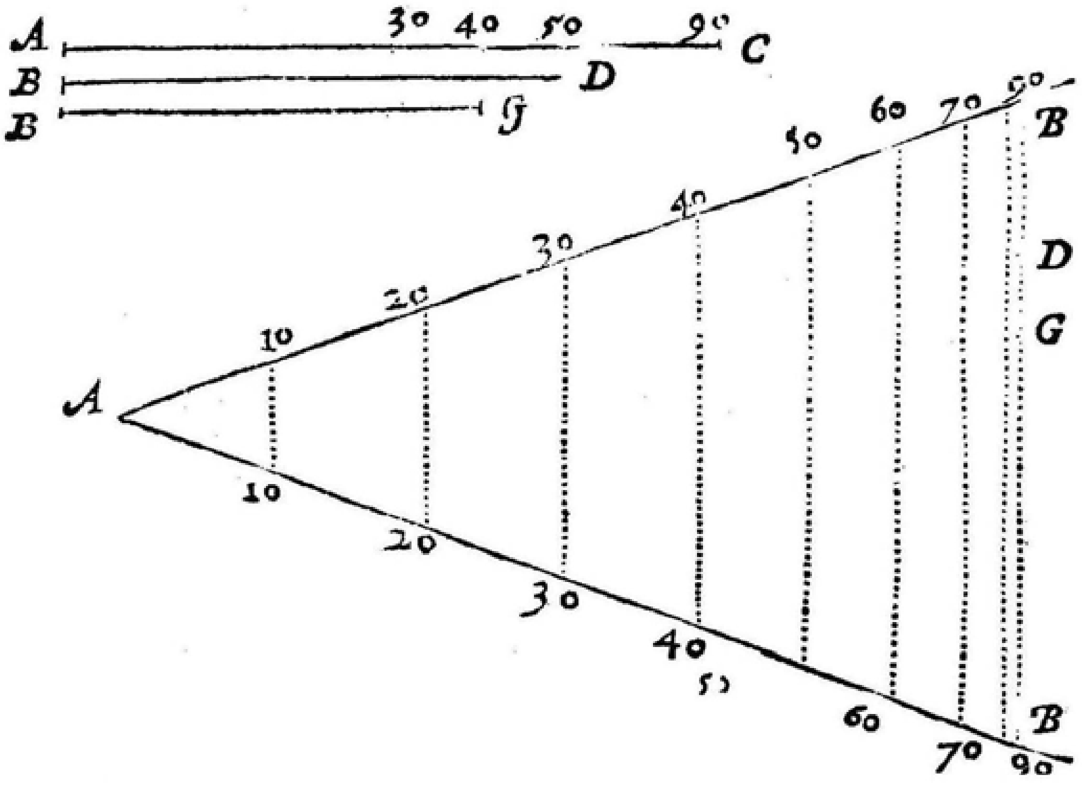
実際にセクターの line of Sines を使って、半径が line of Sines の長さと異なる円における sine の求め方を考えてみよう。

1 *The Radius being knowne to find the right ſine of any arke or angle.*

IF the Radius of the circle giuen be equall to the laterall Radius, that is, to the whole line of *Sines* on the *Sector*, there needs no farther worke, but to take the other ſines alſo out of the ſide of the *Sector*. But if it be either greater or leſſer, then let it be made a parallell Radius, by applying it ouer in the lines of *Sines*, betweene 90 and 90; ſo the parallell taken from the like laterall ſines, ſhall be the *ſine* required.

As if the giuen Radius be *A C*, and it were required to find the ſine of 50 *Gr.* & his complement agreeable to that radius.

Let *A B, A B* repreſent the lines of *ſines* on the *Sector*, and let B B, the diſtance betwee ne 90 an d 90, be equall to the giuen radius *A C*. Here the lines *A* 40, *A* 50, *A* 90, may be called the *laterall sines* of 40,50,& 90; in regard of their place on the sides of the *Sector*. The lines betweene 40 and 40, betweene 50 and 50, betweene 90 and 90, may be called the *parallell sines* of 40,50,and 90; in regard they are parallell one to the other. The whole sine of 90 *Gr.* here standing for the semidiameter of the circle, may be called the Radius. And therefore if *A C* be put ouer in the line of *Sines* in 90 and 90, and so made a *parallell radius*, his parallell sine betweene 50 and 50, shall be B D, the sine of 50 required. And because 50 taken out of 90, the complement is 40; his *parallell sine* betweene 40 and 40, shall be B G, the sine of the complement which was required.



(和訳)

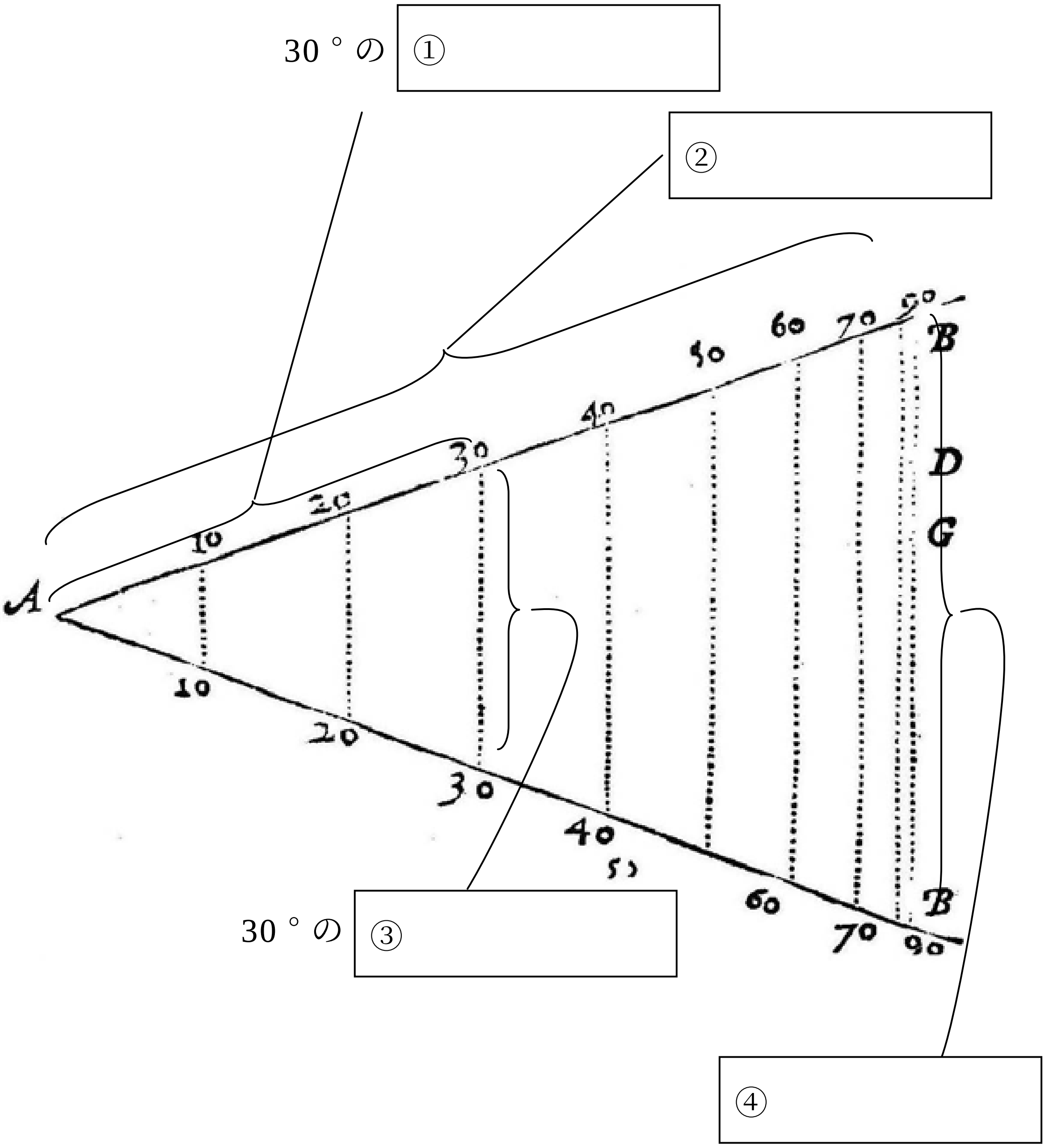
１　既知の Radius から任意の弧または角の right sine を求める

もし与えられた円の Radius が laterall Radius、つまりセクターの line of Sines の長さと等しければ、これ以上することはないが、セクター以外から他の sine を求めなければならない場合もある。しかし、もし与えられた円の Radius が laterall Radius より大きい、または小さければ、それを 90 度と 90 度の間で line of Sines にあてはめることで parallell Radius としよう：それで laterall sines の間から取られる平行線が求める sine となるだろう。

与えられた Radius を AC とし､その Radius に対する 50 度の sine とその余角の sine を求める。

セクターの line of Sines を表す AB と、90 度と 90 度の距離を表す BB は与えられた RadiusAC と等しいとする。ここで、線分 A40、A50、A60 はそれぞれ、セクター上でのそれらの位置に関して、40 度、50 度、60 度の laterall sine と呼ばれるだろう。40 度と 40 度の間、50 度と 50 度の間、90 度と 90 度の間の線分はそれぞれ、お互いに平行(parallell)なので 40 度、50 度、90 度の parallell sine と呼ばれるだろう。円の半径を表す 90 度の sine は Radius と呼ばれる。ゆえに、もし AC が line of Sines の 90 度と 90 度の間にあてはめられたならば、それは parallell Radius となり、50 度と 50 度の間のその parallell sine は BD となり、求めるべき 50 度の sine となる。そして、90 度から 50 度を引いた余角は 40 度で、40 度と 40 度の間の parallell sine が BG で、求めるべき余角の sine である。

問．原典を読んで、①～④に名称をあてはめてみよう。



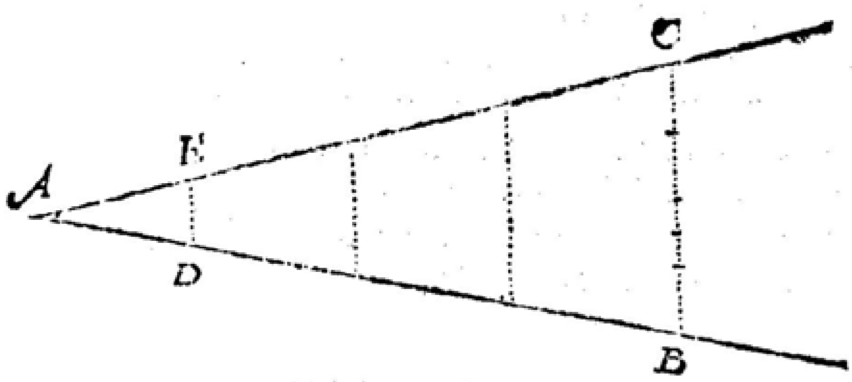
問．セクターとコンパス、定規を用いて、長さが line of Lines の 4 の半径をもつ円における 50°の sine と、その余角の sine の値を求めよ。ただし、定規は線を引くためだけに用いるとする。(ワークシート)

なぜ、今ワークシート上で行った操作で半径が異なる円における sine を求めることができるのだろうか？

2．セクターの原理

6 To ſhew the ground of the Sector.

LEt A B, A C, repreſent the leggs of the *Sector*: then ſeuering theſe two A B, A C, are equall, and their ſections A D, AE, alſo equall, they ſhall be cut proportionally: and if we draw the lines B C, D E, they will be parallell by the ſecond Pro. 6 lib. of *Euclid*, and ſo the Triangles A B C, A D E, ſhalbe equiangle; by reaſon of the common angle at A, and the equall angles at the baſe, and therefore ſhall haue the ſides proportionall about thoſe equall angles, by the 4 Pro. 6 lib. of *Euclid*.



The ſide A D, ſhalbe to the ſide A B, as the baſis D E, vnto the parallell baſis BC, and by conuerſion A B, ſhall be vnto A D, as B C, vnto D E: and by permutation A D, ſhall be vnto D E, as A B, to B C.&c. So that if A D, be the fourth part of the ſide A B, then D E, ſhall alſo be the fourth part of his parallell baſis B C. The like reaſon holdeth in all other ſections.

(和訳)

６　セクターの原理

直線 AB と AC がセクターの両脚を表しているとする。線分 AB、AC は長さが等しく切られ、それらの部分である線分 AD、AE もある比で切られている。もし、線分 BC、DE が引かれたならば、Euclid 原論の第 6 巻系 2 により、それらは平行になり、三角形 ABC、ADE は等角三角形になるだろう。その理由は共通の∠A と、底角が等しいからである。それゆえに、Euclid 原論の第 4 巻系 6 より、これら等しい角に対する辺の比も等しくなる。

辺 AB に対する辺 AD の比は、平行な底辺 BC に対する底辺 DE の比に等しい、入れ換えると AD に対する AB の比は、DE に対する BC の比に等しい、並べ替えると、DE に対する AD の比は、BC に対する AB の比に等しい、などである。よって、もし AD が辺 AB の 4 分の 1 ならば DE は平行な底辺 BC の 4 分の 1 である。この理屈は全ての他の部分においても保たれる。

(証明)

条件より、AB=____________、AD=____________

三角形の２辺が比例するように分けられるならば、区分点を結ぶ線分は三角形の残りの１辺に平行になるから、____________________________

よって、△ABCと△ADEは_______________関係にある。

互いに角を等しくする二つの三角形の等しい角(ここでは∠ADE=∠ABC)をはさむ辺は比例するから

________：________＝________：________

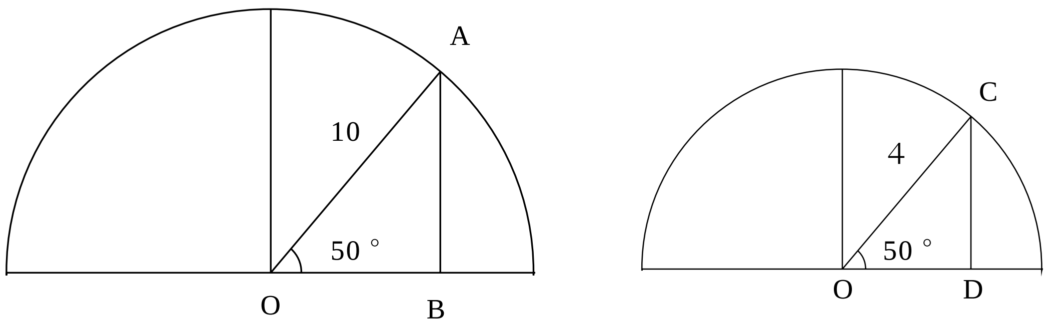
(証明終わり)

つまり、

セクターの原理には$\boxed{\qquad\qquad\qquad}$が利用されている！！

※Euclid 原論に関しては$\boxed{\text{参考}}$を参照

なぜ「１．line of Sines の使い方」の原典で記述された方法で、半径が異なる円における sine を求めることができたのだろうか？振り返ってみよう。



上の例において、

AB：半径が 10 の円における 50°の sine(laterall sine)

CD：半径が 4 の円における 50°の sine(parallel sine)

とすると、

＿＿＿＿＿：＿＿＿＿＿＝＿＿＿＿＿：＿＿＿＿＿

(∵　三角形OABと三角形OCDは＿＿＿＿＿＿＿＿関係にある。)

となる。

つまり、p.5 の図でいうと、

＿＿＿＿＿：＿＿＿＿＿＝＿＿＿＿＿：＿＿＿＿＿

よって、「１．line of Sines の使い方」の原典で記述された方法で、半径が異なる円における sine を求めることができる！

求められるのは半径が異なる円の sine だけではありません。次に、与えられた sine からその円の半径を求めてみよう。

３．line of Sines の使い方(２)

2 *The right ſine of any arke being giuen to finde the Radius.*

TVrne the ſine giuen into a parallell ſine, and his parallell *Radius* ſhall be the *Radius* required.
As if B D were the giuen ſine of 50 *Gr.* and it were required to finde the Radius: let B D be made a parallell ſine of 50 *Gr.* by applying it ouer in the lines of *Sines*, betweene 50 and 50; ſo his parallell Radius betweene 90 and 90 ſhall be A C, the Radius required.

(和訳)

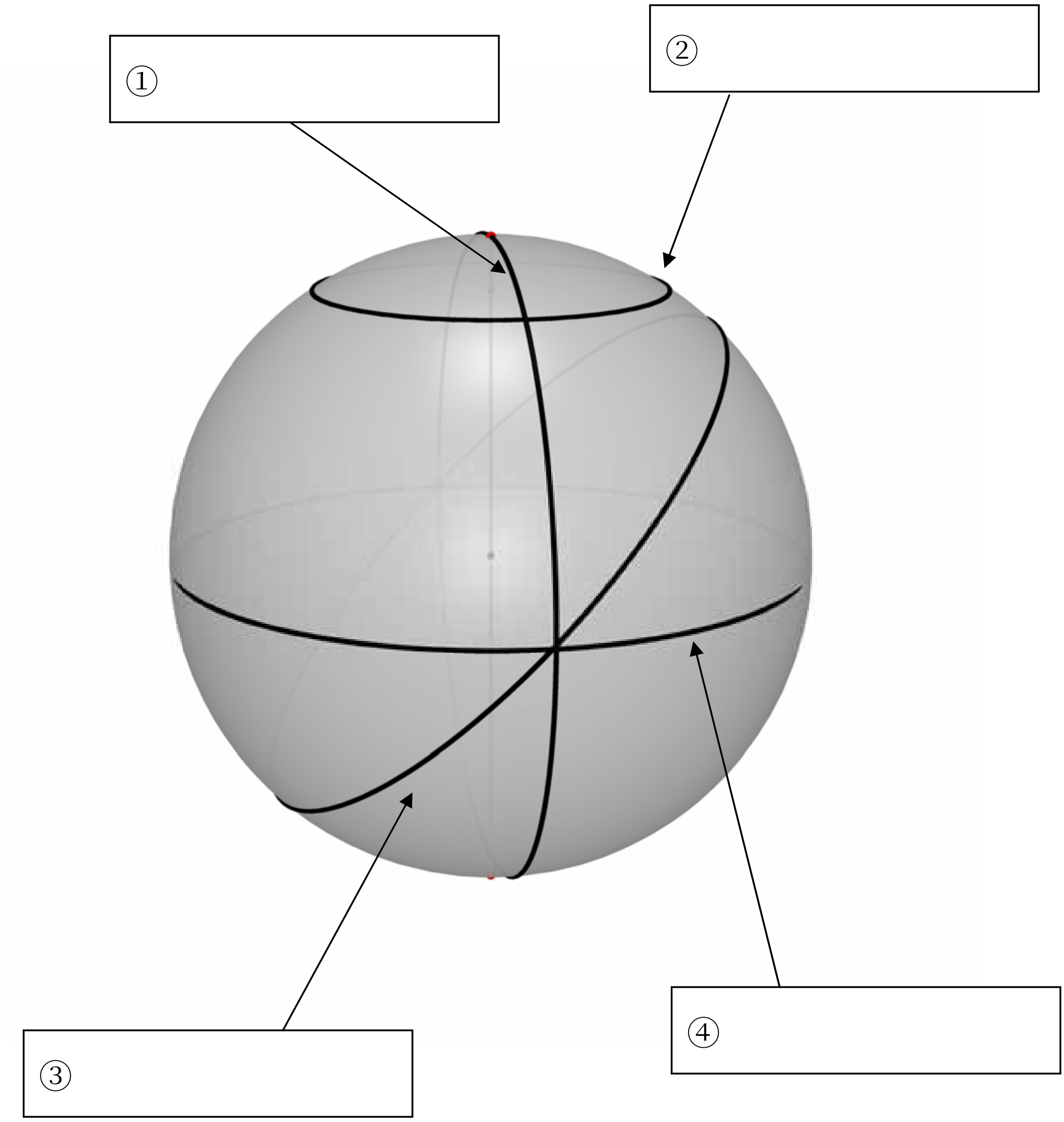
２　与えられた弧の sine からその Radius を求める

与えられた sine を parallell sine にあてはめ、その parallell Radius が求めるべき Radius である。
BD を与えられた 50 度の sine とし、その Radius を求める：BD を line of Sines の 50 度と 50 度の間にあてはめ、parallell sine とする。そして、その 90 度と 90 度の間の parallell Radius を AC とし、それが求めるべき Radius である。

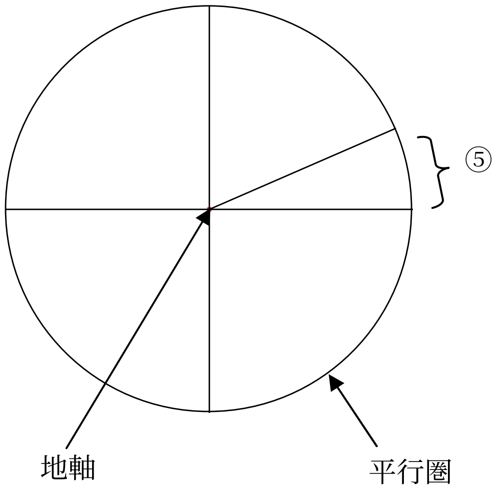
問. 与えられた 50°の sine の長さが 3.85 のとき、その円の半径を求めよ。(ワークシート)

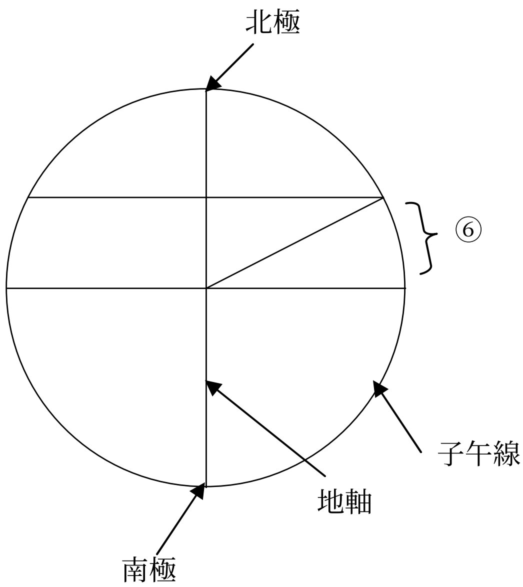
４．３時間目の授業の準備

①～⑧に適切な名称をあてはめよう。



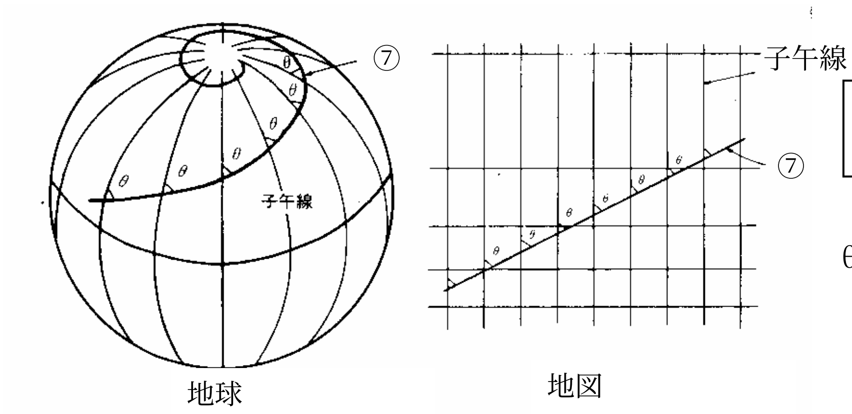
- 大圏(Great Circle)：地球の中心を含む圏をいう。
- 子午線(Meridian)：地極(北極、南極)を通る大圏をいう。地図上では、通常経線という。
- 赤道(Equator)：各子午線に直行する大圏をいう。
- 平行圏(Parallel of Latitude)：赤道に平行な小圏(地球の中心を通らない圏)をいう。地図上では通常、緯線という。





⑤

⑥



⑦

θ＝

⑧

- 緯度(Latitude)：その他の平行圏と赤道との間の子午線の弧で、通常赤道から北または南にはかり、それぞれ 90°にいたる。
- 経度(Longitude)：その他の子午線と本初子午線(0°の子午線)との間の平行圏上の弧で、本初子午線からはかり東西へ、それぞれ 180°にいたる。
- 針路(Course)：船の進むべき方向をいい真北から東まわりに 360°まで測る。
- 航程(Distance)：航程線に沿って測った距離をいう。
- 航程線(Rhumb)：地球面上の２点を結ぶ線が書く子午線を常に同一の角度をなす曲線で、一種の螺旋となる。即ち、コンパス上一定の方位を保って航海するときの航路の線をいう。

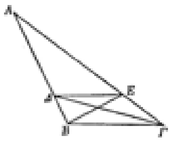
参考

●Euclid 原論

第６巻系２

２

もし三角形の１辺に平行に直線がひかれるならば，三角形の２辺を比例するように分けるであろう。そしてもし三角形の２辺が比例するように分けられるならば，区分点を結ぶ直線は三角形の残りの１辺に平行であろう。



三角形 *ABΓ* の１辺 *BΓ* に平行に *ΔE* がひかれたとせよ。*BΔ* が *ΔA* に対するように，*ΓE* が *EA* に対すると主張する。

BE, *ΓΔ* が結ばれたとせよ。

そうすれば三角形 *BΔE* は三角形 *ΓΔE* に等しい。なぜなら同じ底辺 *ΔE* 上に同じ平行線 *ΔE*, *BΓ* の間にあるから。そして三角形 *AΔE* は別ものである。ところで二つの等しいものは同じものに対し同じ比をもつ。それゆえ三角形 *BΔE* が三角形 *AΔE* に対するように，三角形 *ΓΔE* が三角形 *AΔE* に対する。ところが三角形 *BΔE* が *AΔE* に対するように，*BΔ* が *ΔA* に対する。なぜなら同じ高さ，すなわち *E* から *AB* へ下された垂線をもつから，それらは互いに底辺に比例する。同じ理由で三角形 *ΓΔE* が *AΔE* に対するように，*ΓE* が *EA* に対する。ゆえに *BΔ* が *ΔA* に対するように，*ΓE* が *EA* に対する。

また三角形 *ABΓ* の２辺 *AB*, *AΓ* が比例するように分けられ，*BΔ* が *ΔA* に対するように，*ΓE* が *EA* に対し，*ΔE* が結ばれたとせよ。*ΔE* は *BΓ* に平行であると主張する。

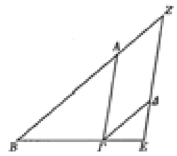
同じ作図がなされたとき，*BΔ* が *ΔA* に対するように，*ΓE* が *EA* に対し，*BΔ* が *ΔA* に対するように，三角形 *BΔE* が三角形 *AΔE* に対し，*ΓE* が *EA* に対するように，三角形 *ΓΔE* が三角形 *AΔE* に対するから，三角形 *BΔE* が三角形 *AΔE* に対するように，三角形 *ΓΔE* が三角形 *AΔE* に対する。それゆえ三角形 *BΔE*, *ΓΔE* の双方は *AΔE* に対して同じ比をもつ。ゆえに三角形 *BΔE* は三角形 *ΓΔE* に等しい。そして同じ底辺 *ΔE* の上にある。ところが同じ底辺上にある等しい三角形は同じ平行線の間にある。したがって *ΔE* は *BΓ* に平行である。

よってもし三角形の１辺に平行に直線がひかれるならば，三角形の２辺を比例するように分けるであろう，そしてもし三角形の２辺が比例するように分けられるならば，区分点を結ぶ直線は三角形の残りの１辺に平行であろう。これが証明すべきことであった。

第６巻系４

４

互いに角を等しくする二つの三角形の等しい角をはさむ辺は比例し，しかも等しい角に対する辺がそれぞれ対応する。



ABΓ, *ΔΓE* を角 *ABΓ* が角 *ΔΓE* に，角 *BAΓ* が角 *ΓΔE* に，また角 *AΓB* が角 *ΓEΔ* に等しい二つの等角な三角形とせよ。三角形 *ABΓ*, *ΔΓE* の等しい角をはさむ辺は比例し，しかも等しい角に対する辺がそれぞれ対応すると主張する。

BΓ が *ΓE* と一直線をなすようにせよ。そうすれば角 *ABΓ*, *AΓB* の和は２直角より小さく，角 *AΓB* は角 *ΔEΓ* に等しいから，角 *ABΓ*, *ΔEΓ* の和は２直角より小さい。それゆえ *BA*, *EΔ* は延長されれば交わるであろう。延長されて *Z* において交わるとせよ。

そうすれば角 *ΔΓE* は角 *ABΓ* に等しいから，*BZ* は *ΓΔ* に平行である。また角 *AΓB* は角 *ΔEΓ* に等しいから，*AΓ* は *ZE* に平行である。それゆえ *ZAΓΔ* は平行四辺形である。

ゆえに *ZA* は *ΔΓ* に，*AΓ* は *ZΔ* に等しい。そして *AΓ* は三角形 *ZBE* の１辺に平行にひかれたから，*BA* が *AZ* に対するように，*BΓ* が *ΓE* に対する。ところが *AZ* は *ΓΔ* に等しい。したがって *BA* が *ΓΔ* に対するように，*BΓ* が *ΓE* に対し，いれかえて *AB* が *BΓ* に対するように，*ΔΓ* が *ΓE* に対する。また *ΓΔ* が *BZ* に平行であるから，*BΓ* が *ΓE* に対するように，*ZΔ* が *ΔE* に対する。ところが *ZΔ* は *AΓ* に等しい。それゆえ *BΓ* が *ΓE* に対するように，*AΓ* が *ΔE* に対し，いれかえて *BΓ* が *ΓA* に対するように，*ΓE* が *EΔ* に対する。そこで *AB* が *BΓ* に対するように，*ΔΓ* が *ΓE* に対し，*BΓ* が *ΓA* に対するように，*ΓE* が *EΔ* に対することが証明されたから，等間隔比により *BA* が *AΓ* に対するように，*ΓΔ* が *ΔE* に対する。

よって互いに角を等しくする二つの三角形の等しい角をはさむ辺は比例し，しかも等しい角に対する辺がそれぞれ対応する。これが証明すべきことであった。

●三角関数表

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	[illegible]	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	[illegible]	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	[illegible]	1.0000	0.0000	