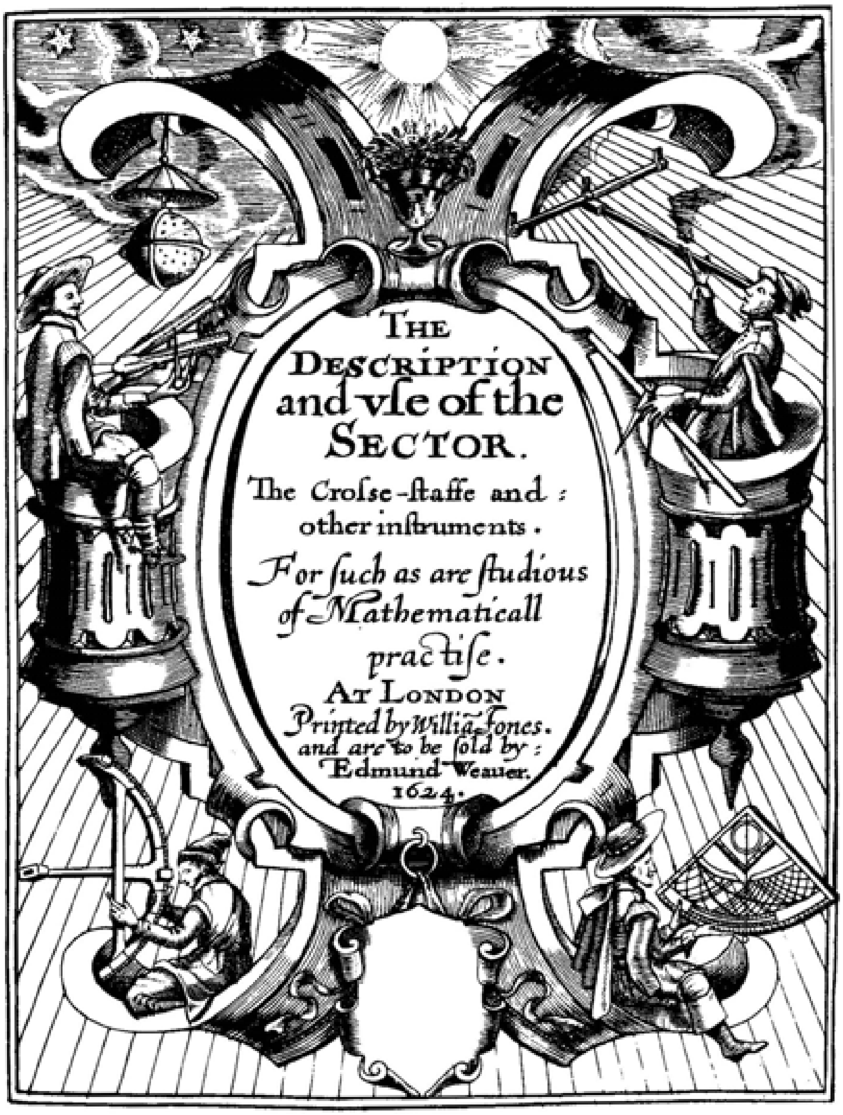
１時間目資料

授業資料

〜セクターと sine〜



２年　　　組　　　番　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

授業者：筑波大学大学院修士課程教育研究科　近藤　俊輔

０．はじめに

表紙の絵は 1624 年に出版された「The description and vse of the sector, the cross-staffe, and other instrument」という本の口絵です。この表紙の絵に描かれた人物は、それぞれ何かを持っています。

また、左の絵に描かれている人物が持っている物は、表紙に描かれた左上の人物が持っている物と形が似ているようです。

この道具らしきものは何をするためのものでしょうか？そして、何をしているのでしょうか？

今日から２日間で取り上げる数学の道具は、表紙の絵の左上の人物と、上の絵の人物が持っている道具です。この道具はエドモンド・ガンター(Edmund Gunter，1581-1626)が作ったセクター(Sector)という道具で、主に航海術における計算に用いられていました。

ガンターが作ったセクターには 12 本の目盛りがうたれていて、今回の授業ではそれらの中で line of Sines を取り上げます。

１．人物紹介

エドモンド・ガンター(Edmund Gunter，1581-1626)

- イギリスの Hertfortshire で生まれる。
- 1619 年に Gresham 大学で天文学教授になり、航海科学に多大な貢献をした。
- 1624 年にセクターの使用法などが記述されている本「The description and vse of the sector, the cross-staffe, and other instrument」を初めて出版する。

２．line of Sines

問．sin15°の値を、加法定理を用いて求めよ。(ただし $\sqrt{6}=2.4495$、$\sqrt{2}=1.4142$ とする)

※加法定理：$\sin(\alpha \pm \beta)=\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

次に、セクターの line of Sines を使って sin15°の値を求めてみよう。

手順

① コンパスを line of Sines(ピンクの line)の 0 から 15 の目盛りの幅で開く。

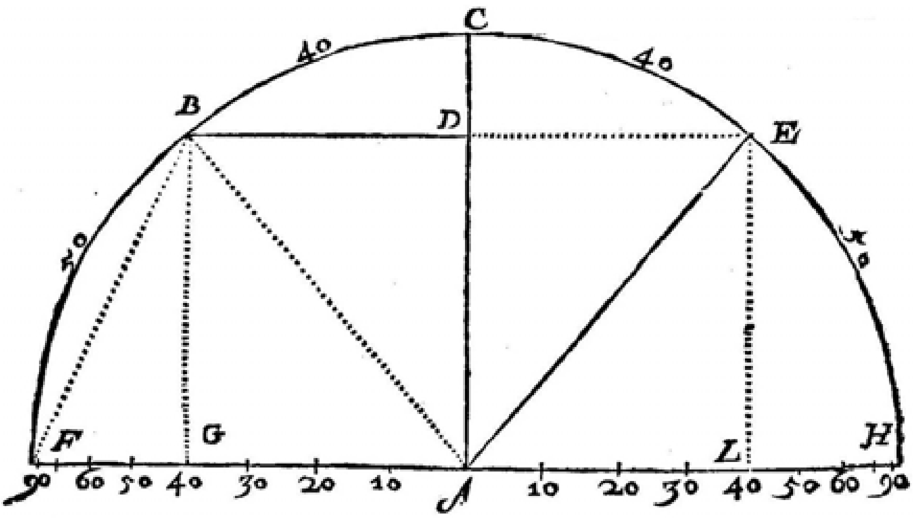
② コンパスをその幅で保ちながら、line of Lines(青の line)でその幅の長さを測る。

なぜセクターを用いて sine の値を求めることができるのでしょうか？また、皆さんが学習した sine との違いは何でしょうか？

原典「The description and vse of the sector, the cross-staffe, and other instrument」を読むことで、これらを解き明かしていきましょう。

３．角度と弧

IN the *Canon* of *Triangles*, a circle is commonly diuided into 360 *degrees*, each *degree* into 60 *minutes*, each *minute* into 60 *seconds*.



A quadrant is an arke of 90 *gr*.

The measure of an angle is the arke of a circle, described out of the angular point, intercepted betweene the sides sufficiently produced.

So the measure of a right angle is alwayes an arke of 90 *gr*. and in this example the measure of the angle *B A D* is the arke *B C* of 40 *gr*; the measure of the angle *B A G*, is the arke *B F* of 50 *gr*.

The complement of an arke or of an angle doth commonly signifie that arke which the giuen arke doth want of 90 *gr*: and so the arke *B F* is the cōplement of the arke *B C*; & the angle *B A F*, whose measure is *B F*, is the complement of the angle *B A C*; and on the contrary.

The complement of an arke or angle in regard of a semicircle, is that arke which the giuen arke wanteth to make vp 180 *gr*: and so the angle *E A H* is the complement of the angle *E A F*, as the arke *E H* is the complement of the arke *F E*, in which the arke *C E* is the excesse aboue the quadrant.

(和訳)

円は通常、360 度に分割され、それぞれの度は 60 分に分割され、更にそれぞれの分は 60 秒に分割される。

ゆえに、半円は 180 度の弧である。

四分円は 90 度の弧である。

角度の大きさは円弧であり、角の点から離れて描かれ、十分に取り出された辺の間で２点で切り取られる。

そして、直角の大きさは常に 90 度の弧であり、この例では、角 BAD の大きさは 40 度の弧 BC である。角 BAG の大きさは 50 度の弧 BF である。

弧または角の余角は、通常与えられた弧が 90 度を欲する弧である。それで、弧 BF は弧 BC の余角であり、大きさが弧 BF である角 BAF は、角 BAC の余角である。

半円に関する弧または角の余角は、与えられた弧が 180 度を欲する弧である。それで、角 EAH は角 EAF の余角であり、弧 EH は弧 FE の余角である。

問．原典を読んで、以下の文中の①～④に適切な言葉を入れよう。

ここで述べられているのは弧度法ではなく、一つの円において弧の長さは中心角に比例するから、角度の大きさを弧で言い換えることができるということである。

つまり、左のページの図において、

180°に対応する弧は①________________

90°に対応する弧は②________________

∠BADの大きさ 40°に対応する弧は③______________

∠BAGの大きさ 50°に対応する弧は④______________

である。

※弧度法については、参考を参照

４．sine と chord

A *Chorde* is a right line ſubtending an arke : ſo *B E* is the chorde of the arke *B C E*, and *B F* a chorde of the arke *B F*.

A *right Sine* is halfe the chorde of the double arke, viz. the right line which falleth perpendicularly from the one extreme of the giuen arke, vpon the diameter drawne to the other extreme of the ſaid arke.

So if the giuen arke be *B C*, or the giuen angle be *B A C*, let the diameter be drawne through the center *A* vnto *C*; and a perpendicular *B D* be let downe from the extreme *B*, vpon *A C*; this perpendicular *B D* ſhall be the *right ſine* both of the arke *B C*, and alſo of the angle *B A C*: and it is alſo the halfe of the chord B E, ſubtending the arke B C E, which is double to the giuen arke B C. In like maner, the ſemidiameter F A, is the *right ſine* of the arke F C, and of the right angle F A C; for it falleth perpendicularly vpon A C, and it is the halfe of the chord F H.

This whole Sine of *90 gr.* is hereafter called *Radius*; but the other *Sines* take their denomination from the degrees and minutes of their arks.

(和訳)

chord は弧に対する線分である：それで、BE は弧 BCE の chord であり、BF は弧 BF の chord である。

(right) sine は２倍弧の chord の半分、すなわち与えられた弧の端点の一つから、その弧のもう一つの端点に対して引かれた直径に垂直に降ろされた線分である。

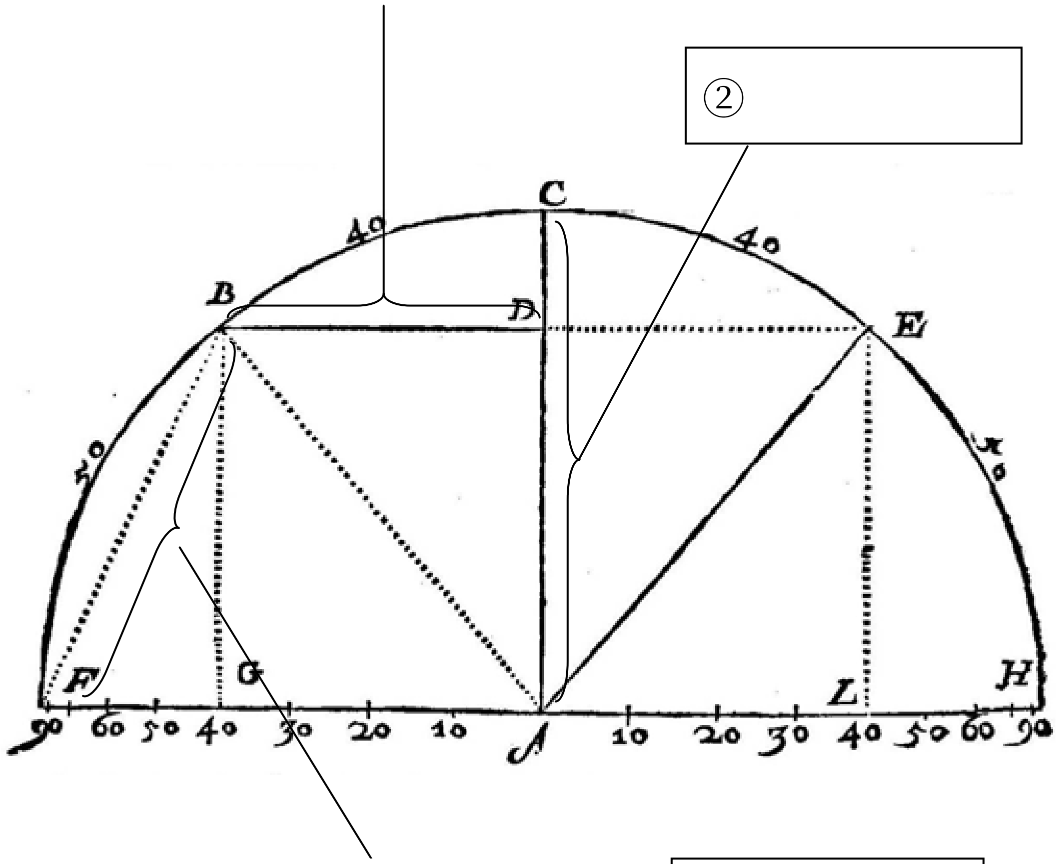
それで、もし与えられた弧が BC、または与えられた角が BAC ならば、直径が中心 A を通って C に向かって引かれたとしよう；そして垂直線 BD が端点 B から AC 上に引かれたとすると、この垂直線 BD が弧 BC または角 BAC の right sine である。そして、それは弧 BCE に対する chordBE の半分でもあり、弧 BCE は与えられた弧 BC の２倍である。

90 度の sine の全ては今後は Radius と呼ぶことにするが、他の sine はそれらの度や分から名称を持つ。

問．左のページの原典を読んで、①〜③に名称を当てはめてみよう。

弧 BC または角 BAC の ①

②



弧 BF または角 BAF の ③

また、

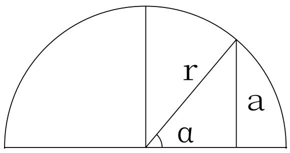
(弧 BCE の　　　　　)

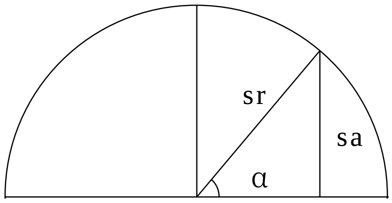
＝(弧 BC の　　　　　)×

が成り立つ。

ここで、現代の数学における sine と、原典「The description and vse of the sector, the cross-staffe, and other instrument」で定義された sine との違いを理解しよう。

現代の数学では

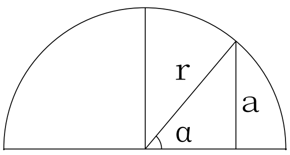


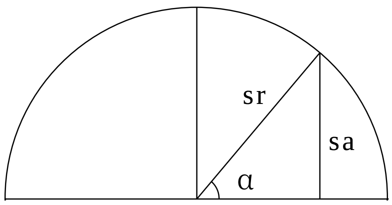


$\sin\alpha =$ ――――　　　　$\sin\alpha =$ ――――

半径が違っても、sine は一定の値となる。

一方、原典「The description and vse of the sector, the cross-staffe, and other instrument」で定義された sine は





半径rの時の　$\sin\alpha =$ ____________　　半径srの時の　$\sin\alpha =$ ____________

半径の大きさによって、同じ角度に対する sine でも、
その値は変わる。

４．line of Sines の分割

line of Sines の目盛りはどのように刻まれているのだろうか？

5 *To diuide the lines of* Sines *and* Tangents *on the ſide of the Sector.*

VPon the center *A*, and ſemidiameter equall to the line of *Lines*, deſcribe a ſemicircle *A B C* D, with *A B*, perpendicular to the diameter *C* D. Then diuide the quadrants *C B*, *B* D, each of them into 90. and ſubdiuide each degree into 2 parts: For ſo, if ſtreight lines be drawne parallell to the diameter *C* D, through theſe 90, and their ſubdiuiſions they ſhall diuide the perpendicular *A* B vnequally into 90.

And this line A B ſo diuided ſhall be the line of *Sines*, and muſt be transferred into the *Sector*. The numbers ſet to them are to be 10. 20. 30. &c. vnto 90 as in the example.

和訳

５　セクター上での lines of Sines の分割

中心 A 上で、line of Lines と等しい半径は、半円 ABCD を描き、AB は直径 CD に垂直である。それから、四分円の CB と BD をそれぞれ 90 に分割し、それぞれの度を２つに再分割する。もし、これらの 90 を通って直径 CD に平行な直線が描かれたならば、それらは垂線 AB を同等ではなく 90 に分割するだろう。

そして、この分割された線分 AB は line of Sines となり、セクターに写される。目盛りに打たれた数字は 10、20、30、・・・90 となっている。

問．原典を読み、分度器と定規を用いてワークシートにある line of Lines の半分の長さの半径の半円で、実際に line of Sines の分割をしてみよう。

５．line of Sines の使い方(次回予告)

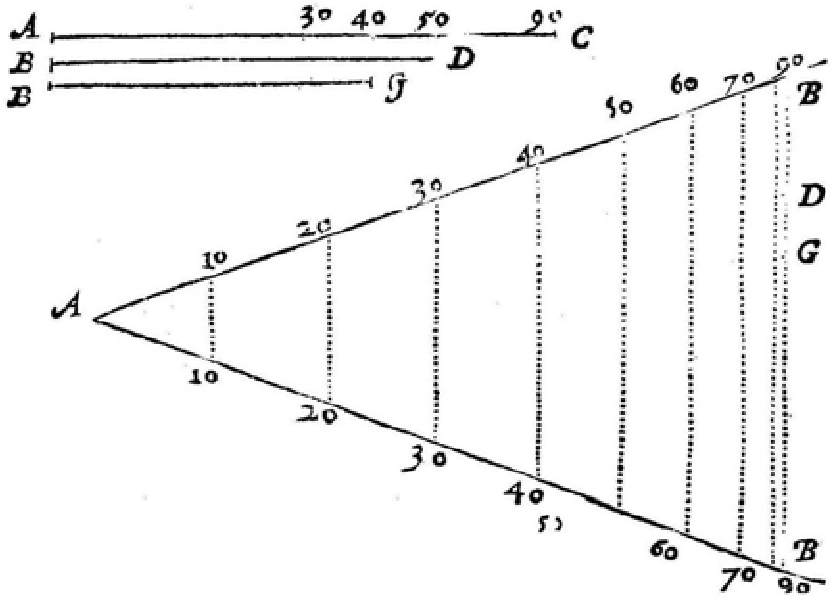
実際にセクターの line of Sines を使って、半径が line of Sines の長さと異なる円における sine の求め方を考えてみよう。

1 *The Radius being knowne to ſind the right ſine of any arke or angle.*

IF the Radius of the circle giuen be equall to the laterall Radius, that is, to the whole line of *Sines* on the *Sector*, there needs no farther worke, but to take the other ſines alſo out of the ſide of the *Sector*. But if it be either greater or leſſer, then let it be made a parallell Radius, by applying it ouer in the lines of *Sines*, betweene 90 and 90; ſo the parallell taken from the like laterall ſines, ſhall be the *ſine* required.

As if the giuen Radius be *A C*, and it were required to find the ſine of 50 *Gr*.& his complement agreeable to that radius.

Let *A B, A B* repreſent the lines of *ſines* on the *Sector*, and let B B, the diſtance betweene 90 and 90, be equall to the giuen radius *A C*. Here the lines *A* 40, *A* 50, *A* 90, may be called the *laterall ſines* of 40,50,& 90; in regard of their place on the ſides of the *Sector*. The lines betweene 40 and 40, betweene 50 and 50, betweene 90 and 90, may be called the *parallell ſines* of 40,50, and 90; in regard they are parallell one to the other. The whole ſine of 90 *Gr*. here ſtanding for the ſemidiameter of the circle, may be called the Radius. And therefore if *A C* be put ouer in the line of *Sines* in 90 and 90, and ſo made a *parallell radius*, his parallell ſine betweene 50 and 50, ſhall be B D, the ſine of 50 required. And becauſe 50 taken out of 90, the complement is 40; his *parallell ſine* betweene 40 and 40, ſhall be B G, the ſine of the complement which was required.



(和訳)

１　既知の Radius から任意の弧または角の right sine を求める

もし与えられた円の Radius が laterall Radius、つまりセクターの line of Sines の長さと等しければ、これ以上することはないが、セクター以外から他の sine を求めなければならない場合もある。しかし、もしそれがより大きい、またはより小さければ、それを 90 度と 90 度の間で line of Sines にあてはめることで parallell Radius としよう：それで laterall sines のようなものから取られる平行線が求める sine となるだろう。

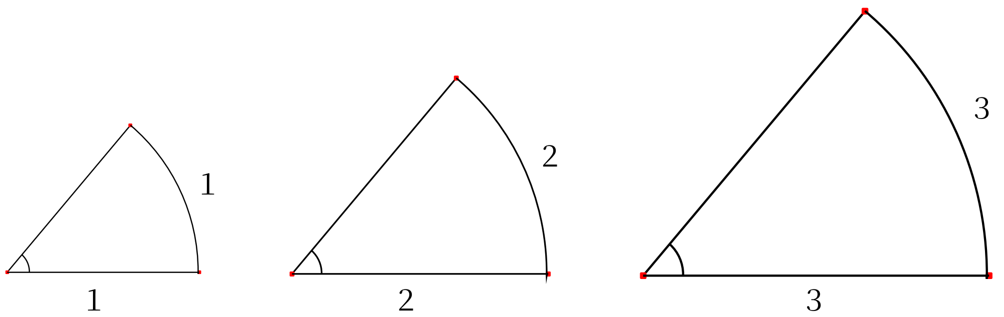
与えられた Radius を AC とし、その radius に対する 50 度の sine とその余角の sine を求める。

セクターの line of Sines を表す AB と、90 度と 90 度の距離を表す BB は与えられた RadiusAC と等しいとする。ここで、線分 A40、A50、A60 はそれぞれ、セクター上でのそれらの位置に関して、40 度、50 度、60 度の laterall sine と呼ばれるだろう。40 度と 40 度の間、50 度と 50 度の間、90 度と 90 度の間の線分はそれぞれ、お互いに平行(parallell)なので 40 度、50 度、90 度の parallell sine と呼ばれるだろう。円の半径を表す 90 度の sine は Radius と呼ばれる。ゆえに、もし AC が line of sines の 90 度と 90 度の間にあてはめられたならば、それは parallell Radius となり、50 度と 50 度の間のその parallell sine は BD となり、求めるべき 50 度の sine となる。そして、90 度から 50 度を引いた余角は 40 度で、40 度と 40 度の間の parallell sine が BG で、求めるべき余角の sine である。

参考

●弧度法

下の３つの扇形は、それぞれ円の半径と同じ長さの弧をもつ扇形である。これらはすべて相似な図形であり、中心角もすべて同じ大きさである。



上の例のように、半径 r の円において、長さが r の弧に対する中心角の大きさは、r の値に関係なく一定である。この角の大きさを**１ラジアン**あるいは**１弧度**といい、これを単位として角の大きさを表す方法を**弧度法**という。

●三角関数表

θ	sin θ	cos θ	tan θ	θ	sin θ	cos θ	tan θ
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	[illegible]	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	[illegible]	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	[illegible]	1.0000	0.0000	