中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp167-180、2006年3月

航海における測量と歴史的道具に関する授業研究

―セクターの line of Sines と海図を題材として―

筑波大学大学院修士課程教育研究科
近藤　俊輔

章構成

要約

本研究では、歴史的道具を使う数学的活動と、その使用法や原理が記述された本の原典解釈を、セクターの line of Sines と海図を題材として行う授業を実践した。この授業を通して、生徒が道具の発明者・利用者の立場を想定し、数学を人間の営みとして捉え、文化や社会において数学が果たしている役割を理解できたことが確認された。

キーワード：セクター、原典解釈、line of Sines、海図

1．はじめに

現行の高等学校学習指導要領解説数学編では、高等学校における数学教育の意義として、「数学を学習する意義、数学的な見方や考え方のよさ、数学の美しさ、文化や社会生活において数学が果たしている役割などを理解させることにより、数学への興味・関心をもたせ、学習への意欲を高めること」が大切と述べられている。

しかし、平成 14 年度に実施された高等学校教育課程実施状況調査・数学Ⅰの質問紙調査において、「数学を勉強すれば、私のふだんの生活や社会生活の中で役立つ」に対して肯定的な回答をした生徒は 33.3%であった。この結果は、3 人に 2 人の生徒が、数学と「ふだんの生活や社会生活」とを結び付けられない、つまり、「文化や社会生活において数学が果たしている役割」を理解していないことを示唆するものだと筆者は考える。よって、「学習への意欲を高める」ためには「文化や社会生活において数学が果たしている役割」を理解することが重要であり、そのためには、数学を人間の文化的営みとして捉えることが必要である。

礒田(2002)は「実際の歴史上の原典を開き、その原典を記した人の立場や考え方を想定し、その人に心情を重ねて解釈すると、今、自分たちの学ぶ数学が、異なる時代・文化背景に生きた人々によって、まるで異なる思考様式で研究され、表

現されていたことが体験できる。それによって、自分たちが学ぶ数学も生き生きした人間の営みとして改めて認めなおすのである」と述べ、歴史上の原典を解釈する活動の有効性を主張している。また、礒田(2003)は「数学を人の営みとして理解するには、その営みを行う人の立場になって考える必要がある」とした上で、「道具を実際に利用してみることで、人は、その道具の開発者・利用者が何故それを用いたのか、彼らが実際どのように考えたのかを知るきっかけを得ることができる」と述べ、道具の利用が他者の立場の想定に役立つことを主張している。つまり、原典解釈と、それにちなんだ歴史的道具を実際に利用する数学的活動を通して、他者の立場を想定し、その道具が使われた時代の数学を知るという異文化体験により、自分たちが学ぶ数学を人間の営みとして捉えることができるのである。

以上より、本研究では、数学史を内容とする文献を利用したテキストと、歴史的道具としてガンター(エドモンド・ガンター、1581-1626)のセクターを用いた授業研究を行い、それによって生徒が数学を人間の文化的営みとして捉え、「文化や社会生活において数学が果たしている役割」を理解することができたどうかを考察する。

ガンターのセクターを歴史的道具として用いた先行授業研究として、堀内(2005)が挙げられる。堀内の授業研究では、ガンターのセクターに刻まれた 12 本の目盛りのうち、line of Lines、line of Superficies、line of Solids の 3 本を取り上げている。line of Lines は乗除の計算を行うことができ、line of Superficies、line of Solids はそれぞれ平方根、立方根を求めることができる。しかし、これらの目盛りは、ガンターのセクターが主に用いられていた航海における測量に直接的に関わった目盛りであるとは考えにくい。そこで、本研究ではセクターの line of Sines を取り上げることによって、セクターが航海において船上で計算をする時に用いられていた事実に即して授業を展開でき、より「道具の開発者・利用者が何故それを用いたのか、彼らが実際どのように考えたのかを知るきっかけを得ることができる」と考え、実践した。

2．研究目的・研究方法

(1) 研究目的

本研究では、以下を研究目的とする。

研究目的：セクターに関する原典解釈と、実際にセクターを用いる数学的活動を取り入れた授業を通して、数学を人間の文化的営みとして捉え、文化や社会生活において数学が果たしている役割を理解することができるかを考察する。

この研究目的に対して、以下の課題を設定する。

課題 1：セクターに関する原典解釈と、実際にセクターを使った数学的活動を通して、当時のセクターの開発者・利用者の立場や考え方を想定できたか。

中学校･高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp167-180、2006年3月

課題 2：課題 1 を受けて、航海における計算に使われたセクターに隠された数学を認識し、数学を人間の営みとして捉え、文化や社会生活において数学が果たしている役割を理解することができたか。

(2) 研究方法

数学史を内容とする文献を利用したオリジナル教材を用いた授業研究を行い、授業前後に実施したアンケートと、ビデオによる授業記録の分析により、上記の課題が達成されたかを考察する

3．セクターの教材化

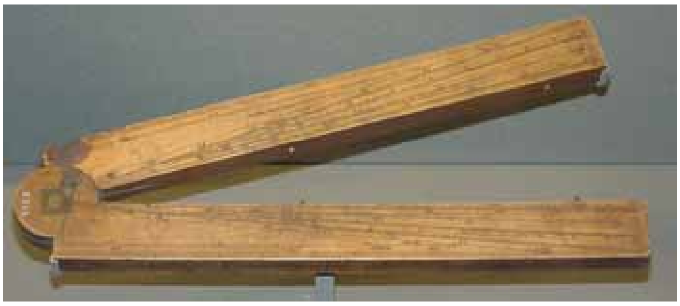


図 1　セクターの実物
(出展：パリ国立技術博物館)

セクターは比例コンパス、軍用コンパスとして知られ、16 世紀後半から近代まで広く使われたもの計算器具である。このセクターを最初に発明したのはだいたい 1597 年にガリレオ・ガリレイ(1564-1642)によるものと考えられているが、その経緯は様々であり、測量や大砲に関係のある名もない軍人による発明であるという説もある。ガンターは、主に土地の測量のためにデザインされたトーマス・フード(1556-1620)のセクターを、より一般的な応用のためにデザインしなおした(図 1)。ガンターのセクターの構造や原理には、三角形の相似、乗法、除法、平方根、立方根、三角比等、様々な数学が含まれている。

ガンターは 1624 年にセクターをはじめとする数学的な道具の原理や使用法に関して記述された「The description and vse of the sector, the cross-staffe, and other instruments」という本を出版した。この本の中で取り上げられているセクターの表面には、用途の異なる 12 の目盛りが刻まれている(図 2)。それぞれ以下の通りである。

①line of Lines：乗除の計算を行える。
②line of Superficies：平方根を求められる。
③line of Solids：立方根を求められる。
④line of Sines：サインを求められる。
⑤line of Tangent：タンジェントを求められる。
⑥line of Secants：セカントを求められる。
⑦line of Meridians：メルカトル図法が実際とどれほど異なるかを測ることができる。

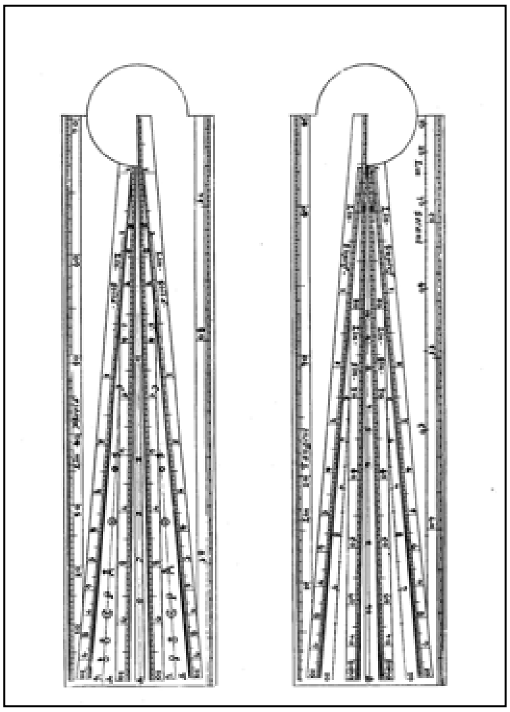


図 2　セクターの目盛り

⑧line of Quadrature：正 n 角形の一辺の長さを求められる。

⑨line of Segments：円弧を与えられた比で分割することができる。

⑩line of Inscribed bodies in the Sphere：球体の半径と、正 4 面体、立方体、正 8 面体、正 12 面体、正 20 面体の一辺の長さを測ることができる。

⑪line of Equated bodies：与えられた直径を持つ球体と等しい体積の正 4 面体、立方体、正 8 面体、正 12 面体、正 20 面体の一辺の長さを測ることができる。

⑫line of Mettals：同じ重さの金、水銀、鉛、銀、銅、鉄、錫の球体の半径を求められる。

図 2 の左には①、③、④、⑤、⑥、⑦が刻まれ、右には②、⑧、⑨、⑩、⑪、⑫が刻まれている。

本授業研究では、これらの 12 本の目盛りの中で④line of Sines を取り上げる。この目盛りは角度に関する計算の多くに使われ、特に、航海において非常に重要であった。そして、原典「The description and vse of the sector, the cross-staffe, and other instruments」の中で、海図上での測量における使用法等が具体的に記述されている。よって、原典での line of Sines の原理や使用法に関する記述を読み解き、実際にその目盛りを用いる数学的活動を行うことで、航海において数学が果たした役割を理解することができ、本研究の目的・課題を達成するのに適切だと考える。

本授業研究では、line of Sines のほかに、①line of Lines も使用するが、この目盛りは、乗法や除法の計算のために使用するのではなく、目盛りが等間隔で刻まれているため、長さを測るための定規の役割を果たす。

4．セクターの数学的解説

(1) セクターの原理

セクターの原理を、原典を基に説明する

図 3 において、A はセクターの両脚の交点、辺 AB と AC はセクターの脚を表しているとする。AB=AC、AD=AE となるように点 E、D を取るので、ユークリッド原論の第 6 巻系 2 より、辺 BC と辺 DE は平行に引かれる。同位角は等しくなるので、

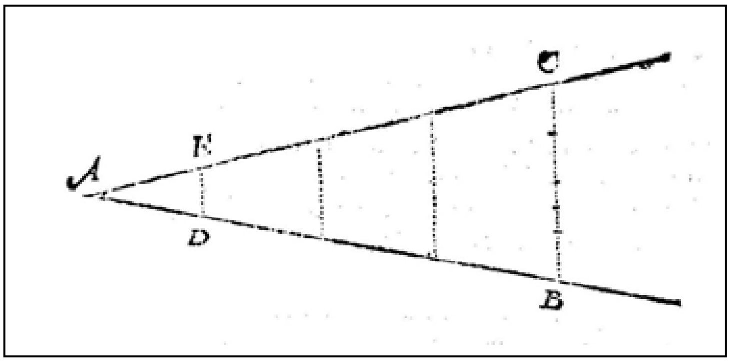


図 3　セクターの原理

$$\angle AED=\angle ACB、\angle ADE=\angle ABC$$

となり、2 つの三角形の 2 組の角が等しくなるので、

$$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$$

となる。ゆえに、等しい角に対する辺の比も等しくなるので、

$$AE:AC=AD: AB=DE:BC$$

中学校･高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp167-180、2006年3月

が成り立つ。

つまり、セクターの原理には三角形の相似が利用されている。

(2)line of Sines の分割

line of Sines の分割（目盛りがどのように刻まれているか）を、原典を基に説明する。

図 4 の半円において、半径は line of Lines の長さと等しく、半径 AB は直径 CD に垂直である。それから、弧 CB と弧 BD をそれぞれ、等しく 90 に分割し、それぞれの分割を更に 2 分割する(セクターの line of Sines の目盛りは実質、90 目盛りではなく、180 目盛りである)。もし、これらの分割した点を通って、直径 CD に平行な直線が引かれたならば、それらの直線は垂線 AB を同等ではなく 90 に分割する。

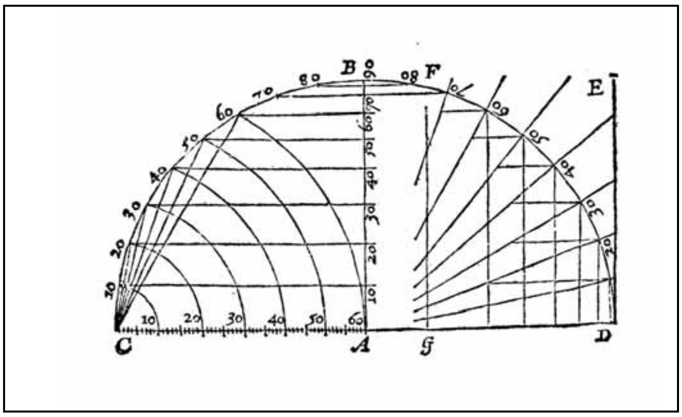


図 4　line of Sines の分割

これがセクターの line of Sines の目盛りとなる。

(3)現代のサインと原典で定義されたサインの違い

現代のサインでは、図 5 の左の図では sinα＝sa/sr＝a/r、右の図では sinα＝a/r と表され、半径が異なってもサインの値は一定である。一方、原点の中で定義されたサインでは、図 5 の左の図では sinα＝sa、右の図では sinα＝a と表され、半径が異なればサインの値も異なる。例えば、原典で定義されたサインでは、半径が 10 倍になれば、サインの値も 10 倍になる。これが、現代のサインと、原典で定義されたサインの違いである。

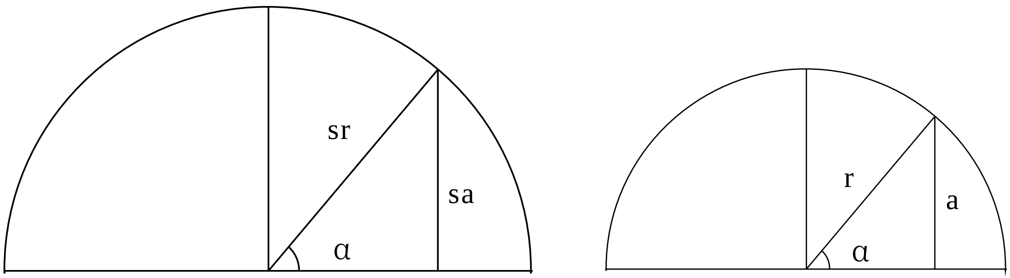


図 5　現代のサインと原典で定義されたサインの違い

5．セクターを題材とした授業概要

（1）授業環境

日時：平成 17 年 12 月 20 日、21 日（50 分×3 時間）

対象：千葉県立高校第二学年（2 クラス）

準備：コンピュータ（Windows）、Microsoft Power Point、プロジェクター、実物投影機、授業記録用のデジタルビデオカメラ、コンパス、分度器、

セクター(厚紙で作られたもの)、事前･事後アンケート、授業テキスト、ワークシート

(2) 授業展開

＜１時間目＞

〔目標〕

セクターの line of Sines の分割の仕方と、現代のサインと原典で定義されているサインの違いを理解し、セクターを用いてサインの値を求められることを理解する。

〔授業概要〕

まず、3 時間の授業で取り上げる数学的道具のセクターの紹介として、ガンターのセクターは航海における計算に用いられていたこと、そしてガンターの人物紹介を、テキストを使って行った。

次に、厚紙で作られたセクターを生徒に配布した。このセクターの line of Sines はピンク色に塗られ、line of Lines は青く塗られている。

続いて、sin15°の値を求めるという問題に、加法定理と、セクターとコンパスを用いるという 2 種類の方法で取り組んでもらった。セクターとコンパスを用いての sin15°の求め方は次の通りである。(テキストから抜粋)

①コンパスを line of Sines(ピンクの line)の 0 から 15 の目盛りの幅で開く。

②コンパスをその幅で保ちながら、line of Lines(青の line)でその幅の長さを測る。

【生徒同士の会話】

生徒 A：使い方がさっぱりわかんないんだけど・・・。(コンパスを持ちながら止まっている)

生徒 B：こうやってやるんじゃないの？(コンパスを line of Sines の 0 から 15 の目盛りで開く)それで、青のラインでこうでしょ。(line of Lines でその幅を測る)

生徒 A：あ、それでいいんだ。え、だいたい 2.6・・・。

加法定理で求めた sin15°の値は 0.2588 で、テキストに載せられた三角関数表でその値の正しさを確認した。セクターとコンパスで求めた sin15°の値は約 2.6(多少の誤差は生じる)となり、加法定理を用いて求めた値と異なる値となった。ここで、0.2588×10=2.588 となり、これは 2.6 に近い値であり、2 種類の方法で求められたサインの値の間には何か関係があるのではないかという問題提起をした。

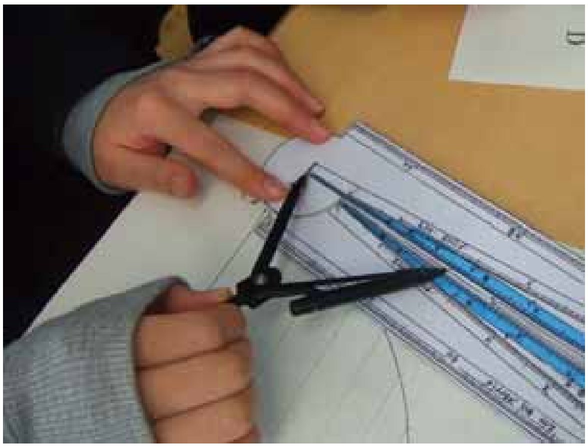


図 6　セクターの操作をする生徒

原典の中では、よく「角 ABC または弧 AC の sine」という表現が使われる。これは、角と弧を同一視している表現である。この表現に慣れるために、原典の和訳を読みながら、適切な語句を穴埋めするという活動を行い、同時に、四分円に関する角

中学校･高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp167-180、2006年3月

または弧の余角、半円に関する角または弧の余角という用語の確認も行った。

次に、原典の中で定義されているサインと、現代のサインは異なるため、それが記述されている原典の文の和訳を読んで、穴埋めをする活動を通してその違いを理解できた。特に、90°のサインは Radius と呼ぶことも確認した。例えば、図 7 において、弧 BC または角 BAC のサインは線分 BD であり、半径の大きさによって同じ角度に対するサインでもその値は変わることが理解できた。

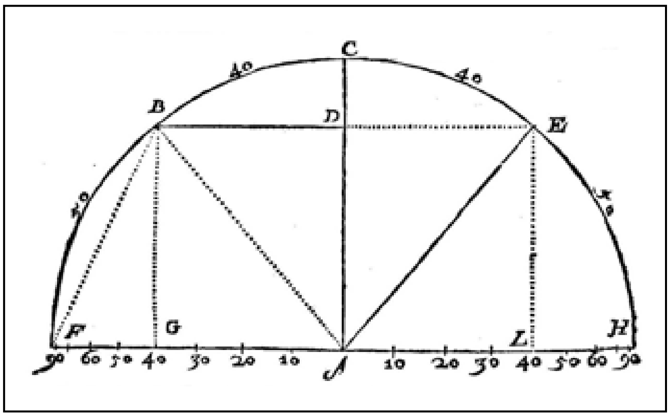


図 7　サインの定義

ここで、先に行った、sin15°の値を、加法定理と、セクターとコンパスを用いるという 2 種類の方法で求める活動を振り返り、なぜ加法定理で求めた値と、セクターとコンパスで求めた値は異なり、しかも 1:10 の関係があるのかを解説した。

最後に、セクターの line of Sines の目盛りがどのように分割されているのかを理解するために、それに関して記述されている原典の文の和訳を読みながら、分度器と定規(線を引くためだけに使用する)を用いて、実際にワークシート上で作図する活動を行い、1 時間目の終わりとした。

＜2 時間目＞

〔目標〕

セクターの line of Sines を使って様々な値を求める活動を通して、セクターの原理を理解する。

〔授業概要〕

2 時間目の内容に入る前に、前回の授業の最後に行った line of Sines の分割の問題の解説を生徒にしてもらった。その生徒には実際に教壇に出てきてもらい、ワークシート上で作図したものを実物投影機でスクリーンに映しながら解説してもらった。(図 8)これにより、間違った方法で line of Sines の分割の作図を行った生徒の理解も得られ、前回の授業で取り扱った、現代のサインと原典で定義されているサインとの違いと合わせて、line of Sines を用いてサインの値が求められることが理解できた。

これらを前提に、まずは、半径が line of Sines の長さと異なる円におけるサインの求め方を原典の和訳を読みながら考えてもらった。

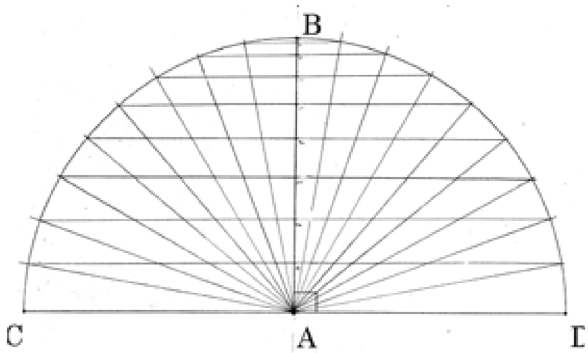


図 8　line of Sines の分割を行った生徒のワークシート

原典に記述されている用語として、line of Sines に刻まれた sin90°の長さは laterall Radius、90°以外の任意の角度の sin の長さは laterall sine、セクターを広げたときの 90 の目盛りと 90 の目盛りの間の長さを parallell Radius、90 以外の同じ目盛り同士の間の長さを parallell sine と呼ぶことを、穴埋め問題で確認した。図 9 でいえば、AB が laterall Radius、A30 が 30°の laterall sine、BB が parallell Radius、30 と 30 を結んだ線分が 30°の parallell sine である。

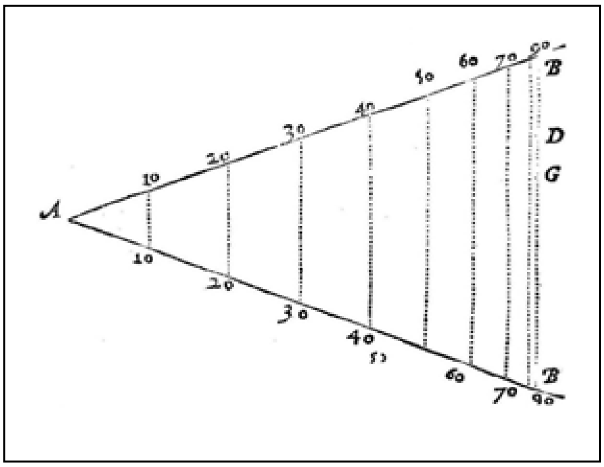


図 9　line of Sines の使い方

そして、line of Sines を使った具体的な活動として、セクターとコンパス、定規(線を引くためだけに用いる)を使い、原典の和訳を読んで、長さが line of Lines の 4 の長さの半径をもつ円における 50°のサインと、その余角のサインの値を求める問題に取り組んでもらった。まず、1 時間目の復習もかねて、line of Lines の 4 の長さの線分をワークシート上に作図してもらった。次に、求めた線分の長さの半径をもつ円における 50°のサインと、その余角のサインをそれぞれワークシート上に作図し、値を求めてもらった。(図 10)

【教師と生徒の会話】

生徒 A：この日本語がよくわかんないんだけど・・。(テキストの和訳を指差す)

生徒 B：サインの値を作図すればいいんじゃないの？

生徒 A：測ってここ(ワークシート)に書くってこと？

生徒 B：うん。あ、でもここに円を書くのは(スペースが狭くて)きついですよね？

教師：うん。でも、別にコンパスは円を書くためだけじゃないよね？

生徒 B：え？・・・あ、線分か。なるほど。

この問題は、原典の和訳に求める方法がそのまま記述されているにも関わらず、なかなか手を動かせない生徒が多かった。その原因としては、原典の文を和訳したのは教師であり、できるだけ原典の英語に忠実に和訳したために、表現において理解しづらい部分があったこと、原典に記された手順どおりにセクターを使えば求められることは理解できるが、なぜその手順で求められるのかがわからない、サインの値を、線分を作図することで求めるということに

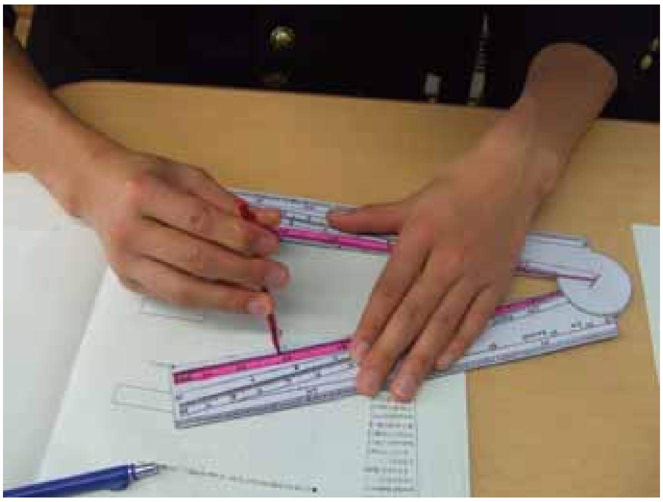


図 10　parallell sine を測る生徒

中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp167-180、2006年3月

抵抗を感じていることが挙げられる。この問題は、line of Sines を使って様々な値を求める基本的な問題なので、解答できた生徒のワークシートを実物投影機でスクリーンに映しながら、求め方やその手順を、実際に生徒に丁寧に解説してもらい、クラス全体の理解を促した。(図 11)生徒は、原典に記された方法で解答が得られることは理解できたが、なぜこの手順で解答が得られるのかはまだ理解できていない様子だった。


図 11　問題の解説をする生徒

次に、セクターの原理を理解するために、原典に記された三角形の相似を用いた証明を一緒に解釈する活動を行った。多くの生徒は、久しぶりに三角形の相似に触れたためか、2 つの三角形のどの辺とどの辺が対応するのかを見つけ出すことに苦労していた。このセクターの原理を理解した上で、半径が line of Sines の長さと異なる円におけるサインとその余角のサインを求める問題を振り返り、なぜ原典に記された手順で値が求められたのかを、比の考えを用いて解説し、生徒の理解を促した。

最後に、3 時間目の授業の準備として、地図や航海に関する用語(緯度、子午線、航程など)の穴埋め問題を宿題として出し、2 時間目の授業を終えた。

＜3 時間目＞
〔目標〕
実際に航海における line of Sines を用いた計算として行われた、海図上で航程(航程線上の距離)を求める問題に取り組んでもらい、数学が文化や社会生活において果たしている役割を理解すること。
〔授業概要〕

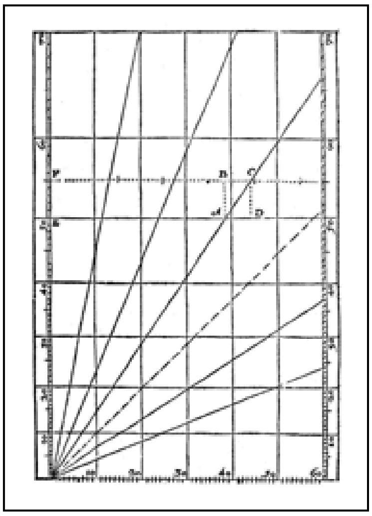
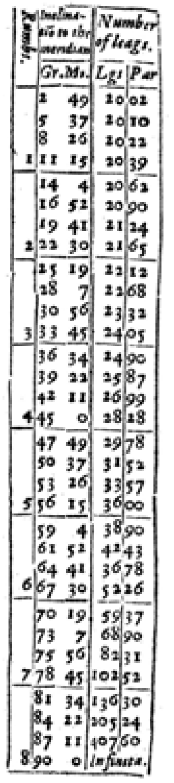


図 12　原典の海図

まず、前回の授業の最後に宿題として出した地図や航海に関する用語を、Microsoft Power Point を使って全員で確認した。一見して数学と関係のなさそうな地図や航海に関する用語が登場した理由を、1 時間目の授業で、ガンターは航海において多大な貢献をしたことを紹介したことを思い出してもらい、説明した。また、テキストを用いて、海図は航海において目的地までの距離や針路を測るために必要不可欠なものであること、海図のほとんどはメルカトル図法で作図されていること、航程線(地球面上の 2 点を結ぶ線が書く子午線と常に同一の角度をなす曲線)に沿った航行は、最短距離では

ないが、針路を一定に保つことが出来るという利点があること、メルカトル図法で作図された海図上での航程線は直線で表されるために航程を求めるのに便利であることを説明した。

海図上での航程を求める問題の予備知識として、問題文中の比の表現、航程線の名称、問題文中の「5°の長さを測る」とは何かをテキストに穴埋めをする活動を通して確認した。問題文中では「子午線に対する航程線の余角の sine に対する Radius の比は、緯度の差に対する航程の比に等しい」という表現がある。これを比の形に表すと、「子午線に対する航程線の余角の sine：Radius＝緯度の差：航程」であり、航程を求めるためにはこの式を用いることが重要になる。次に、問題文中に出てくる「第 3 航程線」とは何かを確認した。図 13 において、左の列は航程線の名称、中央の列は子午線に対する傾き(角度)、右の列は緯度 1°分の航程(単位：リーグ)を表している。例えば、図 13 において第 1 航程線とは子午線に対する角度が 11°15′の航程線で、その緯度 1°分の航程は 20.39 リーグである。原典には「緯度 1°の長さは 20 リーグ(1 リーグ＝約 4.8km)である」と記述されているので、問題を解く上でこれを使うこと、つまり、「5°の長さを測る」とは、5×20＝100 リーグの長さを line of Lines で測ることであると説明した。



Rumbs.	Inclination to the meridian		Number of leags.	
	Gr.	Ms.	Lgs	Par
	2	49	20	02
	5	37	20	10
	8	26	20	22
1	11	15	20	39
	14	4	20	62
	16	52	20	90
	19	41	21	24
2	22	30	21	65
	25	19	22	12
	28	7	22	68
	30	56	23	32
3	33	45	24	05
	36	34	24	90
	39	22	25	87
	42	11	26	99
4	45	0	28	28
	47	49	29	78
	50	37	31	52
	53	26	33	57
5	56	15	36	00
	59	4	38	90
	61	52	42	43
	64	41	36	78
6	67	30	52	26
	70	19	59	37
	73	7	68	90
	75	56	82	31
7	78	45	102	52
	81	34	130	30
	84	22	205	24
	87	11	407	60
8	90	0	Infinite.	

図 13　航程線表

今回使用したセクターでは 10 までの長さしか測れないために、100 リーグ＝line of Lines の 1 の目盛りとして測ることとした。

最後に、1、2 時間目で学んだことと、問題を解く際の予備知識をもとに、実際にセクターを使って海図上の航程を求める問題に取り組んでもらった。

【教師と生徒の会話】

生徒 A：なんで 5°が 6°になるの？

生徒 B：でもさ、1°分が 20 リーグなんでしょ？

教師：図を書くとわかりやすくなるよ。

生徒 A：角度っていうか、距離を求めるんですね。

生徒が問題に取り組み出してしばらくは、何をすれば解けるのかわからない様子だったが、生徒同士で話し合ううちに、図を描くと問題の状況を理解しやすい、予備知識で確認した比の式「子午線に対する航程線の余角の sine：Radius＝緯度の差：航程」から、何を求めれば航程が求められるのかを理解していった。問題文中に記述されている手順で問題が解けた生徒に対して「なぜこのような

図 14　航程を求める問題に取り組む生徒たち

手順で求めたい値が求まるのか」と質問したところ、多くの生徒がわからないと答えた。そこで、Microsoft Power Point を使って、なぜセクターを使って海図上で航程を求めることができるのか、それを、セクターを使って求める利点は何かを説明し、生徒の理解を深めた。

まとめとして、ガンターのセクターには 12 本の目盛りが刻まれていて、今回の授業研究ではそれらのうち 2 本しか取り上げなかったが、興味があれば他の目盛りについても調べてみてほしいと伝えて、3 時間の授業を終えた。

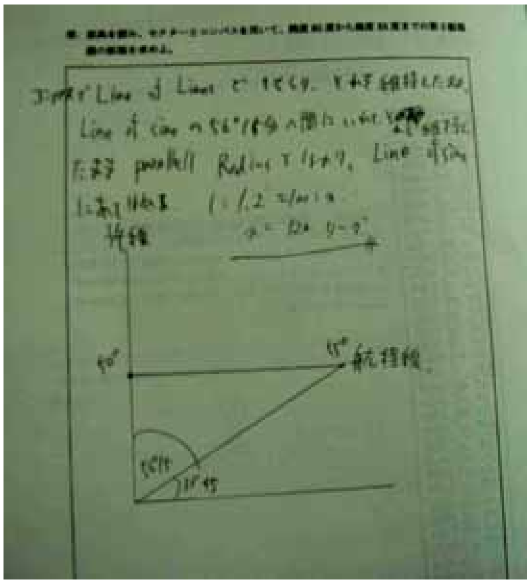


図 15　航程を求める問題の生徒の解答

6．考察

(1) 課題 1 に対する考察

課題 1：セクターに関する原典解釈と、実際にセクターを使った数学的活動を通して、当時のセクターの開発者・利用者の立場や考え方を想定できたか。

事後アンケート：「数学の歴史的道具に触れての感想を書いてください。」

①昔の人はよくこんな難しい考え方をしていたなと思った。

②使い方がちょっと難しかったが、よくこんなことを考えられたと感心した。

③昔の人の発明にびっくり。普通は絶対に思いつかない。人間が利便性を求めて使える発明ってどれもすごい。発明って素晴らしい。

④計算が全てじゃなくて、こういうふうにもっと日常生活に応用していたと知って、昔の人はすごいと思った。

⑤昔の人が試行錯誤して、努力していた結果、今はだいぶ楽になっているなと思った。

⑥今は簡単に使っているだけの計算だが、それを発明するにはとても長い時間と労力がいるものだとわかった。

⑦航海の時にこんな面倒な道具を使わなくてはいけなかったのは苦しかったと思う。技術の進歩はすごい。

⑧便利なものが無かった時代に、昔の人は工夫して道具を使いこなしているのだとわかって感動した。

授業後に生徒に対して行った事後アンケートの内容(上記)をもとに課題 1 が達成されたかを考察していく。

①、②の感想を書いた生徒は、昔の人が難しい考え方に挑んでいたことに感心している。つまり、セクターの開発者の立場に立って、開発の際の苦労を感じ取っている。

③、④の回答から、これらの内容を書いた生徒は、昔の人は自分たちの生活をより良くしようとして、セクターを発明し、利用していたと解釈している。特に、3時間の授業の中で、授業者は「セクターは、困難で間違えやすい大きな数の計算を容易にするために考案され、非常に便利な道具である」といった発言は一言もしていないにも関わらず、③の感想を書いた生徒は、3時間の授業で歴史的道具に触れることで、昔の人(ここではセクターの発明者・利用者)が利便性を求めていたことを感じ取っている。また、④の感想を書いた生徒は、事前アンケートで「買い物をするときに合計の値段を計算することができるから、数学は日常生活で役に立つ」と答え、数学を計算という狭い範囲でしか捉えていなかった。しかし、事後アンケートでは「計算が全てじゃなくて」と述べ、この生徒は、昔の人の数学やそれを含んだ道具を日常生活に応用しようとしている姿勢を学んでいる。

⑤、⑥においては、道具の発明者が、その発明に際して試行錯誤し、長い年月をかけて努力したことで現代の数学が成り立ち、現代に生きる我々はその恩恵を受けていると解釈している。つまり、発明者の苦労を感じることで、現代と昔を対比するという考えに至っている。また、⑦、⑧においては、今度は道具の利用者の立場に立ち、道具の利用における苦労や困難を感じた上で、それでも工夫しようとしていた姿勢を感じ取り、それによって現代は技術の進歩を果たして便利になったとしている。

以上のアンケート結果の考察から、課題1は達成されたと考えられる。

(2) 課題2に対する考察

課題2：課題1を受けて、航海における計算に使われたセクターに隠された数学を認識し、数学を人間の営みとして捉え、文化や社会生活において数学が果たしている役割を理解することができたか。

事後アンケート：「三角比に対するイメージが変わった。」
<そう思う　64名(76名中)>
①航海では三角比が重要なもので、日常的に利用できるものなのだと実感したから。
②三角比が航海を支える非常に大切で、特別なものに感じたから。
③身近なところで三角比が利用されていたから。
事後アンケート：「セクターに隠された数学とはなんですか？」
④基本的な原理を積み重ねることによって生まれた、数学の社会における実用性。
⑤実際に航路などで使えるための実用的な数学。
⑥日常生活に活かせる数学。
事後アンケート：「数学の歴史的道具に触れての感想を書いてください。」
⑦数学で学んだことをもっと実用的に活かしていきたいと思った。
⑧日常生活で高度な数学を考えることはないが、それらは道具として形を変えて、数学を意識することもなく日常の生活に入っていることを強く感じた。

授業後に生徒に対して行った事後アンケートの内容(上記)をもとに課題2が達成されたかを考察していく。

中学校･高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp167-180、2006年3月

①、②、③の回答をした生徒は、三角比が航海において重要な役割を果たしているとの認識を持ち、それが日常的に利用可能であることを実感したと述べている。特に、①、③の回答をした生徒は、共に、事前アンケートで「生活などで利用する機会がないため、三角比を勉強して役に立つとは思わない」と述べていたが、歴史的道具を用いた授業の中で、三角比の実用的価値を見出すことができた。

筆者は、事後アンケート：「セクターに隠された数学とはなんですか？」の質問に対しては、「比」「三角比」「相似」といった回答が得られるのではないかと予想していた。しかし、もちろんこれらの回答も見られたが、④、⑤、⑥のような「実用性」というキーワードを含んだ回答を得ることができた。これらの回答をした生徒たちは、歴史的道具の中に、日常や社会において実用的価値のある数学を見出した。

⑦の感想を述べた生徒は、今回取り上げた三角比のみならず、学んだ数学を日常的に活かしたいという意欲を示している。⑧の感想を述べた生徒は、高校で習うような高度な数学も、知らず知らずのうちに日常の中に潜んでいることを強く感じている。つまり、数学は、道具のように形を変えても日常や社会生活と結びついていると認識している。

また、三角比を勉強することは大切であると感じている生徒のほとんどは、その理由として、事前アンケートにおいて「物理で使うから」「専門的な職業に就いたときに役に立つ」と答えている。これは、三角比を勉強することに意義を見出しているにも関わらず、三角比が果たしている役割を、日常や社会生活の狭い範囲でしか理解していないことを示している。これに対して、上記の事後アンケートの結果は、航海において三角比が重要な役割を果たしていること、そして、三角比を含む数学の実用的価値を理解していることを示している。数学の実用的価値を理解したことによって、文化や社会生活において数学が果たしている役割を理解できたといえる。

以上のアンケート結果の考察により、課題 2 は達成されたと考えられる。

7．おわりに

本研究では、歴史的道具であるセクターを使った数学的活動と、その使用法や原理が記述されている「The description and vse of the sector, the cross-staffe, and other instruments」の原典解釈を行うことで、生徒が文化や社会生活において数学が果たしている役割を理解できるかを考察した。

上記の活動をセクターの line of Sines と海図を題材として行うことで、航海において三角比が重要な役割を果たしていることを理解し、それによって文化や社会生活において数学が果たしている役割を理解することができたことが認められた。

今回の授業研究では、実際にセクターを用いて海図上で航程を求める問題を最終問題として位置づけ、それまでの活動や問題はその最終問題を理解し、解くために必要な内容であった。しかし、その準備段階の内容が多すぎたため、また、

生徒が原典を読み解く活動に予想以上に時間を要したため、しっかりと内容を理解した上で授業を進めることができず、加えてセクターを実際に使ってみる活動も少なかったように思える。内容を精選して、もう 1 問でも海図上での測量の問題に取り組むことができれば、三角比の実用的価値の理解はより深まり、それによって文化や社会生活において数学が果たしている役割の理解もより深いものになったのではないかと考えられる。

謝辞

授業研究の実施に際して、千葉県立佐原高等学校の数学科の先生方には、多大なるご協力とご指導をいただきました。ここに厚く御礼申し上げます。

注）

本研究は、文部科学省科学研究費特定領域研究(2)課題番号 17011014「代数・幾何・微積分の動的理解を促す「使える数学」教材サイトの開発に関する研究－数学用機械と JAVA による移動･変換と関数･微積ハンズオン教材の WEB 化研究(Ⅱ)－」(研究代表者礒田正美)による研究の一環として行われた。

＜引用・参考文献＞

Edmund Gunter(1971). *The description and vse of the sector, the cross-staffe, and other instrument*. English experience 422.

文部省(1999). *高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編*. 実数出版.

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2004). *平成 14 年度　高等学校教育課程実施状況調査報告書　高等学校数学*. 実数出版.

礒田正美(2002). *数学する心を育てる　課題学習･選択数学･総合学習の教材開発*. 明治図書.

礒田正美(2003). なぜ道具を数学教育で活用する必要があるのか：道具を使ってこそ学べる数学の教育的価値を明かすためのパースペクティブ. *日本数学教育学会第 36 回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録*.

堀内大介(2005). 歴史的道具による数学観の変容：比例コンパス(セクター)を題材として. *Numeracy の規定の諸相と歴史的文化志向の数学教育：新しい教育課程へのアプローチ*　中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12). 筑波大学数学教育学研究室.

沓名景義，坂戸直輝(1980). *海図の読み方*. 蛇社.

沓名景義，坂戸直輝(1996). *海図の知識*. 成山堂書店.

Charles H.Cotter(1981). Edmund Gunter(1581-1626). *Journal of Navigation 34(3)*. the Royal Institute of Navigation.

Michael R.Williams，Erwin Tomash(2003). The Sector: Its History, Scales, and Uses. *IEEA Annals of the History of Computing*. The IEEA Computer Society