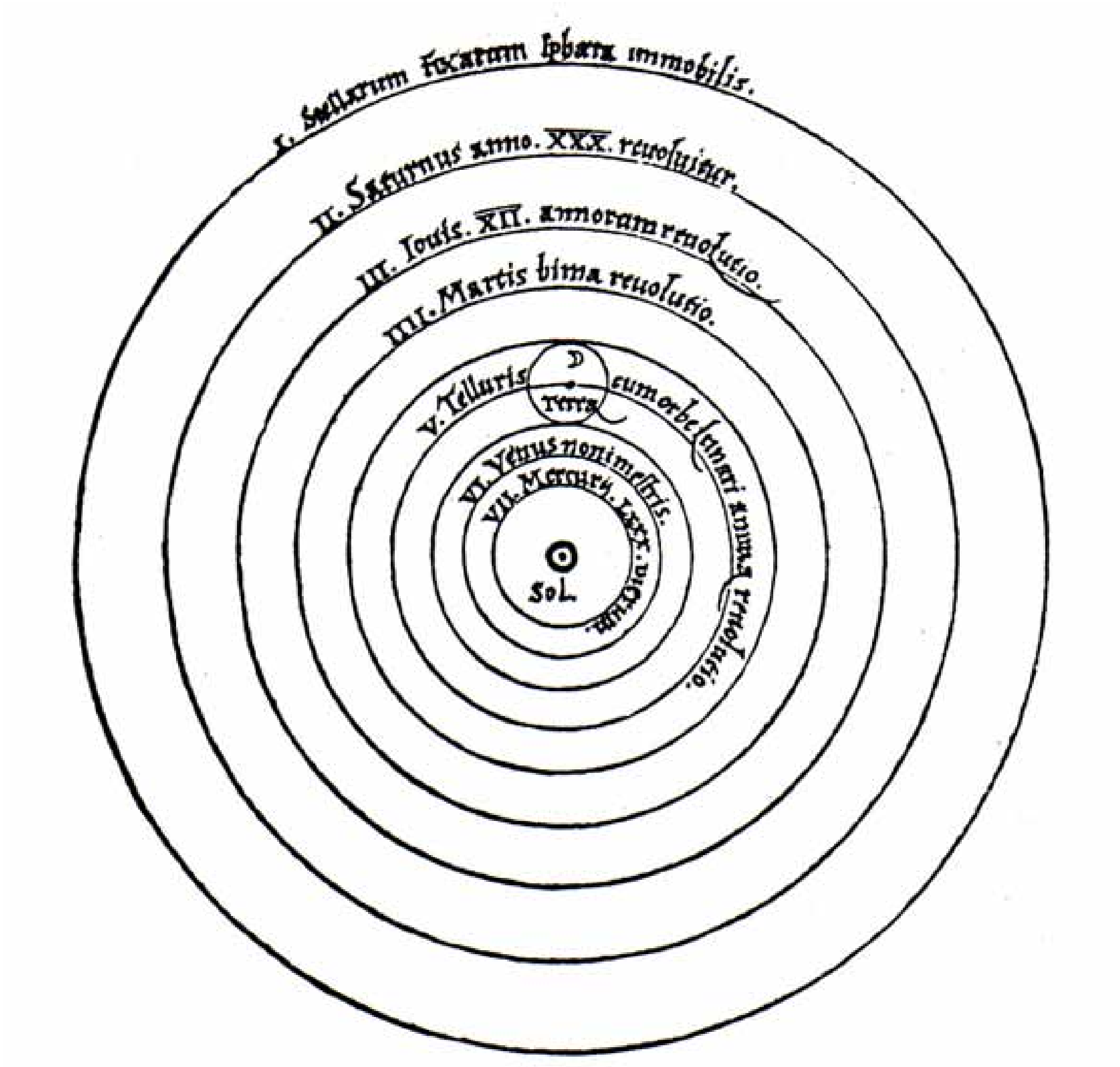
3時間目資料

授業資料



年　　組　　氏名

授業者：筑波大学大学院修士課程教育研究科
楊　彬

＜前回の復習＞

5 つの正多面体の一辺の長さと外接球の関係

各正 n 面体の一辺の長さを k_n、外接球の半径を r_n とする。

ワークシートに、r_n を k_n を用いて表しましょう。

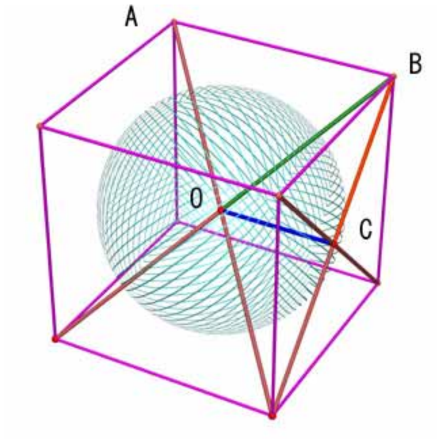
5 つの正多面体の外接球の半径と内接球の半径を用いて、ケプラーの宇宙模型が実際の惑星の軌道半径の比の値とどれくらい近いかを見ていきましょう!!

１．　正多面体の内接球の半径を求めよう！

『宇宙の神秘』の第 13 章の方法で各正多面体の内接球の半径を求めよう。
カンパヌス版ユークリッド（→ユークリッド原論をアラビア語からラテン語に訳したもの）の第 15 巻の最後の命題によると、<u>立体図形の中心と基底面の中心を結ぶ直線が内接球の半径となっている</u>。

$\boxed{\text{正 } n \text{ 面体の一辺の長さを } k_n \text{、内接球の半径を } r_n' \text{ とおく。}}$

・ 立方体（正六面体）

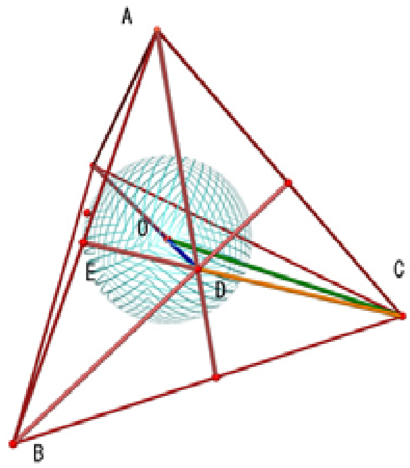


r_6' は OC の長さである。

OC＝＿＿＿＿AB より、OC＝＿＿＿＿＿＿k_6

r_6'＝＿＿＿＿＿＿＿k_6（ワークシート記入）

・正四面体



r_4' は OD の長さである。

点Dは三角形ABCの＿＿＿＿＿＿なので、

CD＝＿＿＿＿＿＿＿k_4

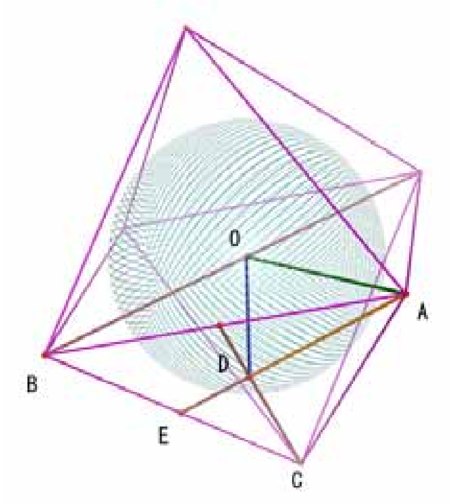
またOCは正四面体の＿＿＿＿＿＿＿なので、

OC=＿＿＿＿＿＿＿k_4

これらよりOD＝＿＿＿＿＿＿＿k_4

r_4'＝＿＿＿＿＿＿＿k_4（ワークシート記入）

・正八面体



r_8' は OD の長さである。

点Dは三角形ABCの__________なので、

AD＝____________ k_8

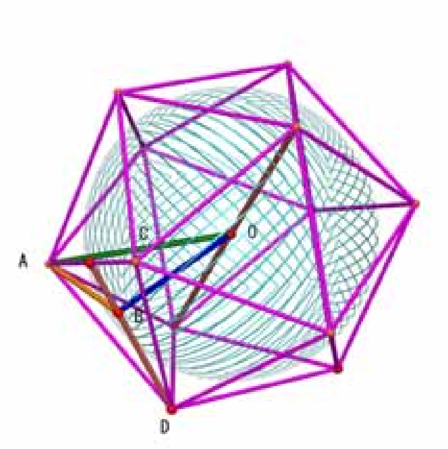
またOAは正八面体の____________なので、

OA=____________ k_8

これらより OD＝____________ k_8

r_8' ＝____________ k_8 （ワークシート記入）

・正二十面体



r_{20}' は OB の長さである。

三角形 ACD に注目すると、
点 A は三角形 ACD の重心なので、

$$\mathrm{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}k_{20} \quad これより \quad OB^2 = OA^2 - AB^2$$

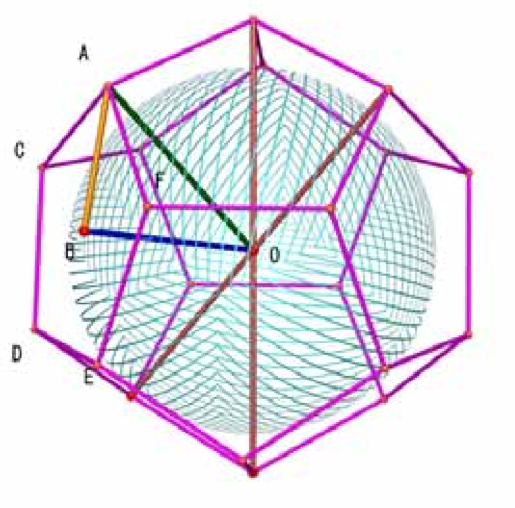
$$OA = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}k_{20}、\ AB = \frac{\sqrt{3}}{3}k_{20} より、$$

$$\mathrm{OB} = \frac{\sqrt{6(7+3\sqrt{5})}}{12}k_{20}$$

$$\boxed{r_{20}' = \frac{\sqrt{6(7+3\sqrt{5})}}{12}k_{20}}$$

（ワークシート記入）

・正十二面体の場合



r_{12}' は OE の長さである。

『正十二面体と正二十面体の外接球の半径が同じ場合、内接球の半径も同じである。』より正二十面体の一辺の長さと内接球の半径の関係は

$$r_{20}' = \frac{\sqrt{6(7+3\sqrt{5})}}{12}k_{20} で、$$

正二十面体と正十二面体の外接球の半径を同じものと考えているので、

$$r_{20} = r_{12} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}k_{20} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}k_{12}$$

両者の内接球の半径も等しいので

$$\boxed{r_{12}' = r_{20}' = \frac{\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20}k_{12}}$$

（ワークシート記入）

２．　正多面体の内接球と外接球との半径の比を求めよう！

なぜケプラーは惑星の軌道について、比の考えを用いたでしょうか？

＜これまでの復習＞

→ケプラーは「宇宙は神が創造したので、そこには調和がある」と信じていた。

→そして「大会合」の図で土星の軌道半径が木星の軌道半径の２倍ではないかと主張した。また、これは正三角形の外接円と内接円の比の関係を表していた。

→そこで、正多面体の外接球と内接球の半径の比を用いて、**惑星の軌道半径**の関係が比で表せるのではないかと考えた。

つまり・・・
宇宙の中心「太陽」と惑星との距離！！

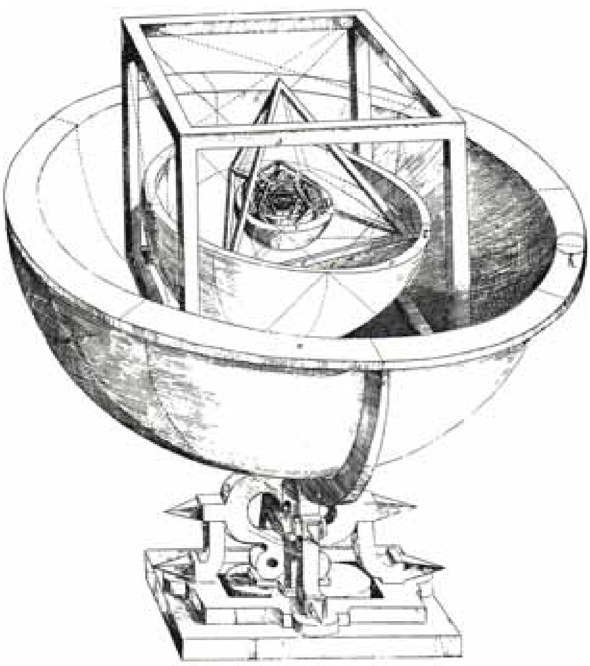
では、正多面体の内接球と外接球の半径の比の値はどうなるでしょうか？
値を求めましょう。
また、この比の値を小数値で表しましょう。
（ワークシート記入）

３．　現在の惑星の軌道半径の比と比較してみよう！

現在の、隣り合う惑星の軌道半径どうしの比の値は下の表のようになる。
（地球の軌道半径を 1 とする）

土星の軌道半径 ÷ 木星の軌道半径	1.8334
木星の軌道半径 ÷ 火星の軌道半径	3.4146
火星の軌道半径 ÷ 地球の軌道半径	1.5237
地球の軌道半径 ÷ 金星の軌道半径	1.3825
金星の軌道半径 ÷ 水星の軌道半径	1.8625

隣り合う惑星の軌道半径の比の値（上の表）は、
どの正多面体の外接球と内接球の半径の比の値（小数値）と近いでしょうか?
（ワークシート記入）



また、宇宙模型では正多面体の外接球と内接球の半径の比と、隣り合う惑星の軌道半径の比はどのような関係になっているでしょうか？
左の写真を見て確認しましょう。

＜まとめ＞

ケプラーは惑星軌道の数と大きさと運動の 3 つを基本的な問題としてとらえた。
特に宇宙が調和していると考えて、比で構成されているのではないかと考えた。

ケプラーは正多面体の半径の比と太陽系の惑星の軌道半径の比が一致しているのではないだろうかと考えた

しかし、実際にはごく荒い近似にしか過ぎなかった。

この考えは誤りだった。

この失敗がケプラーの後の偉大な功績につながった。

ケプラーの宇宙模型は実際の宇宙軌道の半径の比のごく荒い近似を表しているのに過ぎないことが分かった。（実際、現在の太陽系の惑星はケプラーの時代の 6 つの惑星の他に天王星、海王星、冥王星の 3 つが見つかっており、隣り合う惑星同士に正多面体を入れることができなくなってしまう。）しかし、ケプラーにとってはこの失敗が後の大きな発見（ケプラーの第 1 法則～第 3 法則）に貢献している。

３日間、本当にありがとうございました。