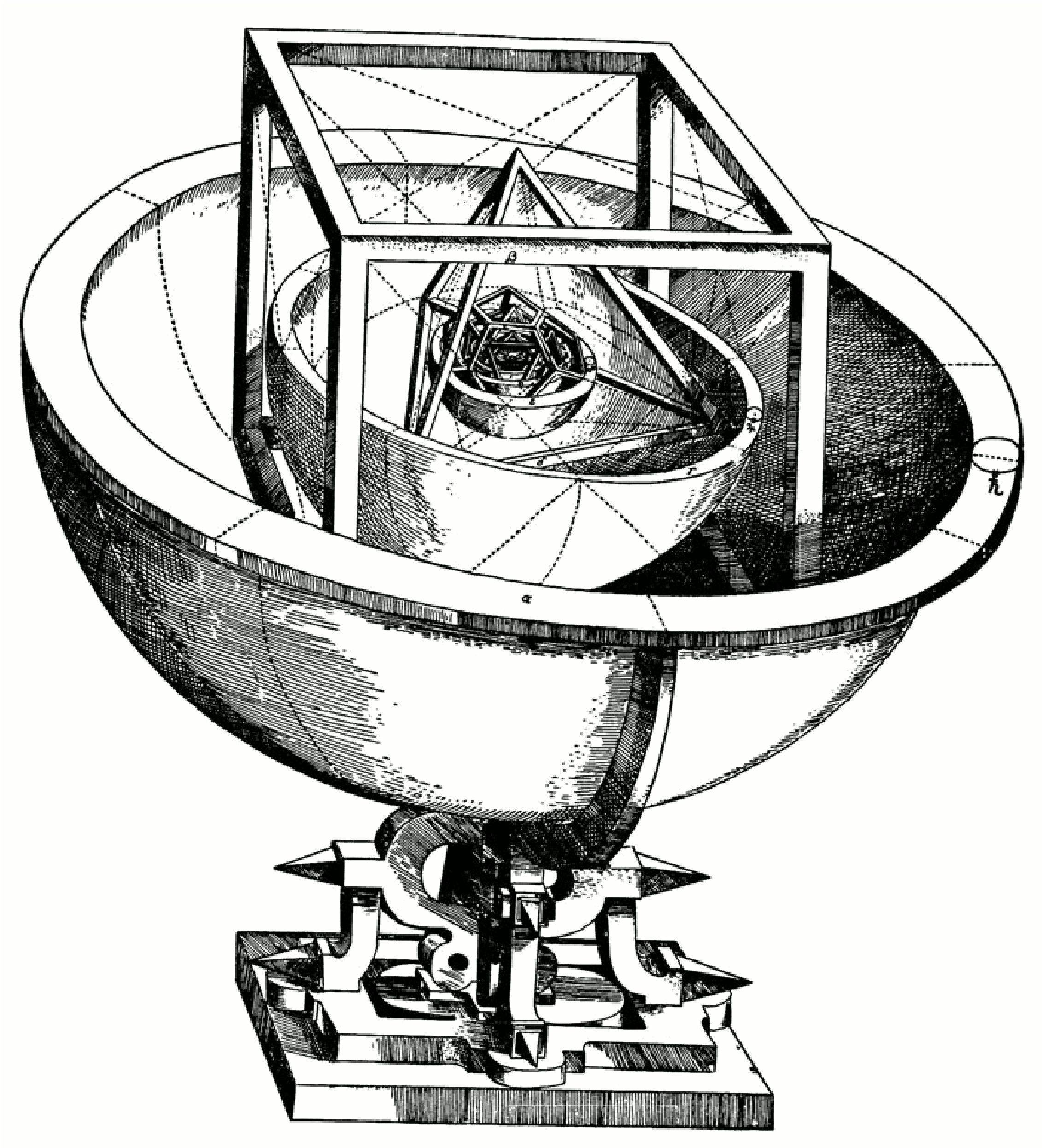
２時間目資料

授業資料



年　　組　　氏名

授業者：筑波大学大学院修士課程教育研究科
楊　彬

＜前回の復習＞

・ケプラーはコペルニクスの地動説を強く信じていた。
・コペルニクスの地動説はそれまでの天動説ではうまく説明できなかった惑星の逆行運動がきちんと説明できた。
・ケプラーはまず惑星の軌道半径の比と平面図形の幾何的な性質とを結びつけて考えた。→しかし、有限個の惑星軌道を表すのにうまくいかなかった。

↓

そこで、空間図形で考えた。正多面体は 5 つしかなく、有限の惑星軌道を表せるのではないかと考え、表紙のような宇宙模型を作った。

これからケプラーの宇宙模型が実際の惑星の軌道半径の比の値とどれくらい近いかを計算してみよう!!

ケプラーはこの宇宙模型の球の半径の比の値が水星・金星・地球・火星・木星・土星の６つの惑星軌道の比の値と等しいと主張している。

（隣り合う惑星の軌道半径の比）＝（正多面体の内接球と外接球の半径の比）

まず、内接球と外接球の半径の比の値を求める。

内接球の半径は外接球の半径が求められれば良い。3 時間目で内接球の半径を求める。

では、まず外接球の半径を求めよう。

ケプラーはユークリッド原論を用いて外接球の半径を求めている。このユークリッド原論では外接球の直径と一辺の長さとの関係が述べられています。

;ユークリッド原論

ユークリッド原論

- ユークリッド（紀元前 365～紀元前 275）が書いた。
- 全部で 13 巻から構成されている。
- この中では結論を一連の命題として提示している。

1．立方体の外接球の半径を求めよう。

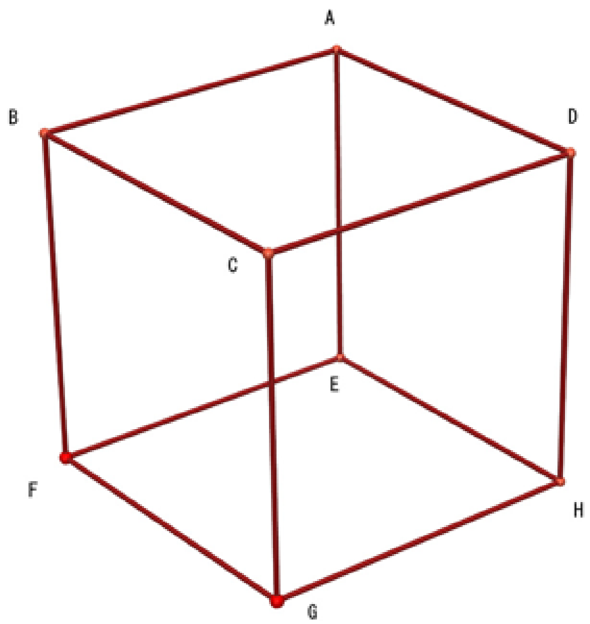
<u>ユークリッド原論　第１３巻 命題１５</u> 　立方体をつくり，与えられた球によってかこみ，そして球の直径上の正方形が立方体の辺の上の正方形の３倍である。

命題 15 を解釈しましょう。

　球の直径の$\boxed{\qquad\quad}$は，内接する$\boxed{\qquad\quad}$の辺の$\boxed{\qquad\quad}$の$\boxed{\qquad\quad}$である。

立方体の外接球の直径をR_6、半径をr_6、一辺の長さをk_6とおく。

以下の問いに答えてください。（ワークシートに記入してください。）



<u>問題 1</u>

　上の図にR_6、r_6、外接球の中心 O を図示しましょう。

<u>問題 2</u>

　R_6をk_6を用いるとどのように表せますか？

　また、r_6はどのように表せますか？

2．正八面体の外接球の半径を求めよう。

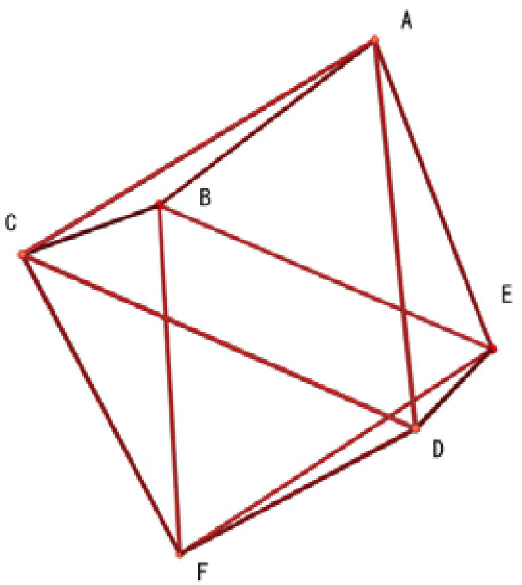
> <u>ユークリッド原論　第１３巻 命題１４</u>
>
> 　正八面体をつくり，与えられた球によってかこみ，そして球の直径上の正方形が正八面体の辺の上の正方形の２倍である。

命題 14 を解釈しましょう。

　球の直径の$\boxed{\qquad\quad}$は，内接する$\boxed{\qquad\quad}$の辺の$\boxed{\qquad\quad}$の$\boxed{\qquad\quad}$である。

正八面体の外接球の直径を R_8、半径を r_8、一辺の長さを k_8 とおく。

以下の問いに答えてください。（ワークシートに記入してください。）



<u>問題 1</u>

　上の図に R_8、r_8、外接球の中心 O を図示しましょう。

<u>問題 2</u>

　R_8 を k_8 を用いるとどのように表せますか？

　また、r_8 はどのように表せますか？

3. 四面体の外接球の半径を求めよう。

<u>ユークリッド原論　第１３巻　　命題１３</u>

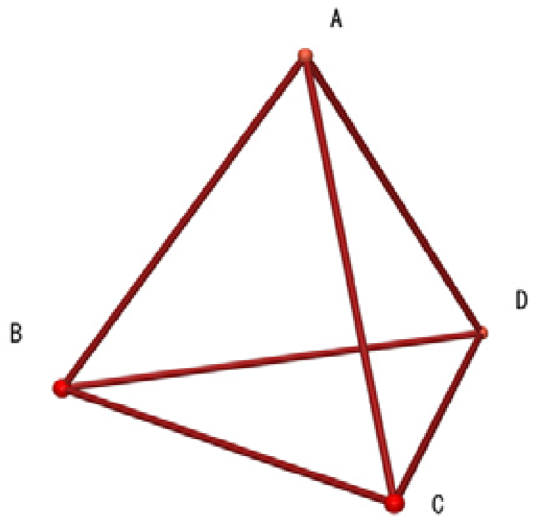
　角錐をつくり，与えられた球によってかこみ，そして球の直径上の正方形が角錐の辺の上の正方形の２分の３である。

　※角錐・・・正四面体のこと
命題 13 を解釈しましょう。

　　球の直径の＿＿＿＿は，内接する＿＿＿＿の辺の＿＿＿＿の＿＿＿＿である。

正四面体の外接球の直径を R_4、半径を r_4、一辺の長さを k_4 とおく。

以下の問いに答えてください。（ワークシートに記入してください。）



問題 1

　上の図に R_4、r_4、外接球の中心 O を図示しましょう。

問題 2

　R_4 を k_4 を用いるとどのように表せますか？

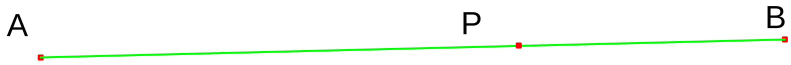
　また、r_4 はどのように表せますか？

4. 正一二面体と正二十面体の外接球の半径を求めよう。

これから正十二面体と正二十面体の外接球を求めるが、それには**黄金分割（外中比）**の考え方が必要である。

黄金分割とは

「線分をP点によって2つの部分に分割するものとしたとき、
AB：AP＝AP：PBになるように点Pを定めることを「**黄金分割**」と言う。」



<u>問題</u>

PBの値を1とした時のPの値を求めてみよう。

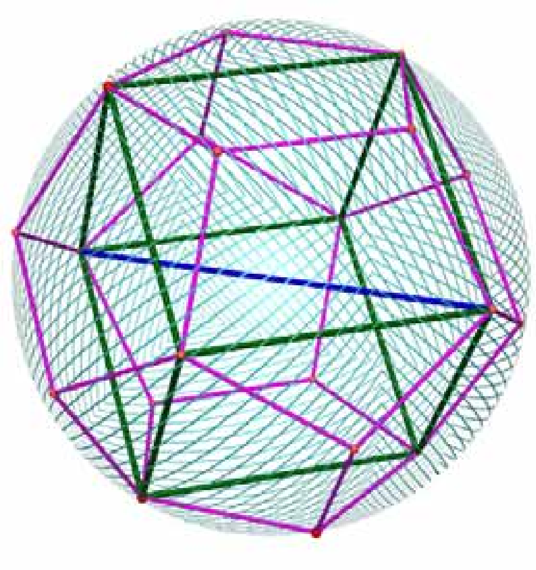
AP＝xとおいて比の計算をしてみましょう。 （ワークシートに記入してください。）

では、これをもとに残りの2つの正多面体の外接球の半径を求めよう。

5. 正十二面体の外接球の半径を求めよう。

<u>ユークリッド原論　第１７巻 命題 17　系</u>

　立方体の辺が外中比に分けられるならば、その外中比に分けられるならば、その大きい部分は正十二面体の辺である。



これを解釈してみよう。

　ある球に内接している立方体の辺を黄金分割した時の大きい方の値が、同じ球に内接している正十二面体の一辺の長さになっている。

よって、

　正十二面体の外接球の直径を R_{12}、一辺の長さを k_{12} とおき、この関係を式に表すと、

$$R_{12}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}k_{12}$$ となる。

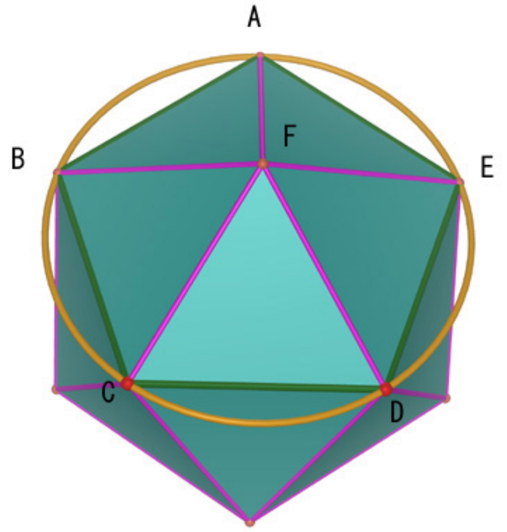
　また、正十二面体の外接球の半径を r_{12} とおくと、k_{12} との関係は

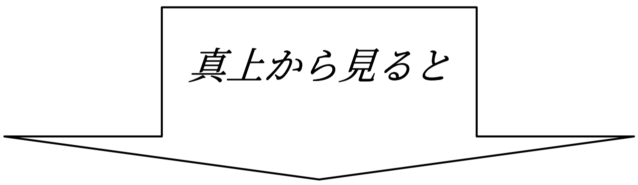
$$r_{12}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}k_{12}$$ となる。

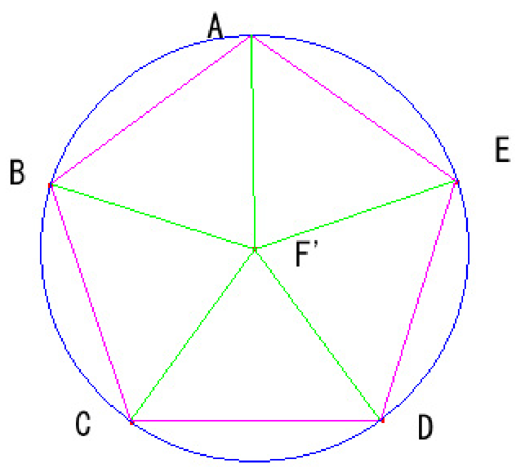
6. 正二十面体の外接球の半径を考えよう。

まず、

<u>ユークリッド原論第 13 巻 16 の系</u>（要約）
正二十面体を上から見たときの正五角形の外接円の半径の 2 乗が
正二十面体の外接球の直径の 5 分の 1 に等しい。
正二十面体を上から見た正五角形は下の図の正五角形 ABCDE である。





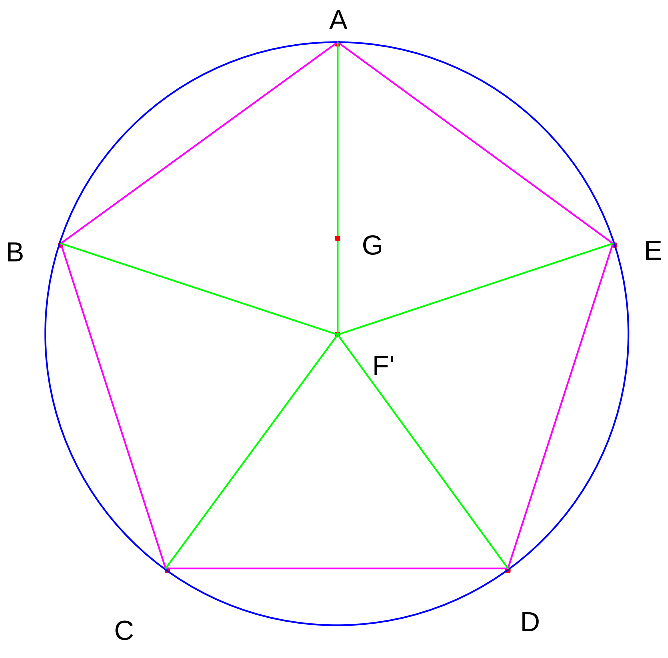


つまり、$(AF')^2 = \dfrac{1}{5}$(正二十面体の外接球の直径)^2 ･･･①

次に AF' と正五角形 ABCDE の一辺の長さとの関係を見ている。
ここで以下の命題を使う。

<u>ユークリッド原論第 13 巻 10（要約）</u> 正五角形が円に内接しているとき、この正五角形の辺の 2 乗は同じ円に内接する正六角形の辺と正十角形の辺の 2 乗の和に等しい。

上の図の AF' を黄金分割した時の大きい方の長さ AG が同じ円に内接する正十角形の一辺である。（ユークリッド原論第 13 巻 5 および 9）



これより、$AB^2 = AF'^2 + AG^2$ ･･･②が成り立つので

正二十面体の外接球の直径を R_{20}、半径を r_{20}、一辺の長さを k_{20} とおくと

①式と②式より $R_{20}{}^2 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} k_{20}{}^2$

よって$R_{20} = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}\ k_{20}$、

$$r_{20} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\ k_{20}$$

今日のまとめ

5 つの正多面体の一辺の長さと外接球の直径の関係

各正 n 面体の一辺の長さを k_n、外接球の直径を R_n、外接球の半径を r_n とする。

・立方体（正六面体）の場合

$$R_6{}^2 = 3k_6{}^2 \quad \Rightarrow \quad R_6 = \sqrt{3}k_6 \qquad r_6 = \frac{\sqrt{3}}{2}k_6$$

・正四面体の場合

$$R_4{}^2 = \frac{3}{2}k_4{}^2 \quad \Rightarrow \quad R_4 = \sqrt{\frac{3}{2}}k_4 \qquad r_4 = \frac{\sqrt{6}}{4}k_4$$

・正八面体の場合

$$R_8{}^2 = 2k_8{}^2 \quad \Rightarrow \quad R_8 = \sqrt{2}k_8 \qquad r_8 = \frac{\sqrt{2}}{2}k_8$$

・正十二面体の場合

$$R_{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}k_{12} \qquad r_{12} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}k_{12}$$

・正二十面体の場合

$$R_{20} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}k_{20} \qquad r_{20} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}k_{20}$$