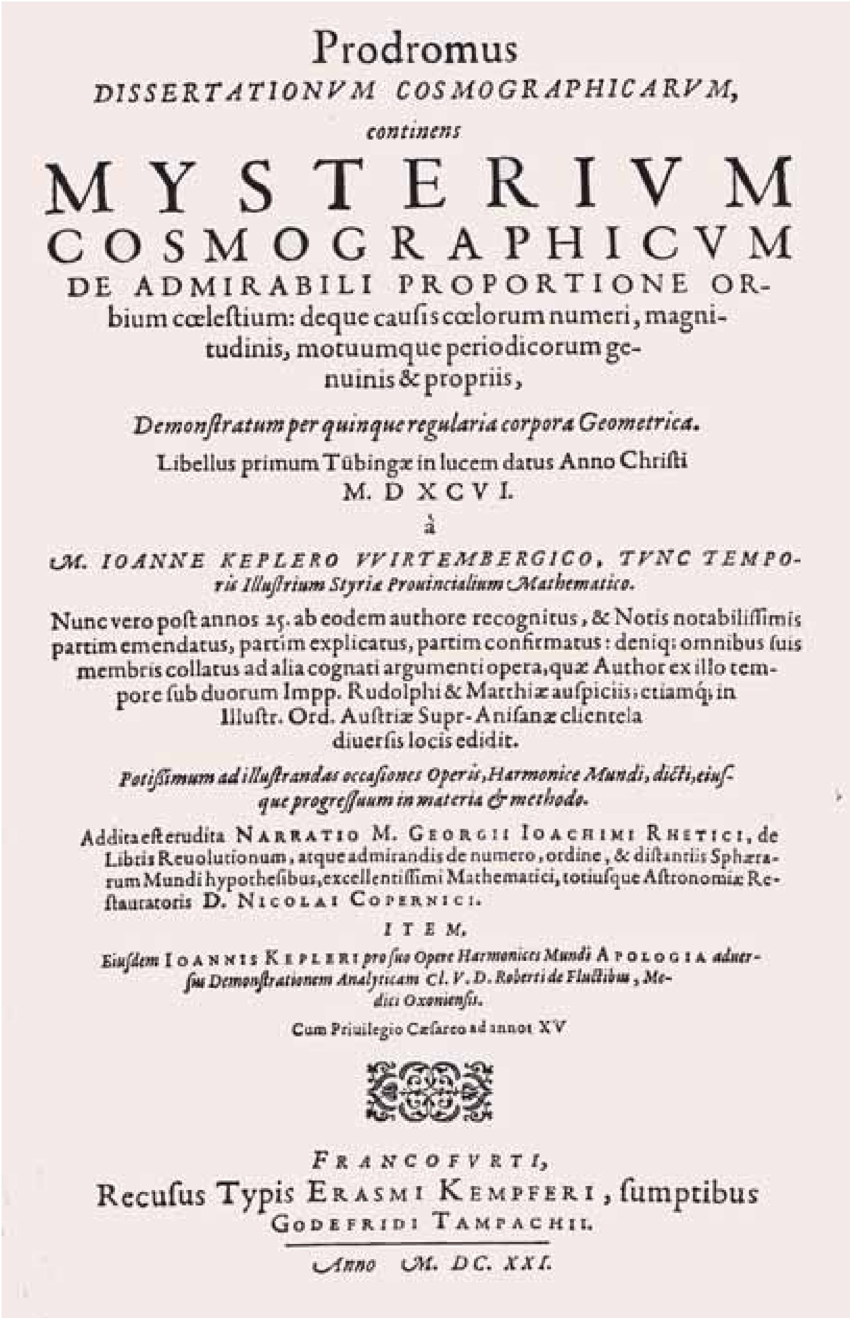
1 時間目資料

授業資料



Prodromus
DISSERTATIONVM COSMOGRAPHICARVM,
continens
MYSTERIVM
COSMOGRAPHICVM
DE ADMIRABILI PROPORTIONE ORbium cœlestium: deque causis cœlorum numeri, magnitudinis, motuumque periodicorum genuinis & propriis,

Demonstratum per quinque regularia corpora Geometrica.

Libellus primum Tübingæ in lucem datus Anno Christi M. D XCVI.

à

M. IOANNE KEPLERO VVIRTEMBERGICO, TVNC TEMPOris Illustrium Styriæ Prouincialium Mathematico.

Nunc vero post annos 25. ab eodem authore recognitus, & Notis notabilissimis partim emendatus, partim explicatus, partim confirmatus: deniq; omnibus suis membris collatus ad alia cognati argumenti opera, quæ Author ex illo tempore sub duorum Impp. Rudolphi & Matthiæ auspiciis; etiamq; in Illustr. Ord. Austriæ Supr-Anisanæ clientela diuersis locis edidit.

Potissimum ad illustrandas occasiones Operis, Harmonice Mundi, dicti, eiusque progressuum in materia & methodo.

Addita est erudita NARRATIO M. GEORGII IOACHIMI RHETICI, de Libris Reuolutionum, atque admirandis de numero, ordine, & distantiis Sphærarum Mundi hypothesibus, excellentissimi Mathematici, totiusque Astronomiæ Restauratoris D. NICOLAI COPERNICI.

ITEM,

Eiusdem IOANNIS KEPLERI *pro suo Opere Harmonices Mundi* APOLOGIA *aduersus Demonstrationem Analyticam Cl. V. D. Roberti de Fluctibus, Medici Oxoniensis.*

Cum Priuilegio Cæsareo ad annos XV

FRANCOFVRTI,
Recusus Typis ERASMI KEMPFERI, sumptibus GODEFRIDI TAMPACHII.
Anno M. DC. XXI.

年　　　組　　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

授業者：筑波大学大学院修士課程教育研究科
楊　彬

0. はじめに

表紙の絵は 1596 年にケプラーが出版した『MYSTERIVM COSMOGRAPHICVM（宇宙の神秘)』という本の表紙です。この本はケプラーが地動説を唱えたコペルニクスの考えに基づいて、宇宙の秩序と調和の原理を、幾何学的関係を通じて仮説し、検証したものです。

この本の「読者への序」という節では

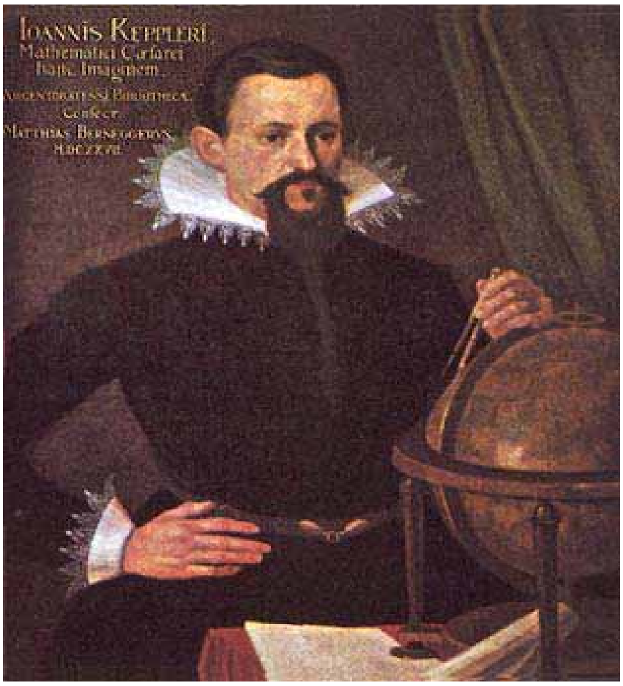
「私がこの書で明らかにしようとしたのは、至高至善の創造主が、運行するこの宇宙を創造し天体を配列するにあたっては、ピュタゴラスやプラトンの時代から今日に至るまであまねく知られたあの 5 つの正立体に注目し、惑星の数と相互の距離の比と運動の理法をそれら〔正立体〕の本性に適合させ給うたのだ、ということであった。」という一文から始まっている。

↑

神が宇宙を創造し、そこには調和があると考えていた。

3 日間の授業で、下線部について見ていきます。

1. 人物紹介



ヨハネス・ケプラー
（Johannes Kepler 1571～1630）

ドイツのヴァイル生まれ

ケプラーは 1589 年に牧師になるつもりでチュービンゲン大学の神学部に進学しました。そこで、数学と天文学の教授であったミヒャエル・メストリンの講義によってコペルニクスの天文学体系（地動説）に対する関心を高めていきました。1594 年に大学を卒業してからはオーストリアのグラーツにあるプロテスタント神学校の数学および天文学の教師になりました。この間にコペルニクスの天文学体系の探求に日々力を注いでいました。

2.『宇宙の神秘』が書かれた当時の宇宙観

『宇宙の神秘』が書かれた当時は太陽系の惑星は水星・金星・地球・火星・木星・土星の６つしか知られていませんでした。（現在はこれらの惑星の他に天王星（1781 年）・海王星（1846 年）・冥王星（1930 年）の 3 つの惑星があります。）

この当時はコペルニクスが『天体の回転について』で地動説（太陽中心説）をのせ、ケプラーはこの地動説を強く支持しました。

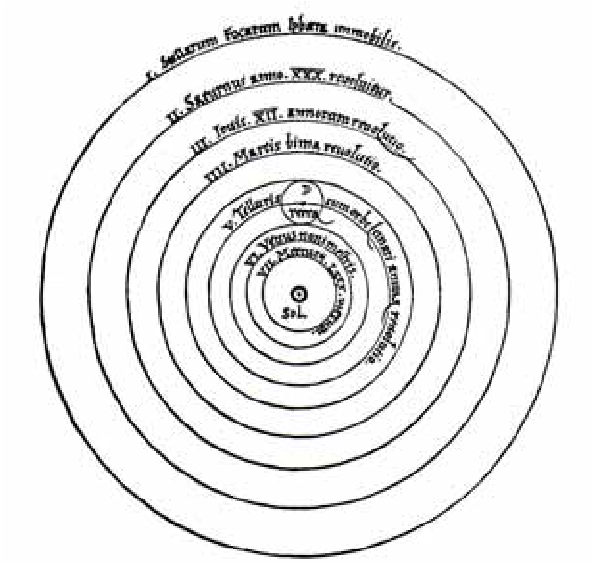
※コペルニクス

1473～1543

- 天文学者、数学者、聖職者
- 死の直前に『天体の回転について』を出版し、太陽中心説を発表

<u>コペルニクスの地動説について</u>

コペルニクスは宇宙の体系を下の図のように考えました。一番外側の恒星天球に恒星がすべて張り付いていると考えられていました。

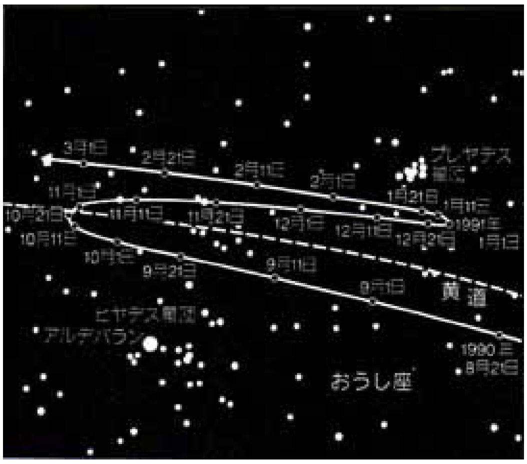


Ⅰ不動の恒星球、Ⅱ土星は 30 年で 1 回転する、Ⅲ木星の 12 年の回転、Ⅳ火星の 2 年の回転、Ⅴ月の天球をともなった大地（地球）の年週回転、Ⅵ金星は 9 ヶ月の回転、Ⅶ木星の 80 日間の回転。中心は太陽

（コペルニクス著『天球回転論』より）

コペルニクスの地動説はそれまで考えられていた天動説ではうまく説明できなかった逆行運動を自然に説明できるものでした。

逆行運動とは下の図のように地球から惑星を見たときに西から東へと動いている中、東から西へと逆行している様子が見られる現象のことを指します。

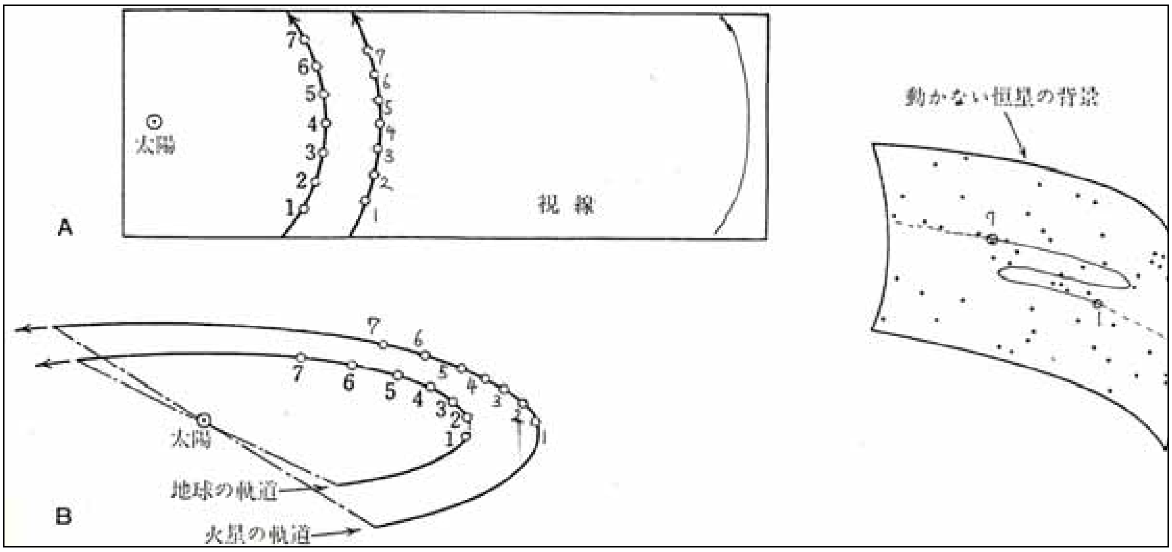


←（恒星）天球上での 1990 年から 1991 年にかけての火星の動き。

この図の**黄道**とは太陽が（恒星）天球上を動く道のことです。

では、地動説によってこの現象をどのように説明したのでしょうか。

下の図 B の地球軌道上の数字と火星軌道上の同じ数字の〇を結び、動かない恒星の背景（恒星天球）に映し出される点を結んでみよう。図 A は上から見たときの姿です。



ここで動かない恒星の背景に映し出された火星の軌道はどうなっただろうか？

ケプラーは、このコペルニクスの考えた円軌道をもとに、各惑星の軌道半径と幾何学的性質との関係を考えた!!

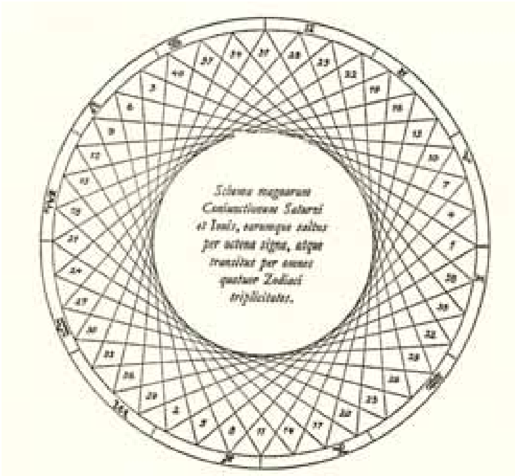
3. 各惑星軌道の半径と平面幾何との関係性

ケプラーはこの本で「1595 年 7 月 9 日か 19 日のことだった。大会合がつねに〔獣帯の〕8 つの宮を跳び越すことと、その大会合が少しずつずれて、1 つの三角形から他の三角形へと移っていくようすを、私は受講生に示していた。そのために同じ一つの円の中に、1 つの三角形の終わりが隣り合う次の三角形の始めになるようなたくさんの正三角形－というよりは、むしろ正三角形のようなものといったほうが適切かもしれない－を内接させた。そこで、これらの三角形の交点によって〔初めの円〕より小さな一つの円が描き出されていた。この円がより小さいのは、正三角形の内接円の半径が外接円の半径の半分だからである。2 つの円の〔半径の〕比は、一見したところ、土星と木星の〔軌道の半径の〕あの比とほぼ似ているように思われた。」と述べている。

大会合･･･木星と土星の黄経（黄道に沿って測った経度）が等しくなって両者が最も接近すること－の順次の位置を示した図である。

土星と木星の公転周期は前にもあるように 12 年と 30 年を要する。それゆえ、大会合は比較的にまれな出来事で約 20 年ごとに生ずる。会合の位置は 1 回毎に 120 度ずつ黄道上を動く。

ケプラーはこの図は各辺がすべて内側の小さな円の接線であるような一連の正三角形を順次描いているのに近いということに気づきました。



さて、この内側の円と外側の円の半径の比の値はどうなるだろうか？

実際に当時の土星と木星の軌道半径の比の値はコペルニクスの観測結果によると 1.75 である。

外側と内側の円の半径の比の値と

実際の木星と土星の軌道半径の比の値は近かった。

正三角形の内接円と外接円の半径の比の値が木星と土星の軌道半径の比の値に近かった。

⇩

正多角形の内接円と外接円の半径の比の値は惑星の軌道半径どうしの比の値に近いのではないだろうか!?（仮説）

⇩

しかし、この仮説を適用してしまうと正多角形は無限にあるために有限個しかない軌道半径どうしの比の値に近いものを見つけるのに際限がない。（仮説の否定）

⇩

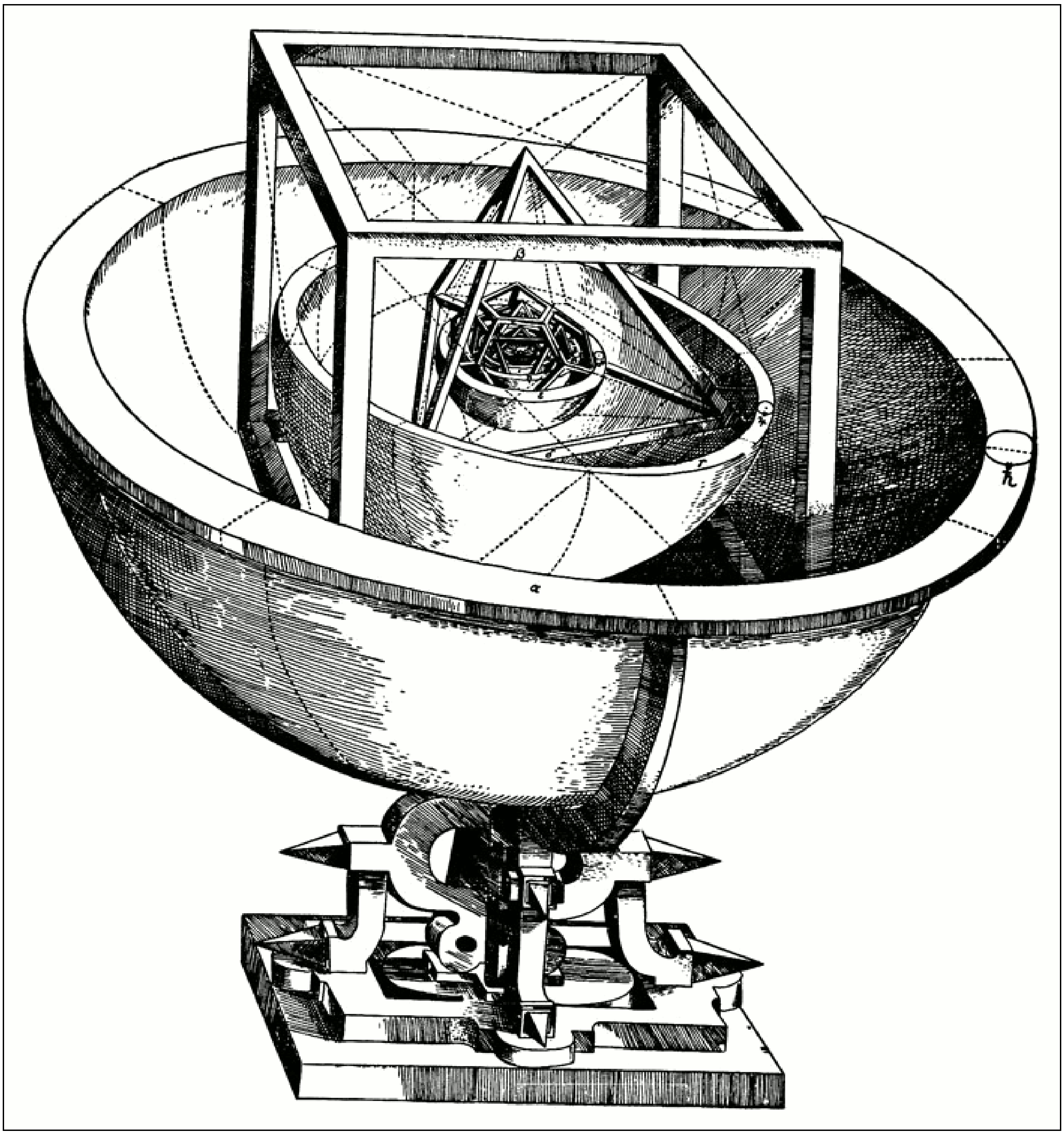
平面図形上で考えるのは間違えだった。

⇩

______________図形上で考えると正しいのではないだろうか!?（新たな仮説）

4. 各惑星軌道の半径と立体幾何との関係性

ケプラーは 2 次元の平面から 3 次元の立体に考えを広げ、惑星の軌道半径の関係が以下の模型に表れているのではないかと考えた。この考えの根底にはコペルニクスの宇宙は天球でできているという考えがある。



(『宇宙の神秘』挿絵より)

さて、この模型のどこがどの惑星の軌道となっていると考えたか？

ケプラーはこの模型にどのような立体が入っているか？

これからこの模型の仕組みとこれが本当に惑星の軌道半径の比の値に近似できるかを検証していきましょう。

この模型には＿＿＿＿＿＿＿＿、＿＿＿＿＿＿＿＿、＿＿＿＿＿＿＿＿、＿＿＿＿＿＿＿＿、＿＿＿＿＿＿＿＿の 5 つの＿＿＿＿＿＿＿＿が入っている。

この立体の定義はどこでどのように書かれているか見ていきましょう。
この定義は『宇宙の神秘』第 2 章注 1 に書いている。

この本では正多面体は以下のように定義されている。

Quodque his quinque] Corporum nobilitas est ex simplicitate, et ex aequalitate distantiae planorum à centro figurae. Sicut enim norma et regula creaturarum Deus est, sic Sphaera corporum. Atqui ea habet dictas proprietates. 1. Est simplicissima, quia vno clauditur termino, seipsa scilicet. 2. Omnia eius puncta aequalissime à centro distant. Ex corporibus igitur proxime accedunt regularia ad Sphaerae perfectionem. Eorum definitio haec est, vt habeant 1. omnia latera, 2. plana, et 3. angulos, singula aequales, et specie et magnitudine, quod est simplicitatis; quam positam definitionem sequitur illud vltro, quod 4. omnium planorum centra aequaliter à medio distent, 5. quod inscripta globo omnibus angulis tangant superficiem, 6. quod in ea haereant, 7. quod inscriptum globum omnibus planorum centris tangant, 8. quod proinde inscriptus globus haereat immotus, 9. et quod idem centrum habeat cum figura. Quibus rebus efficitur altera similitudo cum Sphaera, quae est ex aequalitate distantiae planorum.

（宇宙の神秘第 2 章注 1 より抜粋）

下線部訳

正立体の定義は以下のようになる。各正立体は形と大きさの等しい（1）稜、（2）面、（3）角だけをもたなければならない。これが単純さの特徴だからである。この定義から、結果としてさらに次のようなことが言える。（4）すべての側面の中央は立体の中心から等距離にある。（5）立体が球に内接する場合、立体のすべての角は球の表面に接触し、（6）立体は球の内部に固定されている。（7）球のほうが立体に内接する場合、立体のすべての側面の中央は球に接触し、（8）したがって内接球は動かないように固定されている。（9）そして球の中心は立体の中心と同一である。以上のことから、正立体と球とのもう一つの類似点が生じる。それは、〔図形の中心から〕側面までの距離が等しいことである。

注：正立体→正多面体のこと
　　稜→立体の一辺の長さのこと

次にこの立体が 5 つしかない理由を見ていこう!!

これはユークリッドの『幾何学原論』（ユークリッド原論）第 13 巻の第 18 命題の後ろの方にのっている。その部分を見ながら空欄を埋めていこう。

※ユークリッド原論→古代ギリシャの数学者、ユークリッドの著作。全部で 13 巻からなっている。

(7) Scholion autem illud ita sonat: Aio vero praeter dictas quinque figuras non posse aliam constitui figuram solidam, quae planis et aequilateris et aequiangulis contineatur, inter se aequalibus. Non enim ex duobus triangulis, sed neque ex alijs duabus figuris solidus constituetur angulus.

Sed ex tribus triangulis constat Pyramidis angulus.

Ex quatuor autem Octaedri.

Ex quinque vero Icosaedri.

Nam ex triangulis sex, et aequilateris, et aequiangulis ad idem punctum coeuntibus, non fiet angulus solidus. Cum enim trianguli aequilateri angulus recti vnius bessem contineat, erunt eiusmodi sex anguli rectis quatuor aequales. Quod fieri non potest. Nam solidus omnis angulus minoribus quam rectis quatuor angulis continetur, per 21. 11. Ob easdem sane causas neque ex pluribus quam planis sex eiusmodi angulis solidus constat. Sed ex tribus quadratis Cubi angulus constituitur.

Ex quatuor nullus potest. Rursus enim recti quatuor erunt.

Ex tribus autem pentagonis aequilateris et aequiangulis Dodecaedri angulus constituitur. Sed ex quatuor nullus potest. Cum enim Pentagoni aequilateri angulus rectus sit, et quinta recti pars, erunt quatuor anguli rectis quatuor maiores. Quod fieri nequit. Nec sane alijs polygonis figuris solidus angulus continebitur, quod hinc quoque absurdum sequatur. Quamobrem perspicuum est, praeter dictas quinque figuras aliam figuram solidam non posse constitui, quae sub planis aequilateris et aequiangulis contineatur. [1]

（宇宙の神秘第 2 章注 II より）

現代語訳

　あの〔ユークリッドの〕注解は、次のようなことを言っている。すなわち、上に述べた 5 つの立体の他に、等辺等角の互いに等しい大きさの面によって囲まれるような立体図形を作るのは不可能である。その理由は以下の通りである。______つの三角形からも、また他の____つの平面図形からも、立体角は作れない。

　だが、______つの正三角形からは、**ピラミッド体の角**が成立する。

　______つの正三角形からは、**正八面体の角**が成立する。

　また______つの正三角形からは、**正二十面体の角**が成立する。

　ところが、______つの等辺等角の三角形が同一点に集まると、立体角は作れない。なぜなら、正三角形の 1 角は________なので、こうして集まった______つの角は______直角に等しくなるだろうから。これは立体角にはなり得ない。ユークリッドの書の第 11 巻 21 によればすべての 4 直角よりも小さな角度からなるものだから。

　全く同じ理由から 1 立体角はどのような________つ以上の平面角からも構成されない。

　だが、________つの正方形からは、**立方体の角**が成立する。

　正方形が________つになるとどんな立体角も作れない。こうすればまた 4 直角ができるであろうから。

________つの等辺等角の五角形からは、**正十二面体の角**が成立する。しかし、________つになるとどんな立体角も作れない。正五角形の一角は______なので、4 つの角の和は________直角よりも大きくなる。これは立体角になり得ない。また明らかに、他の正多角形からは立体角は成立しないだろう。上のような考え方からすれば、それはやはり不条理だということになるから。それゆえ、上に述べた 5 つの立体図形の他に等辺等角の面で囲まれるような立体図形が作られないことは明かである。

注：相会しかつ同一平面上にない 2 つより多くの線分のすべてが互いになす傾きである。あるいは立体角とは 1 点においてつくられ同一平面上にない、2 つより多くの平面角によってかこまれる角である。

（ユークリッド原論第 11 巻より）

この訳をもとに整理しよう。

・2 つの面で立体角は＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

→つまり、立体角が作られるのは＿＿つ以上の面である

・正三角形で立体角が作られるのは何枚の時か？

→では、立体角が作られなくなるのは何枚以上の時か？

・正方形（正四角形）で立体角が作られるのは何枚の時か？

→では、立体角が作られなくなるのは何枚以下の時か？

・正五角形で立体角が作られるのは何枚の時か？

→では、立体角が作られなくなるのは何枚以下の時か？

・正六角形以上の正多角形で立体角は作られるか？

以上より＿＿＿＿枚以上では立体角はできないことが分かる。