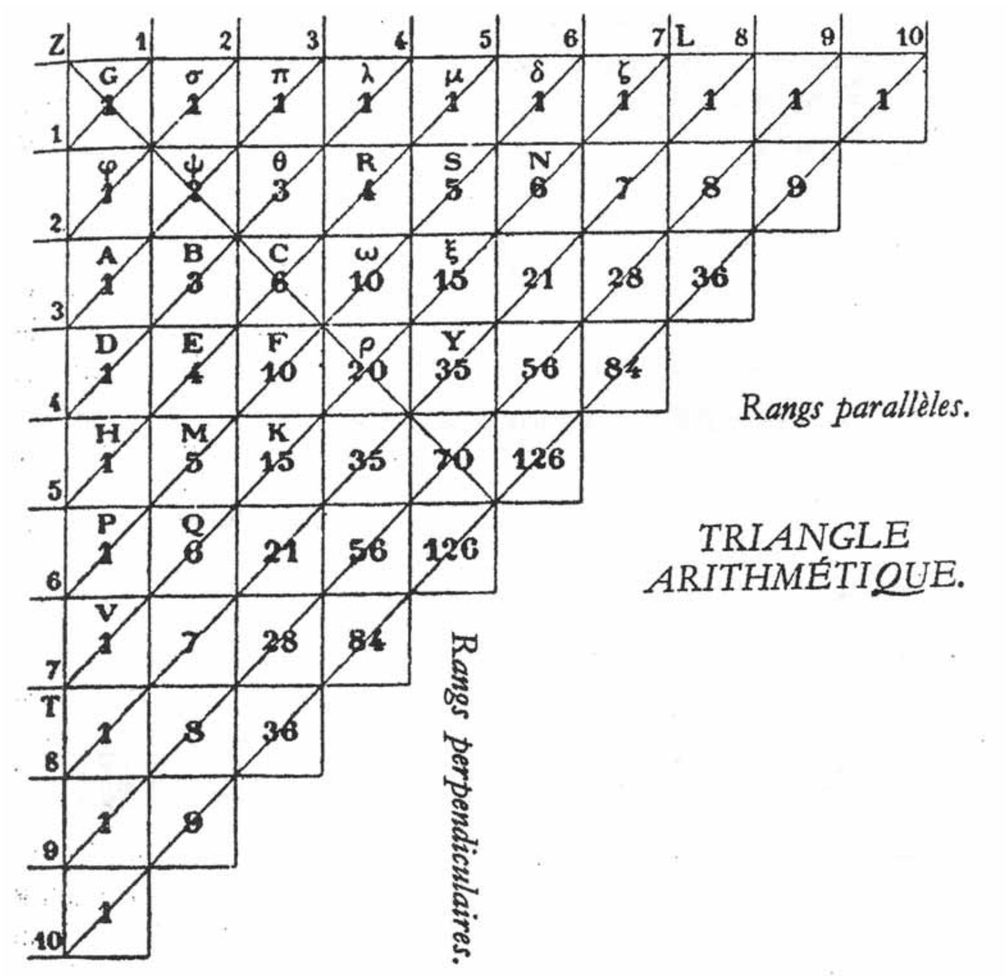
2005/12/20
千葉県立佐原高等学校

授業資料

数三角形とパスカルの数学



2年　　組　　番
氏名

授業者：岩井　剛
（筑波大学大学院修士課程教育研究科教科教育専攻数学教育コース１年）

この二日間の授業を通じて、17 世紀の数学の一端に触れたいと思います。17 世紀は数学的には近代世界へと入っていった時代です。皆さんが学んでいる数学とどこが同じでどこが違うのか、そういった部分を意識しながら取り組んでもらえればと思います。

それでは二日間、よろしくお願いします。

0．ウォーミングアップ

問題　次の式を展開せよ。

$(a+b)^7$

TRAITÉ
DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE

DÉFINITIONS

J'APPELLE *Triangle arithmétique,* une figure dont la construction est telle.

Je mène d'un point quelconque, G, deux lignes perpendiculaires l'une à l'autre, GV, Gζ, dans chacune desquelles je prends tant que je veux de parties égales et continues, à commencer par G, que je nomme 1, 2, 3, 4, etc.; et ces nombres sont *les exposants* des divisions des lignes.

Ensuite je joins les points de la première division qui sont dans chacune des deux lignes par une autre ligne qui forme un triangle dont elle est *la base.*

Je mène, par chacun des points de division, des lignes parallèles aux côtés, qui par leurs intersections forment de petits carrés, que j'appelle *cellules.*

Et les cellules qui sont entre deux parallèles qui vont de gauche à droite s'appellent *cellules d'un même rang prallèle*, comme les *cellules* G, σ, π, etc., ou φ, ψ, θ, etc.

Et celles qui sont entre deux lignes qui vont de haut en bas s'appellent *cellules d'un même rang perpendiculaire*, comme les cellules G, φ, A D, etc., et celles-ci, σ, ψ, B, etc.

Et celles qu'une même base traverse diagonalement sont dites *cellules d'une même base*, comme celles qui suivent, D, B, θ, λ, et celles-ci, A, ψ, π.

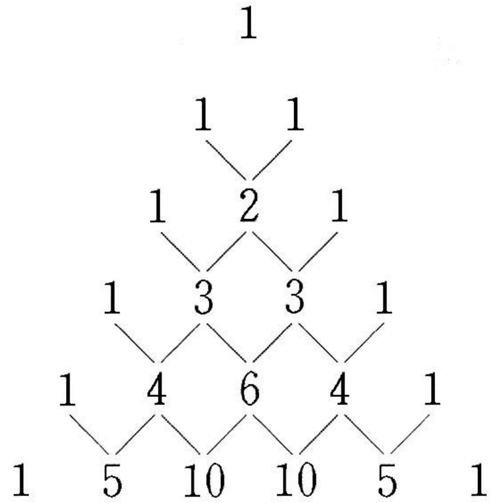
Les cellules d'une même base également distantes de ses extrémités sont dites *réciproques*, comme celles-ci, E, R et B, θ, parce que l'exposant du rang parallèle de l'une est le même que l'exposant du rang perpendiculaire de l'autre, comme il paraît en cet exemple, où E est dans le second rang perpendiculaire et dans le quatrième parallèle, et sa réciproque R est dans le second rang parallèle, et dans le quatrième perpendiculaire réciproquement; et il est bien facile de démontrer que celles qui ont leurs exposants réciproquement pareils sont dans une même base et également distantes de ses extrémités.

Le nombre de la première cellule qui est à l'angle droit est arbitraire; mais celui-là étant placé, tous les autres sont forcés; et pour cette raison il s'appelle le *générateur* du triangle. Et chacun des autres est spécifié par cette seule règle :

Le nombre de chaque cellule est égal à celui de la cellule qui la précède dans son rang perpendiculaire, plus à celui de la cellule qui la précède dans son rang parallèle. Ainsi la cellule F, c'est-à-dire le nombre de la cellule F, égale la cellule C, plus la cellule E, et ainsi des autres.

１．数三角形

皆さんは**「数三角形」**という言葉を聞いたことがありますか。この言葉から何をイメージするでしょうか。



「パスカルの三角形」というとどうでしょうか。これは知っている人も多いと思います。

一般に、右の図のように、二項係数を並べたものを**「パスカルの三角形」**といいます。格段の両端はすべて１で、その他の数字はすぐ左上と右上の数の和になっています。

現在、**「数三角形」**は**「パスカルの三角形」**として広く知られていますが、パスカル以前にも「数三角形」は用いられていました。では、なぜ**「数三角形」**は**「パスカルの三角形」**と呼ばれるようになったのでしょうか。

２．パスカル

ブレーズ・パスカル(Blaise Pascal)

1623-1662、フランス生まれ。数学者・物理学者・哲学者。数学者としては若くからその才能を発揮し、16 歳で『円錐曲線試論』を発表、18 歳で計算器を発明する。また、フェルマとともに確率論の祖と言われている。彼の死後、**『数三角形論』**（前頁）が出版された。

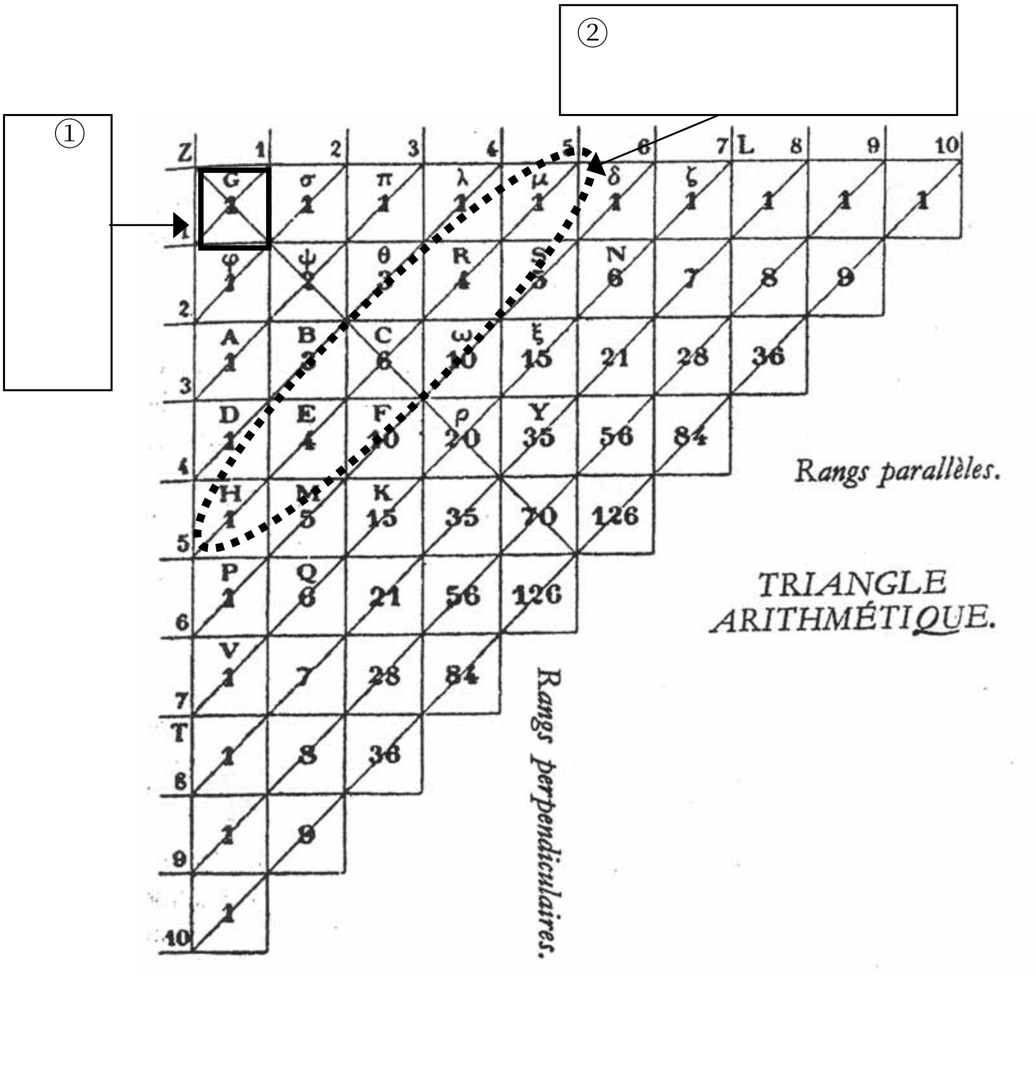
哲学者としては**「人間は考える葦である」**という言葉を残している。

パスカル（エドリンク作の版画）

３．『数三角形論』における定義

- 一つひとつの正方形(マス)を**細胞**という。
- 数三角形の上端と左端にある数を**指数**という。
- 左から右へ進む細胞を同じ**水平行**の細胞という。
- 上から下へ進む細胞を同じ**垂直行**の細胞という。
- 同じ指数を結んでできる対角線状の細胞を**底辺の細胞**という。
- 直角のところにある第 1 細胞 G の数を三角形の**母数**という。

定義に従って、下の空欄を埋めよう！



４．帰結

　数三角形について、何か気づいたことはありませんか。いろいろな性質を見て取ることができると思います。それらの性質は数三角形を構成する際の**前提**から導かれるものです。そのような「一定の論理的前提から導き出される結論」を「**帰結**」といいます。

　パスカルは『数三角形論』の中で **19 個の帰結**を導いています。その中から次の帰結を見てみましょう。

CONSÉQUENCE DOUZIÈME

En tout Triangle arithmétique, deux cellules contiguës étant dans une même base, la supérieure est à l'inférieure comme la multitude des cellules depuis la supérieure jusqu'au haut de la base à la multitude de celles depuis l'inférieure jusqu'en bas inclusivement.

帰結第 12

　あらゆる数三角形において、同じ**底辺**にあって**隣接する 2 つの細胞**のうち、**上位の細胞**と**下位の細胞**との**比**は、上位の細胞から底辺の**最上段**までの**細胞の個数**（両端の細胞を含む）と、下位の細胞から**最下段**までの**細胞の個数**（両端の細胞を含む）との**比**に等しい。

同じ底辺の任意の隣接 2 細胞としてE、Cをとれば、下位の細胞の

①____と上位の細胞の②____との比は、

Eから⑤__________までには　③____個の細胞、すなわち⑥__________があり、Cから⑦________までには④____個の細胞、すなわち⑧_____________があるので、

③____と④____との比に等しい。

？パスカルはどのように証明したのでしょうか？

5．パスカルの証明

この命題（帰結第 12）には**無限に多くの場合**があるが、私は **2 つの補題を仮定**することによって、きわめて短い証明を与えよう。

第 1. これは自明であるが、この比例は第 2 底辺において成り立つ。なぜならば、φ（ファイ）とσとの比が 1 と 1 との比に等しいことは極めて明らかである。

第 2. もしこの比例が**任意の** 1 底辺において成り立つならば、それは必然的に次の底辺においても成り立つ。

ここから、この比例が必然的に**すべての底辺において成り立つ**ことがわかる。なぜならば、補題 1 によって、この比例は第 2 底辺において成り立つ。故に、補題 2 によって、それは第 3 底辺において成り立つ。故に、第 4 底辺においても成り立つ。**以下限りなく同様**である。

故に、補題 2 のみを証明すればよい。それには次のようにする。いま、この比例が任意の 1 底辺、例えば第 4 底辺Dλ（ラムダ）において成り立つとする。すなわち、DとBとの比が①____と②____との比に、Bとθとの比が 2 と 2 との比に、θとλとの比が③____と④____との比にそれぞれ等しいとする。そうすれば、同じ比例が次の底辺Hμ（ミュー）においても成り立ち、例えばEとCとの比は 2 と 3 との比に等しい。

なぜならば、仮定によって、DとBとの比は①____と②____との比に等しい。

故に、D＋BとBとの比は①____＋②____と②____との比に等しい。

⑤____とBとの比は　⑥____と②____との比に等しい。

同様に、仮定によって、B とθとの比は 2 と 2 との比に等しい。

故に、B＋θと B との比はと 2＋2 と 2 との等しい。

⑦____とBとの比は　4　と　2　との比に等しい。

しかるに、BとEとの比は②____と⑥____との比に等しい。

故に、合成比によって、CとEとの比は、⑧____と⑨____との比に等しい。証明終。