中学校·高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp153-166、2006年3月

数学的帰納法の理解に関する研究

―パスカルの数三角形を題材として―

筑波大学大学院修士課程教育研究科
岩井　剛

章構成

1. はじめに
2. 研究目的・研究方法
3. 「パスカルの数三角形」の教材化
4. パスカルの数三角形に関する数学的解説
5. 数三角形と数学的帰納法に関する授業概要
6. 考察
7. おわりに

要約

本研究では、パスカルの数三角形に関する原典を授業で扱うことで、生徒が数学的帰納法に対する知識を再構成し得るか、また、生徒の数学観に変容が見られるかを考察した。授業結果から、原典解釈による授業が、生徒の知識の再構成や、数学観を変容させることに有効であることが示された。

キーワード：数学的帰納法、数三角形、原典解釈、起源、無限、自然数

1．はじめに

現行の高等学校学習指導要領解説数学編(文部省，1999)では、数学 B の目標にある「基礎的な知識の習得と技能の習熟を図り」(1999，p87)という文言について、「知識の習得は技能の習熟と関連付けられて身に付くものであり、技能の習熟は知識の習得に裏付けられている」(1999，p87-88)と言及している。また、数学的帰納法については「自然数 n を用いて表された命題を証明する方法として、数学的帰納法の意味とその扱い方を理解させる。」(1999，p90)とある。これらを合わせると、数学的帰納法の「意味」は基礎的な「知識」と、「扱い方」は「技能」と読み取ることができ、意味は扱い方と関連付けられて身につき、扱い方は意味の習得に裏付けられると換言できる。

これに対し、数学的帰納法の指導の実態について、間瀬(1990)は「あまりに証明の形式適用ばかりに重点がおかれ過ぎているという指摘が、古くからなされている。」(1990, p127)と述べている。また、村上(1990)も、生徒の数学的帰納法の理解について、「たとえ証明の正当性が理解できなくても、練習を積むうちに形式的に証明できるようになり」、「生徒がすっかりわかったつもりになってしまう」(1990，p414)と述べ、文部省の掲げる目標と指導の実態や生徒の理解とのずれを指摘している。

では、生徒が数学的帰納法に対する知識にもとづいて、その扱い方を習熟させる、あるいは、扱い方から知識の再構成を図るような、知識の習得に重点を置いた授業実践としてはどのような方策が考えられるであろうか。Rashed(2004)は数学的帰納法の歴史を問題とし

て採り上げる際に、新たな証明法に頼った経緯を調べることが、数学的帰納法の歴史を正確に捉える上で必要であると指摘している。また、中村(1981)は、数学をその形成において考え、その形成のメカニズムを明らかにすることが、数学の本質に触れる機会を提供するとしている。これについて、Tzanakis and Arcavi(2000)は「数学史は進行中の数学を見せるための自然な方法である」(2000, p202)と述べている。さらに、礒田(2001)は数学史上の原典を用いることの意義について、その数学が使われた文化、時代の文脈において、解釈し、そのよさを相対的に吟味することが、現在我々の学ぶ数学が一つの文化であることを認める活動につながると述べ、その吟味の対象となるものの一つに言語表現を挙げている。また、原典解釈に際して、礒田(2002)は「テキストの妥当な解釈は著者(や話者)の心情を想定して、他者の立場になってみる主体の働きかけにおいてはじめて可能」(2002, p3)であるとしている。

以上のことから、数学的帰納法に関する数学史の利用が、上述の授業実践の方策の一つになると筆者は考える。すなわち、どのような必要性に応じて数学的帰納法が用いられるようになったのか、パスカルの立場を想定し、その背景を知ることで、生徒が現在学んでいる数学を見直し、数学的帰納法の理解や知識を再構成し得ると考えたのである。そこで、パスカルの原典『数三角形論』の中の帰結第 12 に与えられている証明を採り上げたものが本研究である。

パスカルの数三角形を題材にした授業の先行研究としては平島(2005)のものがあるが、平島(2005)の研究では数学と人間の社会・文化との関わりに焦点が当てられており、その内容も確率論を主とするものであった。本研究で採り上げた原典『数三角形論』の中の帰結第 12 と数学的帰納法の関連性についても、紹介にとどまっている。それに対して、本研究は、帰結第 12 に焦点を絞り、原典当時の表現様式や証明の進め方についての議論を通して、数学的帰納法に対する知識の再構成を図ることを中心とした授業実践であるという点で違いが見られる。また、平島(2005)の授業実践は募集生徒 4 名に対して行われたものであったが、本研究では、県立高等学校普通科の 2 クラスをその対象としており、授業環境の面でも大きな違いがあると言えるだろう。

2. 研究目的・研究方法

(1) 研究目的

パスカルの原典『数三角形論』の解釈を通して、生徒が数学的帰納法に対する知識を再構成し得るかどうか、また、数学的帰納法の起源に触れ、当時の表現様式を吟味することで、生徒の数学観に変容が見られるかどうかを考察することを目的とする。

(2) 研究方法

以上の目的を達成するために、以下の課題を設定する。

課題 1. パスカルが行った帰結第 12 の証明を、その立場を想定しながら行うことで、数学的帰納法が「無限に多くの場合」を証明するための論法として導入されたことに気づくことができるか。

課題 2. 原典当時の数学の表現様式から現代の数学との共通点・相違点を見出し、現代の数学がより洗練されたものであることを生徒が自覚し得るか。

中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp153-166、2006年3月

課題 3．数学的帰納法の導入に触れ、数学が発展してきたことに気づけるか。
課題 4．上記の課題を通して、数学的帰納法に対する理解を深めることができるか。

上記の課題に沿って、パスカルの原典『数三角形論』を用いた教材開発を行い、数学的帰納法に焦点を当てた授業を行う。授業テキストとワークシート、ビデオカメラによる授業記録、授業前後のアンケートをもとに考察する。

3. 「パスカルの数三角形」の教材化

本研究では『パスカル全集　第一巻』に収められている『数三角形論』を原典として用いた。ただし、本研究での原典には、翻訳文献も含めることとする。

（1）パスカルの数三角形について

現在、数三角形は「パスカルの三角形」として広く知られている。しかし、「パスカル以前のイタリア、あるいはドイツの数学者も、よくこれを使っていた」(中村, 1959)というように、パスカルが数三角形を採り上げる以前にも数三角形自体は存在していた。では、なぜ数三角形は「パスカルの三角形」として広く知られるようになったのか。中村(1959)は、その理由に、パスカルが他の数学者よりも数三角形をより進めた点として「(第 1)に、数三角形というものを彼の数列論の原理的方法として採上げ、(第 2)にこれを縦横に駆使して、数列論、組合せ論、確率論、二項展開等を著しく発展させたこと」(1959，p566)を挙げている。その一端が『数三角形論』の中に認められる。パスカルは『数三角形論』の中で、数三角形に関する種々の性質を「帰結」としてまとめており、その数は 19 個にも及ぶのである。以上より、パスカルの数三角形はその名称の由来からも、数学的内容からも生徒の興味を喚起し得る教材になると筆者は考えた。

（2）帰結第 12 について

授業では 19 個の帰結の中から「帰結第 12」を採り上げた。中村(1959)は、パスカルが帰結第 12 の証明に用いた論法は数学的帰納法であると指摘し、ここで「証明論法としての数学的帰納法が、はじめて完全に述べられ、かつ組織的に数学に導入されたといっても、決して不当なことではないであろう。」(1959，p564)と述べ、数学的帰納法の起源をパスカルに求めている。このことから、帰結第 12 を採り上げることは数学的帰納法の起源に触れるという目的に沿うことに繋がると筆者は考えた。

その帰結第 12 とパスカルが与えた証明を以下に記す。

帰結第 12　あらゆる数三角形において、同じ底辺にあって隣接する 2 つの細胞のうち、上位の細胞と下位の細胞との比は、上位の細胞から底辺の最上段までの細胞の個数（両端を含む）と、下位の細胞から最下段までの細胞の個数（両端の細胞を含む）との比に等しい。

この命題には無限に多くの場合があるが、私は 2 つの補題を仮定することによって、きわめて短い証明を与えよう。

第 1．これは自明であるが、この比例は第 2 底辺において成り立つ。なぜならば、φ と σ との比が 1 と 1 との比に等しいことは極めて明らかである。

第 2．もしこの比例が任意の 1 底辺において成り立つならば、それは必然的に次の底辺

においても成り立つ。

ここから、この比例が必然的にすべての底辺において成り立つことがわかる。なぜならば、補題 1 によって、この比例は第 2 底辺において成り立つ。故に、補題 2 によって、それは第 3 底辺において成り立つ。故に、第 4 底辺においても成り立つ。以下限りなく同様である。

故に、補題 2 のみを証明すればよい。それには次のようにする。いま、この比例が任意の 1 底辺、例えば第 4 底辺 Dλ において成り立つとする。すなわち、D と B との比が 1 と 3 との比に、B と θ との比が 2 と 2 との比に、θ と λ との比が 3 と 1 との比にそれぞれ等しいとする。そうすれば、同じ比例が次の底辺 Hμ においても成り立ち、例えば E と C との比は 2 と 3 との比に等しい。

なぜならば、仮定によって、D と B との比は 1 と 3 との比に等しい。

故に、D＋B と B との比は 1+3 と 3 との比に等しい。

E と B との比は　4 と 3 との比に等しい。

同様に、仮定によって、B と θ との比は 2 と 2 との比に等しい。

故に、B＋θ と B との比は 2+2 と 2 との比に等しい。

C と B との比は　4 と 2 との比に等しい。

しかるに、B と E との比は 3 と 4 との比に等しい。

故に、複合比によって、C と E との比は、3 と 2 との比に等しい。証明終。

(3) 数学的帰納法について

中村(1959)は「数三角形論における数列の取扱いにおいて、数学的帰納法の論法が、きわめて完全な形で出現してくることは、看過されてはならぬことであろう。」(1959, p565)と述べ、数学的帰納法を原理として確立したことを「パスカルの著しい業績のひとつに帰すべきである」(1959, p564)と述べている。また、パスカルが数学的帰納法を導入したことにより、「近世数学は、はじめて、『すべての自然数』に関する命題をもち、有限から無限へ移る最初の数学的方法を獲得したのである。このようにして、無限数列というものを、数学的に処理し得る基礎がようやく確立したということができる」(1959, p564)と述べ、パスカルの証明論法が数学の発展に多大な影響を与えたことに言及している。

一方で、Rashed(2004)は、パスカルの適用している数学的帰納法の公式化が「一般的で明晰なもの」(2004, p79)と、また「$[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$が一般的な形で、すなわち、任意の自然数に対して、かつ『$P(n)$は真である』という仮定を付与した形で言葉を用いて述べられていた」(2004, p79)と認めながら、実際には「$n=1$の場合を確かめて、$n=4$の場合にも真であると仮定してから、$n=5$の場合を証明している。」(2004, p79)と指摘し、もしも数学的帰納法が、ペアノに倣って「Pが$\mathbf{N}$において定義された性質として、$P(1)$で$[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ならば、$P$は$n \in \mathbf{N}$に対して真である」(2004, p77)を意味するならば、パスカルの論法も数学的帰納法とは区別しなければならないとしている。しかし、「パスカルの公式化の新しさを否定することなど、まったくない。むしろ、

中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp153-166、2006年3月

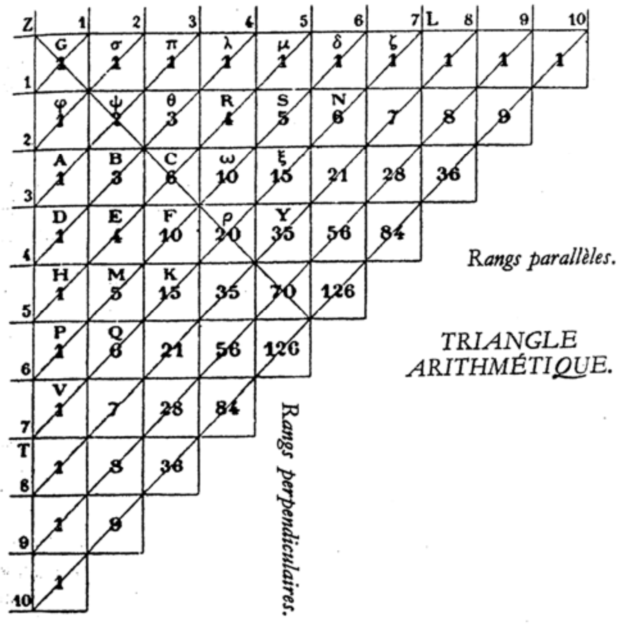
その時代遅れの公式化ゆえに正確さはかけるとしても、そのオリジナリティーによって、昨今の読者は、パスカルの原理を、数学的帰納法の先駆者だと認識することができる。」(2004, p81)とも述べ、パスカルの功績を称えている。

また、村上(1990)も「数学的帰納法という証明法を導入したのは Pascal」(1990, p414)とした上で、「この証明法の正当性が認められたのは、やはり 1891 年にペアノが発表した論文『数の概念について』の自然数の公理系によってである」(1990, p414)と述べている。しかし、数学的帰納法の「正当性を完全に納得するためには、ペアノの公理を完全に理解し、あるいはその公理を完全に納得しなければならないであろうが、証明は狭義には相手を論破する方法、説得する方法であるから、学校数学においては生徒にその正当性を納得させ得れば十分といわねばならないであろう。」(1990, p414)とも述べ、学校数学における数学的帰納法の扱いについては、その起源をパスカルとすることを容認しているように見受けられる。

以上からも分かるとおり、パスカルが帰結第 12 に与えた証明についてはいくつかの立場がある。そこで、数学的帰納法の原理としての起源をパスカルに求めながら、パスカルが帰結第 12 に与えた証明は正当性まで含めた完全な形での数学的帰納法とは認めず、現代の数学的帰納法とは表現や表記法といった部分で異なるという立場から教材化を図ったものが本研究である。

4. パスカルの数三角形に関する数学的解説

(1) パスカルの数三角形について



資料 1　パスカルの数三角形

パスカルが考案した数三角形(資料 1)は、現在我々が教科書で見るような数三角形(資料 2)とは形が異なる。様々な部分に名称が付けられているので紹介する。まず、マス一つひとつを＜細胞＞と呼ぶ。細胞の一部には、A や Y などの名前が付けられている。これは、この後の数三角形に関する議論をしやすくするためにあると考えられる。ここで、細胞 G は＜母細胞＞と呼ばれ、G から縦横均等に 10 個に分けられている。そして、上部と左部に付けられた 1 から 10 までの数字を＜分割の指数＞と呼ぶ。また、左から右へ進む 2 つの平行線の間の細胞の集まりを＜同じ水平行の細胞＞といい、その分割の指数が 3 だった場合、特に第 3 水平行の細胞と呼ぶ。同様に、上から下へ進む 2 つの平行線の間の細胞を＜同じ垂直行の細胞＞といい、その分割の指数が 3 だった場合、特に、第 3 垂直行の細胞と呼ぶ。さらに、縦横の同じ分割の指数同士を結んだ左下から右上にかけて引かれた斜

めの線を＜底辺＞と呼ぶ。同じ底辺が対角線上に横切っている細胞を＜同じ底辺の細胞＞といい、その分割の指数が 3 だった場合、第 3 底辺の細胞、もしくは、その底辺の最下段と最上段の細胞の名前をとって、底辺 Aπ という。同じ底辺の細胞で、その両端から等距離にあるものを＜相反細胞＞と呼ぶ。ここで、母細胞 G とそれぞれの底辺により、三角形が作られる。この三角形一つひとつを＜数三角形＞と呼ぶ。

各細胞の数は、その垂直行における直前の細胞の数とその水平行における直前の細胞の数との和に等しい。例えば、細胞 E の数は、細胞 B の数と細胞 D の数との和に等しい。それぞれの細胞の数は、細胞 G に入れる任意の数(これを母数という)に依存する。原典では単に「細胞」といって、その細胞の数が意味されることが多い。

ここで、母数を 1 とすると、第$n+1$底辺の細胞の数は最下段から順に

$${}_nC_0, {}_nC_1, {}_nC_2, \cdots, \ {}_nC_r, \cdots, \ {}_nC_{n-2}, {}_nC_{n-1}, {}_nC_n$$

と書ける。

また、「各細胞の数は、その垂直行における直前の細胞の数とその水平行における直前の細胞の数との和に等しい。」ということは

$${}_{n+1}C_r = {}_nC_{r-1} + {}_nC_r$$

を表していることが分かる。

（2）帰結第 12 について

帰結第 12 とその証明を現在用いられている表記にしたがって書き直すと以下のようになる。

帰結第 12　${}_nC_r : {}_nC_{r+1} = (1+r):(n-r)$　ここで、$0 \leqq r \leqq n-1$

この命題には無限に多くの場合があるが、私は 2 つの補題を仮定することによって、きわめて短い証明を与えよう。

第 1.　この帰結が$n=1$について成り立つことは極めて明らかである。

第 2.　この帰結が任意のnについて成り立てば、それは必然的に$n+1$についても成り立つ。

ここから、この帰結がすべてのnについて成り立つことがわかる。なぜならば、補題 1. によって、これは$n=1$において成り立つ。故に、補題 2 によって、$n=2$において成り立つ。故に、$n=3$においても成り立つ。以下限りなく同様である。

故に、補題 2 のみを証明すればよい。

すなわち、仮定から

$${}_nC_r : {}_nC_{r+1} = (1+r):(n-r)$$

これから

$${}_nC_{r+1} = \frac{n-r}{1+r}\,{}_nC_r \qquad \cdots ①$$

ここで、rの代わりに$r-1$とおくことによって

$${}_nC_r = \frac{n-r+1}{r}\,{}_nC_{r-1}$$

$$ {}_nC_{r-1} = \frac{r}{n+1-r}\,{}_nC_r \quad \cdots ② $$

また、${}_{n+1}C_r = {}_nC_{r-1} + {}_nC_r$ より、②を代入すると、

$$ {}_{n+1}C_r = \frac{n+1}{n+1-r}\,{}_nC_r \quad \cdots ③ $$

また、${}_{n+1}C_{r+1} = {}_nC_r + {}_nC_{r+1}$ より、①を代入すると、

$$ {}_{n+1}C_{r+1} = \frac{n+1}{n+r}\,{}_nC_r \quad \cdots ④ $$

③、④から、

$$ {}_{n+1}C_r : {}_{n+1}C_{r+1} = (1+r):(n+1-r) $$

これが証明すべきことであった。

5. 数三角形と数学的帰納法に関する授業概要

(1) 授業環境

①対象：千葉県立高等学校第 2 学年(2 クラス)
②日時：平成 17 年 12 月 20 日、21 日(50 分×2 時間)
③準備：コンピュータ(Windows)、Microsoft Power Point、ビデオカメラ、プロジェクター、授業テキスト、ワークシート、事前・事後アンケート

(2) 授業展開

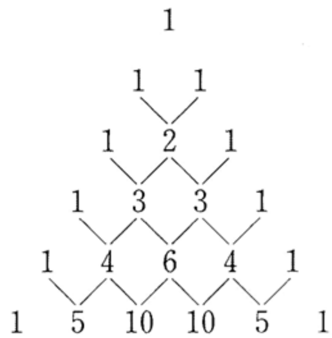
＜1 時間目＞

【ねらい】

原典である『数三角形論』の中の「数三角形」がどのようなものか、その形や作り方、性質を理解すると共に、原典の用語に慣れる。また、パスカルが導いた 19 個の帰結のうち、「帰結第 12」の原典解釈を通して、その性質を理解する。

【授業の流れ】

① まず、$(a+b)^7$ の展開をしてもらい、二項展開の係数として数三角形(資料 2)が利用できることを伝えた。その際、数三角形の格段の両端はすべて 1 となっていること、その他の数はすぐ左上と右上の数の和になっていることを確認し、これを一般に「パスカルの三角形」ということを伝えた。また、なぜ「パスカルの三角形」というのかを生徒に質問した。



資料 2 数三角形

（生徒との対話）

教師：なぜ「数三角形」は「パスカルの三角形」と言うのでしょうか。

生徒：パスカルという人が考えたから。

教師：実は、パスカル以前にもこの数三角形というものは使われています。パスカルがそれまでの人たちと違ったのは、この数三角形を幅広く応用させた点です。その一端が今回の授業を通して、少しでも感じられたらと思います。

ここから、なぜ「数三角形」が「パスカルの三角形」と呼ばれるようになったのかということを動機付けとして、パスカルの原典『数三角形論』を解釈していくことを伝えた。

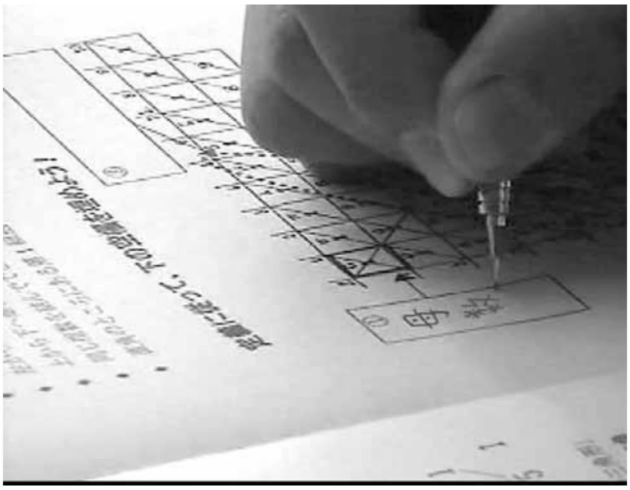


写真 3　用語を確認中

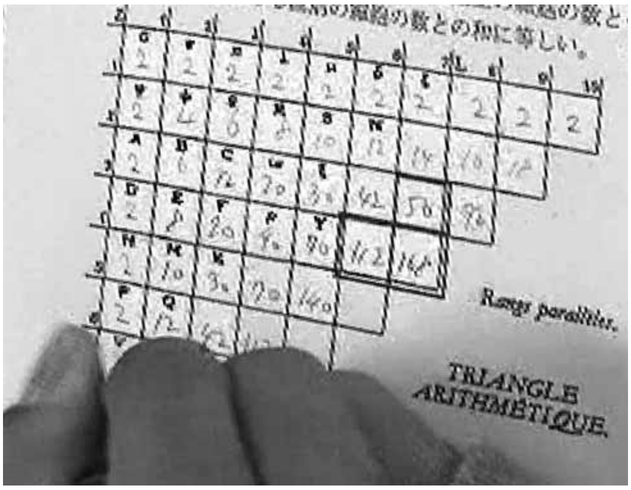


写真 4　パスカルの数三角形を作ろう

② 　帰結第 12 の原典解釈に際して必要となる「細胞」「指数」「底辺」「母数」といった用語を確認し、実際に数三角形を作ってもらった。母数は任意であるということから、母数が 2 や 10 の数三角形を作る生徒が見られた。母数を x として数三角形を作る生徒もいて驚いた。

③ 　作った数三角形について何か気づいたことはないか質問し、性質を挙げてもらった。すると、対称性を指摘する生徒や各底辺の和に着目する生徒が見られた。母数が 1 以外の数三角形においてもそれらの性質が成り立つことを確認した。そこで、パスカルはそのような性質を「帰結」として 19 個も導いていること、生徒から挙げられた性質も 19 個の帰結に含まれていることを伝えた。

写真 5　意見交換

④ 　19 個の帰結の中から、帰結第 12 を取り上げた。穴埋め式の問題を生徒に発表してもらい、それをもとに帰結第 12 で示されている性質を説明した。生徒は自分で作った数三角形の任意の底辺においてもこの帰結第 12 成り立つことを確認し、驚いている様子だった。そこで、パスカルが行った帰結第 12 の証明を次の時間に行うことを伝えて、1 時間目の授業を終えた。

＜2 時間目＞

【ねらい】

帰結第 12 の証明に数学的帰納法が用いられていることに気づき、パスカルが証明論法としての数学的帰納法を数学に導入したことを知る。また、現代の数学的帰納法との比較・検討を通して、数学的帰納法に対する理解を深める。

中学校･高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp153-166、2006年3月

【授業の流れ】

① 前時の復習として、帰結第 12 の確認をした。

② パスカルの証明を前半と後半に分け、前半部分を読んでもらい、この証明に用いられている証明論法は何であるかを質問した。

（生徒との対話）

教師：この証明法はなんでしょう。

生徒：数学的帰納法。

教師：はい、そうです。

このように、多くの生徒が数学的帰納法であることに気がついていた。しかし、数学的帰納法を忘れている生徒も見受けられたので、教科書を用いて数学的帰納法の確認をした。ここで、証明論法としての数学的帰納法がパスカルによってはじめて完全に述べられ、数学に導入されたことを伝えた。すると、生徒は数学史に興味を持った様子だった。

③ 証明の後半部分を、穴埋めをしながら読み進めた。その際、現代の証明との違いを意識しながら読み進めるように注意を促した。

④ 証明を読み終えた段階で、以下の質問をし、各自の考えをワークシートに書いてもらった。

1. パスカルの証明は、現代の（皆さんが学んだ）数学的帰納法による証明と同じものと言えますか。
2. パスカルはなぜ数学的帰納法を導入したのでしょうか。
3. 数学的帰納法が導入されたことで、何が可能になりましたか。

この命題（帰結第 12）には**無限に多くの場合**があるが、私は **2 つの補題**を仮定することによって、きわめて短い証明を与えよう。

補題 1. これは自明であるが、帰結第 12 は第 2 底辺において成り立つ。なぜならば、$\overset{\text{ファイ}}{\phi}$ と σ との比が 1 と 1（細胞の個数）との比に等しいことは極めて明らかである。

補題 2. もし帰結第 12 が**任意のある**底辺において成り立つならば、それは必然的に次の底辺においても成り立つ。

ここから、帰結題 12 が必然的に**すべての底辺において成り立つ**ことがわかる。なぜならば、補題 1 によって、帰結第 12 は第 2 底辺において成り立つ。故に、補題 2 によって、それは第 3 底辺において成り立つ。故に、第 4 底辺においても成り立つ。**以下限りなく同様**である。

この**証明法**は ＿＿＿＿＿＿＿＿ だ！

この証明法はパスカルによって導入された！

資料 6　証明前半のテキスト

故に、補題 2 のみを証明すればよい。それには次のようにする。

いま、帰結第 12 が任意のある底辺、例えば第 4 底辺 D $\overset{\text{ラムダ}}{\lambda}$ において成り立つとする。すなわち、D と B との比が①＿＿と②＿＿との比に、B と θ との比が 2 と 2 との比に、θ と λ との比が③＿＿と④＿＿との比にそれぞれ等しいとする。そのとき、帰結第 12 が次の底辺 H $\overset{\text{ミュー}}{\mu}$ においても成り立ち、例えば E と C との比は 2 と 3 との比に等しくなることを示す。

なぜならば、仮定によって、D と B との比は①＿＿と②＿＿との比に等しい。

故に、D+B と B との比は①＿＿+②＿＿と②＿＿との比に等しい。

⑤＿＿と B との比は　⑥＿＿と②＿＿との比に等しい。

同様に、仮定によって、B と θ との比は 2 と 2 との比に等しい。

故に、B+ θ と B との比はと 2+2 と 2 との等しい。

⑦＿＿と B との比は　4　と　2　との比に等しい。

ところで、B と E との比は②＿＿と⑥＿＿との比に等しい。

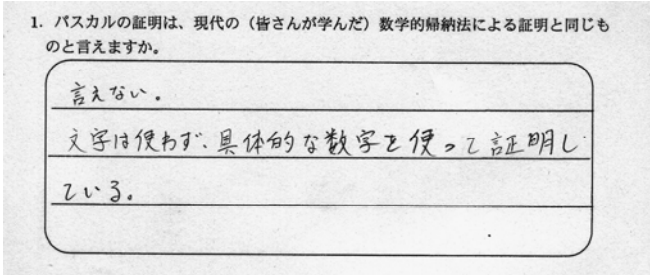
故に、複合比によって、C と E との比は、⑧＿＿と⑨＿＿との比に等しい。証明終。

残るすべての場合についても、**同様に**して同じことが示される。というのも、この証明は、帰結第 12 が直前の底辺において成り立つということと、各細胞は直前の細胞と直上の細胞との和に等しいということのみにもとづいているが、このことは至るところにおいて真なのであるから。

資料 7　証明後半のテキスト

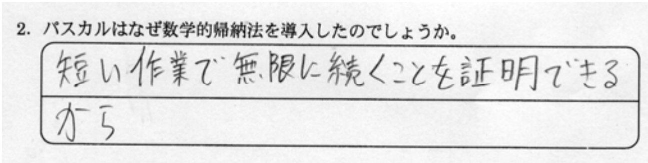
⑤　上記の質問に対する生徒の回答をもとに、パスカルが数学的帰納法を導入したことにより、それまでは直感や推測で扱っていた「無限」というものを数学的に扱えるようになり、これが数学の近代化へとつながったことをまとめとして、授業を終えた。

⑥　授業後のアンケートでは「パスカルの考えた帰結ってすごいと思った」、「パスカルが数学を近代化にもっていったんだなぁと思った」などの回答が見られ、生徒は「数三角形」が「パスカルの三角形」と呼ばれるようになった理由を感じているようだった。


1. パスカルの証明は、現代の（皆さんが学んだ）数学的帰納法による証明と同じものと言えますか。

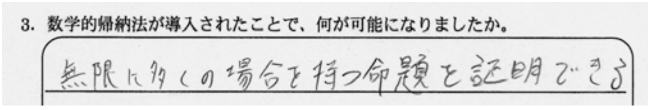
言えない。
文字は使わず、具体的な数字を使って証明している。

資料 8　ワークシート 1 の回答


2. パスカルはなぜ数学的帰納法を導入したのでしょうか。

短い作業で無限に続くことを証明できるから

資料 9　ワークシート 2 の回答


3. 数学的帰納法が導入されたことで、何が可能になりましたか。

無限に多くの場合を持つ命題を証明できる

資料 10　ワークシート 3 の回答

6. 考察

（1）課題 1 に対する考察

課題 1. パスカルが行った帰結第 12 の証明を、その立場を想定しながら行うことで、数学的帰納法が「無限に多くの場合」を証明するための論法として導入されたことに気づくことができるか。

ワークシートの質問 2「パスカルはなぜ数学的帰納法を導入したのでしょうか。」に対する生徒の回答を以下に記す。
①パスカルが最初にいっているように、無限に多くの場合を簡潔に証明するため。
②短い作業で無限に続くことを証明できるから。
③無限にある数について考えられるため。
④数三角形は無限に続いていくので、1 つ 1 つは証明しきれなかったから。
⑤証明する内容がずっと続いているから。
⑥同じ意味の証明を延々と繰り返すのを防ぐため。

上記のどの回答からも、表現の違いはあれ、パスカルが「無限に多くの場合」を証明するために数学的帰納法を導入したことに気づけていることが読み取れる。

これらの結果から、課題 1 は達成されたと言えるだろう。加えて、②や⑥からは、証明を短くするために数学的帰納法が導入されたと解釈したことが読み取れる。これは、課題 2、課題 3 に関わって、簡潔に表現しようと試みたという点での数学の発展に気づく土台が形成されつつあることを示唆していると考えられる。

（2）課題 2 に対する考察

課題 2. 原典当時の数学の表現様式から現代の数学との共通点・相違点を見出し、現代の数学がより洗練されたものであることを生徒が自覚し得るか。

ワークシートの質問 1「パスカルの証明は、現代の（皆さんが学んだ）数学的帰納法による証明と同じものと言えますか。」に対する生徒の回答を以下に記す。
①言えない。文字は使わず、具体的な数字を使って証明している。
②命題が 1 について成り立つところを示すのは同じ。パスカルの証明は記号（k）を使っていない。k+1 が成り立つのを証明したのかよくわからない。
③教科書に載ってる帰納法は任意の値を文字で表し、証明していたが、パスカルの証明は実際の値を代入し用いているので普遍性が無いように思えた。
④授業で教わった数学的帰納法は、言語を多く用いて証明するというよりも、数式を使って簡単に証明していた。
⑤2 つの補題を仮定している点が同じ。現代に比べて説明が長い。
⑥大分言葉での説明が長いと思った。

上記の回答を見ると、①は、相違点を端的に指摘している。②からは、相違点に加え、論法としての共通点も見出していることが分かる。③からは、相違点に気づいた上で、さらに現代の証明には普遍性があることを自覚していることが読み取れる。④・⑤・⑥は、現代の証明の方が簡潔であることを指摘しており、現代の数学がより洗練されたものであることに気づいていることを示唆している。

これらの結果から、課題 2 は達成されたと言えるだろう。

(3) 課題 3 に対する考察

課題 3．数学的帰納法の導入に触れ、数学が発展してきたことに気づけるか。

ワークシートの質問 3「数学的帰納法が導入されたことで、何が可能になりましたか。」に対する生徒の回答（①～④）と、事後アンケート「二日間の授業を通して思ったことや考えたことを自由に書いてください。」に対する生徒の回答（⑤～⑨）を以下に記す。
①無限にある多くの場合を証明できるようになった。
②無限の数を考えられるようになった。
③無限に多くの場合を持つ命題を証明できる。
④数学の勉強範囲の拡大。
⑤昔の人の数学のとき方にふれて、数学もいろいろな発見や進歩でなりたってるんだなぁと感じました。
⑥パスカルのような歴史上の偉人たちによって数学は発展したり、広がっていったのだと思った。
⑦パスカルの発見は現代数学への発展に役立ったと思う。
⑧数学にはまだ可能性がある!!
⑨今の数学もまだ進歩できるんだと思った。

ワークシートの質問 3 の回答①・②・③からは、数学的帰納法の導入により、「無限」を数学的に扱えるようになったことに気づいたことが分かる。④は「無限」ということには触れていないが、数学的帰納法の導入が数学の発展に貢献していることを感じ取ったことを表していると言える。また、事後アンケートの回答を見ると、⑤・⑥・⑦からは、パスカルを含めた過去の偉人らによって数学が発展してきたこ

とを感得したことがうかがえる。加えて、⑧・⑨では、過去から現代に至るまでの数学の発展を知ったことで、現代から未来に向けた、これからの数学の発展の可能性にまで考えが及んでいることが分かる。これらの結果から、課題 3 は達成されたと言えるだろう。

（4）課題 4 に対する考察

課題 4. 上記の課題を通して、数学的帰納法に対する理解を深めることができるか。

事後アンケート「数学的帰納法はどのような問題で用いますか。問題の特徴を挙げてください。」に対する生徒の回答（①～④）と、事後アンケート「二日間の授業を通して思ったことや考えたことを自由に書いてください。」に対する生徒の回答（⑤～⑦）を以下に記す。

尚、前者の質問については事前アンケートでも同様の質問を行っているが、①～④の回答は、授業前には無回答であったり（①～③）、「漸化式が成り立つか」といった具体的な問題を書くに留まっていたりした（④）生徒のものである。

①数が規則的に無限に続くと予想される時に、それが成り立つことを証明する問題で使う。

②無限に多くの場合の証明について。

③自然数に関する問題。

④全ての自然数において証明する問題。

⑤学校の授業では不完全消化だったので、以前より理解できるようになってよかった。

⑥忘れかけていた知識を再確認するだけだと思っていたのですが、さらに深いところまで知ることができ、理解が深まりました。

⑦何気なく使っていた帰納法だが、無限数列を解くためには不可欠なものだと知って驚いた。

①・②からは、数学的帰納法が用いられるのは無限を扱う問題であることを認識したことが読み取れる。③・④からは「自然数」というキーワードが引き出されている。これは「無限」を扱うなかで、数学的帰納法が「自然数」に関する命題を扱うものであることを生徒が改めて認識したと考えられ、数学的帰納法に対する知識の再構成が促されたことがうかがえる。⑤・⑥からも「理解できるようになってよかった。」「理解が深まりました。」という言葉から、再構成が促されたことが分かる。⑦からも「驚いた」という言葉から、数学的帰納法に対する再発見があったことが読み取れる。これらの結果から、課題 4 は達成されたと言えるだろう。

以上の議論より、パスカルの原典『数三角形論』の解釈を通して数学的帰納法の起源に触れることで、生徒は、数学的帰納法が「無限」を扱うために導入されたこと、その「無限」とは「すべての自然数」であることを再認識し、さらに、数学が発展を遂げてきたことを感得したことが示された。すなわち、生徒は数学的帰納法に対する知識を再構成し、数学観は変容したと言えよう。よって、本研究の目的は達成されたと言える。

7．おわりに

本研究では、生徒は数学的帰納法を形式的に用いることはできるが、自然数 n を用いて

表された命題を証明するための論法であるということを忘れている、あるいは理解できていないのではないかという問題意識を持ち、数学的帰納法の起源に触れることでその解決を図ることを目的とした。そして、パスカルの『数三角形論』を教材化し、それをもとに授業を行い、実際に生徒の数学的帰納法に対する知識や数学観に変容が見られるかどうかを考察した。その結果、生徒が、数学的帰納法はすべての自然数に対する命題を扱うための証明法であることを再認識し、現在学んでいる数学は先人達の知恵により洗練されてきたということを感得したということは、考察より明らかである。一方で「パスカルの三角形って日常生活のどこに使うのだろう？使わないとしたら、なぜパスカルは思いついたのだろうと不思議だった。」という感想も見られた。これは今回の授業内容が数学的内容に傾倒し、日常生活との関連性という側面が希薄であったためと思われる。同じくパスカルの数三角形を扱っている平島(2005)の研究では、数三角形とその応用である確率論を扱うことで、生徒は数学を人間の社会・文化的活動であることを認めている。本研究と平島(2005)の研究の成果を踏まえ、数学的内容と日常生活との関連性の両面から、数三角形を教材化する工夫や努力が今後の課題として挙げられる。

謝辞

授業研究の実施に際して、千葉県立佐原高等学校の数学科の先生方には、多大なるご協力とご指導をいただきました。ここに厚く御礼申し上げます。

注

本研究は、文部科学省科学研究費特定領域研究(2)課題番号 17011014「代数・幾何・ 微積分の動的理解を促す「使える数学」教材サイトの開発に関する研究ー数学用機械とJAVAによる移動・変換と関数・微積ハンズオン教材のWEB化研究（Ⅱ）ー」（研究 代表者礒田正美）による研究の一環として行われた。

引用・参考文献

文部省(1999). *高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編.* 実教出版.

間瀬友典(1990). 数学的帰納法の指導についての二，三の提言. *日本数学教育学会誌 第 72 巻 第 3 号*(pp.127-140).

村上一三(1990). 数学的帰納法の理解の困難点について: 証明の仕組みを視点として. *日本数学教育学会誌 第72 巻 第11 号*(pp.414-422).

ロシュディー・ラーシェド(2004). *アラビア数学の展望*(三村太郎 訳). 東京大学出版会.

中村幸四郎(1981). *数学史: 形成の立場から.* 共立出版.

Tzanakis. and Arcavi,A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In Fauvel, J. and Maanen, J. (eds.), *History in Mathematics Education*(pp.201-239). Kluwer Academic Publishers.

礒田正美(2001). 文化的営みとしての数学教育: その方法としての数学史上の一次文献の利用. *中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(8)世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育: 代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開*(pp.95-98). 筑波大学数学教育学研究室.

礒田正美(2002). 解釈学からみた数学的活動論の展開: 人間の営みを構想する数学教育学へのパースペクティブ. *筑波数学教育研究第 21 号*(pp1-10). 筑波大学数学教育研究室.

平島絡美(2005). パスカルの数三角形を用いた授業研究: 他者の立場の想定による数学と人間とのかかわり. *中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)Numeracy の規定の諸相と歴史文化志向の数学教育: 新しい教育課程へのアプローチ*(pp.220-233). 筑波大学数学教育学研究室.

中村幸四郎(1959). 数学論文集, 解説: パスカルの数学の業績について. 伊吹武彦 ほか (編), *パスカル全集 第一巻*(pp.560-570). 人文書院.

ブレーズ・パスカル(1959). 数三角形論(原享吉 訳). 伊吹武彦 ほか (編), *パスカル全集 第一巻*(pp.724-735). 人文書院.

Blaise Pascal(1954). Trait du Triangle Arithmetique. *OEuvres completes*(pp97-107). Gallimard.

ペアノ(1975). 数の概念について(小野勝次 ほか 訳). 共立出版.

島竹里枝 (2002). 原典を利用した文化的営みとしての数学指導: パスカル・ライプニッツの計算機を題材にして. *中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9)教育評価の転換と歴史文化志向の数学教育*: *ADDING IT UP: Helping Children Learn Mathematics*(pp.249-261). 筑波大学数学教育学研究室.

本橋信義(2002). *数学と新しい論理: 数学的帰納法をめぐって*. 遊星社.

山本芳彦 ほか(1997). *高等学校数学 A: 改訂版*. 啓林館.