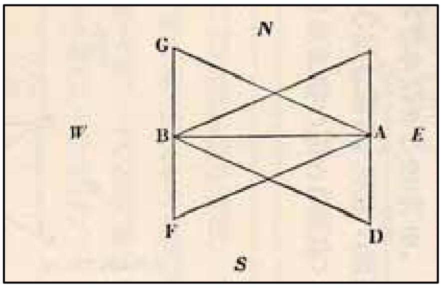
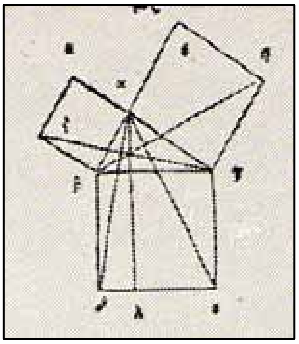
授業資料２日目

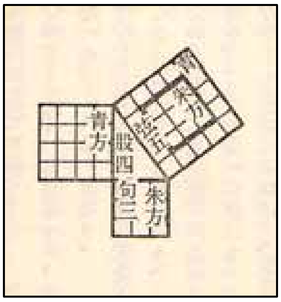
授業資料

～　シュルバスートラに潜む数学　～

世界のピタゴラス数・三平方の定理







２年５組　　番　氏名

授業者：筑波大学大学院修士課程教育研究科１年
高野　みずほ

○　前回の復習

＊　長方形（長四角）の作成

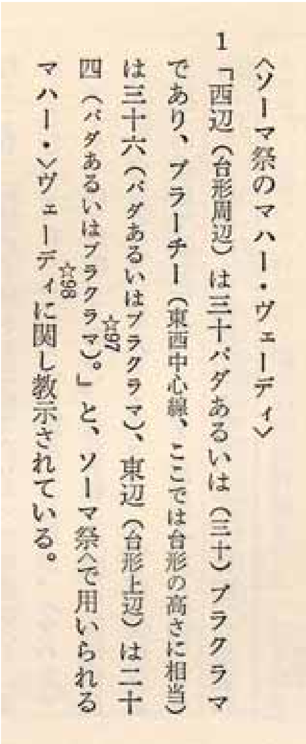
　前回はシュルバスートラの原典の日本語訳を用いて、実際に同じように図形を作成してもらいました。その中で、

三平方の定理　　・　　ピタゴラス数

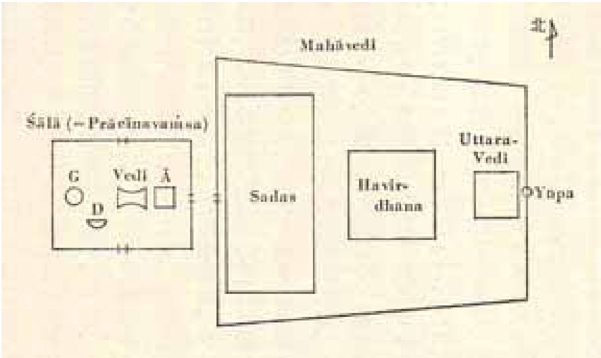
が関わっていることがわかりました。

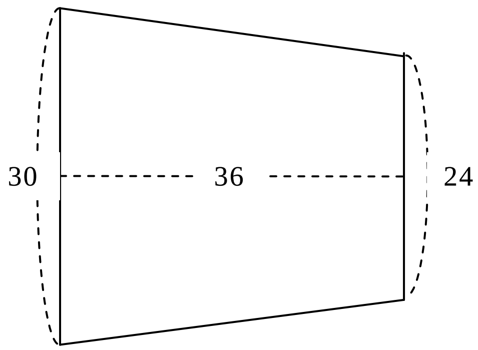
1、マハー・ヴェーディ（Mahavedi）の作成

次に示すマハー・ヴェーディは祭りにおける第２祭場で、大きな祭りでは主要行事のほとんどがここで行われるほど大切な場所です。


〈ソーマ祭のマハー・ヴェーディ〉

1 「西辺（台形周辺）は三十パダあるいは（三十）プラクラマであり、プラーチー（東西中心線、ここでは台形の高さに相当）は三十六（パダあるいはプラクラマ）、東辺（台形上辺）は二十四（パダあるいはプラクラマ）。」☆97 と、ソーマ祭〈で用いられるマハー・〉ヴェーディ☆98に関し教示されている。





● マハー・ヴェーディの作成方法を考えて見ましょう。
古代の人はどのような作成方法を考えていたのでしょうか？

＊ポイント＊

・まず、東西中心線（背骨線）を引きます。この長さを 36 とし、全体の長さの基準にします。

・古代インドの人々は異なるピタゴラス数の組み合わせを用いた数通りの方法を考えていました。 → ピタゴラス数を見つけてみましょう！

以下がシュルバスートラに書かれているマハー・ヴェーディの作成法です。自分たちで考えた方法と比較してみてください。

（1）

〈マハー・ヴェーディの作図法 II〉

3〈長方形の隣り合う二辺の長さが、それぞれ〉三と四である場合、対角線〈の長さ〉は五。これら☆101〈三つの長さに、それぞれ〉三回の同長附加を行なったものを用いて、〈マハー・ヴェーディの〉両肩（南東、北東の頂点）が〈決定される〉。☆102

〈一方、三者にそれぞれ〉四回の同長附加を行なった☆104ものを☆103用いて、両腰（南西、北西の頂点）が〈決定される〉。

（2）

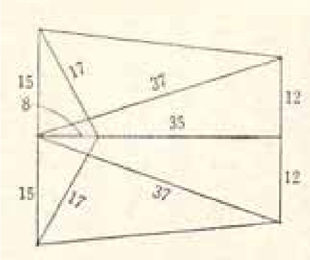
〈マハー・ヴェーディの作図法 III〉

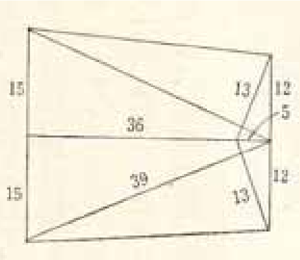
4〈長方形の隣り合う二辺の長さが、それぞれ〉十二と五である場合、対角線〈の長さ〉は十三。これら〈三つの長さ〉を用いて、〈マハー・ヴェーディの〉両肩が〈決定される〉。☆105〈一方、これら三者に〉二回の同長附加を行なったものによって、両腰が〈決定される〉。☆106

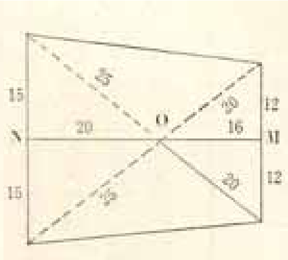
（3）

〈マハー・ヴェーディの作図法 III〉

5〈長方形の隣り合う二辺の長さが、それぞれ〉十五と八である場合、対角線〈の長さ〉は十七。これら〈三つの長さ〉を用いて、〈マハー・ヴェーディの〉両腰が〈決定される〉。〈長方形の隣り合う二辺の長さが、それぞれ〉十二と三十五である場合、対角線〈の長さ〉は三十七。これら〈三つの長さ〉を用いて、両肩が〈決定される〉。







● どのようなピタゴラス数が含まれているでしょうか？

（1）・・・

（2）・・・

（3）・・・

古代のインドにおいては三平方の定理を満たすようないくつかのピタゴラス数の組み合わせが見つかっていました。しかし、数学的に正しいとわかっていたわけではなく、経験的に具体的な数の組み合わせを知っていたのであろうと考えられています。

２、世界のピタゴラス数・三平方の定理

● バビロニア

バビロニアでは古いもので紀元前 25 世紀ごろの石版が見つかっています。下の石版は「プリンプトン 322」と呼ばれ、紀元前 16 世紀以前のものと見られています。

楔形文字で書かれており、一部欠けている部分もありますが、復元すると以下のような表になります。

I	II（＝b）	III（＝d）	IV	h
[1,59,0,] 15	1,59	2,49	1	2,0
[1,56,56,] 58,14,50,6,15	56,7	3,12,1	2	57,36
[1,55,7,] 41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3	1,20,0
[1,] 5 [3,1] 0,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4	3,45,0
[1,] 48,54,1,40	1,5	1,37	5	1,12
[1,] 47,6,41,40	5,19	8,1	6	6,0
[1,] 43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7	45,0
[1,] 41,33,59,3,45	13,19	20,49	8	16,0
[1,] 38,33,36,36	9,1	12,49	9	10,0
1,35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10	1,48,0
1,33,45	45	1,15	11	1,0
1,29,21,54,2,15	27,59	48,49	12	40,0
[1,] 27,0,3,45	7,21,1	4,49	13	4,0
1,25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14	45,0
[1,] 23,13,46,40	56	53	15	1,30

Ｉ～IVが石版に書かれている部分。また、[ ] の数は復元されたもの。

＊ポイント＊　バビロニアの数は 60 進法で表されています。
例：$1,16,41=1\times60^2+16\times60+41=4601$

● 5 行目と 11 行目の数を使って b、d、h の値の関係を確かめましょう。（本当にピタゴラス数になっているでしょうか？）

Ⅰは $\dfrac{d^2}{h^2}$ の値が述べられていることがわかっています。

したがって、失われた部分には h の値や、そのほかの比の値が記してあった可能性もあります。

※　この表はⅡの 9、13 行目、Ⅲの 2、15 行目に誤りが見つかっています。　→どのように直せばよいでしょうか？

● エジプト

エジプトでは、紀元前 2000 年という早い時代に縄を用いて測量を行った測量師がいたことが知られています。エジプトではナイル河の氾濫が定期的におこっていました。その際に土地の所有や課税地を再決定するために測量師が派遣されていました。

彼らは縄と杭を用い、三辺の比が３：４：５となる直角三角形を作って、この直角を利用していたと考えられています。

● ギリシャ

ギリシャでは、紀元前 500 年ごろ、ピタゴラスが三平方の定理を発見したといわれています。ピタゴラスが行った証明自体は伝わっていませんが、ギリシャ以来、この三平方の定理には様々な証明が行われました。


ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ
ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛ. ΙΕ.
ΕΚ ΤΩΝ ΘΕΩΝΟΣ ΣΥΝ-
ΟΥΣΙΩΝ.
Adiecta præfatiuncula in qua de disciplinis
Mathematicis nonnihil.
BASILEAE APUD IOAN. HERVAGIUM ANNO
M. D. XXXIII. MENSE SEPTEMBRI.

これらは、ユークリッドの『原論』です。右下に、今でも三平方の定理の証明に用いられている図が見られます。

● 中国

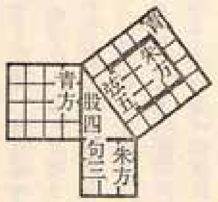
中国では、紀元前に「句股定理」という名前で三平方の定理が発見されていました。

中国では、天文と結びついた流れと、土木・建築等に必要な計算術としての流れで数学が発展しました。

劉徽註——〈直角三角形の直角をはさむ二辺のうち〉短辺を「句」といい、長辺を「股」という。また角を結んだ辺を「弦」という。「句」はその「股」より短く、「股」はその「弦」より短い。これを諸比例関係に用いようとするのであるから、まずこの術をそなえ、その源をはっきりさせる。

〈計算法〉「句」「股」をそれぞれ自乗し、加え合わし、開平方すれば、「弦」である。

劉徽註——「句」の自乗は下図の朱方をなし、「股」の自乗は青方をなす。これらを出入させ、たがいに補わせ、それぞれ類に従って付着させると、類は移動しないまま、「弦」方の冪を合成する。したがって開平方すると、「弦」である。



○　次回

　シュルバスートラにおいて縄では表現できない数を、どのように縄で表現しようとしていたかについてみていきたいと思います。

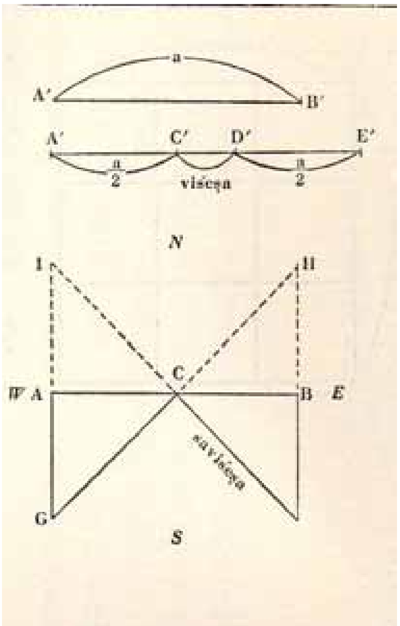


図6