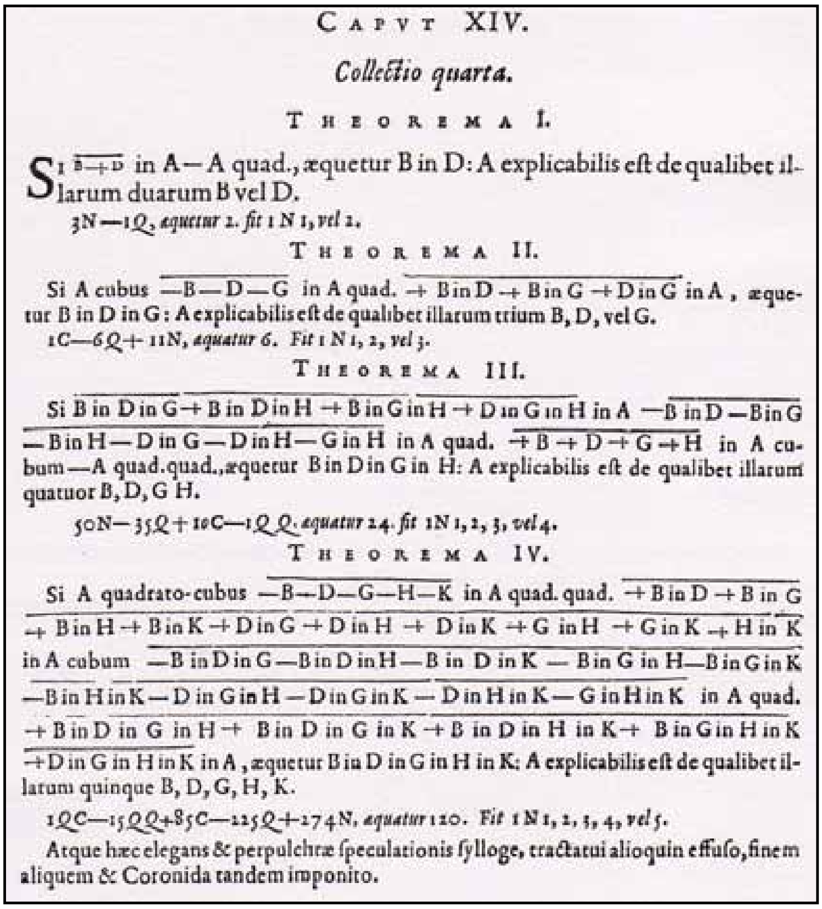
授業資料

2年　　組　　番　氏名

[方程式の理論]

Vol. 3



CAPVT XIV.

Collectio quarta.

THEOREMA I.

Si B + D in A − A quad., æquetur B in D: A explicabilis eſt de qualibet illarum duarum B vel D.

3N − 1Q, æquetur 2. fit 1N 1, vel 2.

THEOREMA II.

Si A cubus − B − D − G in A quad. + B in D + B in G + D in G in A, æquetur B in D in G: A explicabilis eſt de qualibet illarum trium B, D, vel G.

1C − 6Q + 11N, æquatur 6. Fit 1N 1, 2, vel 3.

THEOREMA III.

Si B in D in G + B in D in H + B in G in H + D in G in H in A − B in D − B in G − B in H − D in G − D in H − G in H in A quad. + B + D + G + H in A cubum − A quad.quad., æquetur B in D in G in H: A explicabilis eſt de qualibet illarum quatuor B, D, G H.

50N − 35Q + 10C − 1QQ. æquatur 24. fit 1N 1, 2, 3, vel 4.

THEOREMA IV.

Si A quadrato-cubus − B − D − G − H − K in A quad. quad. + B in D + B in G + B in H + B in K + D in G + D in H + D in K + G in H + G in K + H in K in A cubum − B in D in G − B in D in H − B in D in K − B in G in H − B in G in K − B in H in K − D in G in H − D in G in K − D in H in K − G in H in K in A quad. + B in D in G in H + B in D in G in K + B in D in H in K + B in G in H in K + D in G in H in K in A, æquetur B in D in G in H in K: A explicabilis eſt de qualibet illarum quinque B, D, G, H, K.

1QC − 15QQ + 85C − 225Q + 274N, æquatur 120. Fit 1N 1, 2, 3, 4, vel 5.

Atque hæc elegans & perpulchræ ſpeculationis ſylloge, tractatui alioquin effuſo, finem aliquem & Coronida tandem imponito.

授業者：筑波大学大学院教育研究科１年
大塚　慎太郎

§３．代数学の基本定理

代数学の基本定理　（ガウス、１７９９）
n 次の代数方程式は、重解も数えれば、複素数の範囲で必ず n 個の解を持つ。

※ここで、代数方程式とは $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0\ (a_n \neq 0)$ という形の方程式のことである。

事前アンケートではみなさんにこの質問をしましたが、どのように思いましたか。これは、現在では「代数学の基本定理」とよばれています。当たり前だと思っている人もいるかもしれませんが、この定理が証明されるのに１７０年もの時間がかかりました。そして、この定理が成り立つという予想もメソポタミアで方程式が解かれてから３０００年以上の年月がかかりました。

◎ジラールについて

名前：アルバート・ジラール（Albert Girard, 1595-1632）

出生地：フランドル（現在のベルギーの西部）

主な著書：『代数学における新発明』（『Invention nouvelle en l'algebre』）（1629）

ジラールは　『代数学における新発明』（1629）の中で、歴史的に初めて「代数学の基本定理」を予想しています。ただし、証明はしておらず、証明は１７０年後にカール・フリードリッヒ・ガウス（Carl Friedrich Gauss,　1777-1855）によって与えられました。

次の英文は、Albert Girard (1629) “Invention nouvelle en l’algebre” の D.J.Struik (1969) A source book in mathematics, 1200-1800.による英訳です。

Since the theorem which will follow requires some new expressions, we shall begin with definitions.

Definition I. A simple equation is one that has only one term[1] equal to a number; otherwise it is called composed or mixed.

Definition III. A complete equation is one that has all the terms without leaving one out.

Definition IV. An incomplete equation is a mixed equation that does not have all its terms.

Definition VIII. In mixed equations the highest term[6] is called the maximum or high extremity [*maxime, ou haute extrémité*]; the one that is one degree lower is called the first mixed; the one that is one degree lower still is called the second mixed; and so on, so that x^0 is the closure or lowest extremity [*la fermeture ou basse extrémité*].

Definition X. The alternate order of equations is that in which the maximum or high extremity has no other number than unity, with the sign +, and all odd denominators or characters are on one side, and the even ones on the other side, to wit the ones as the subject, the other ones as the predicate. Which serves to find the original signs again, when the equation in question is reordered.

Definition XI. When several numbers are given, let the total sum be called the first faction; the sum of all their products two by two be called the second faction; the sum of all their products three by three be called the third faction; and always so on until the end, but the product of all the numbers is the last faction: and so there are as many factions as there are numbers given.

［日本語訳］

　後に続く定理はいくつかの新しい表現をするので、定義からはじめる。

定義１．単純な方程式とは、ひとつの項が定数に等しい方程式のことである。そうでないものを構成された方程式、あるいは混合方程式という。

定義３．完全な方程式とは、すべての項を省略することなく持つものである。

定義４．不完全な方程式とは、項を全部は持たない混合方程式である。

定義８．混合方程式において、最高次の項を極大項あるいは頂点、それより次数が１低い項を第１項といい、さらに１低い項を第２項といい、・・・、x^0 の項（定数）を最終項あるいは底点という。

定義 10．方程式を交互に整理するとは、最高次の項の係数を１にし（さらに符号を＋にする）、偶数乗の項と奇数乗の項を分けることをいう。つまり、一方を方程式の主部（左辺）に、他方を述部（右辺）に分けることである。

定義 11．いくつかの数が与えられたとき、そのすべての数の総和を第１群、２つの数の積の総和を第２群、３つの数の積の総和を第３群、・・・、すべての数の積を最終群と呼ぶ。そして、与えられた数と同じ数の群がある。

問題

１．空欄に当てはまる適当な方程式を下から選べ。

単純な方程式　［　　　　　　　］　混合方程式　［　　　　　　　］

完全な方程式　［　　　　　　　］　不完全な方程式　［　　　　　　　］

①$x^9 = 3$　②$x^2 = 4$　③$x^2 + x = 2$　④$x^3 + 6x = 20$
⑤$x^4 - 2x^2 = 3x + 1$　⑥$x^5 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1$

２．次の空欄を埋めなさい。

・ジラールの定義によれば、$x^9 = 3x^8 - 10x^6 + 4x + 12$ において、x^9 は

（　　　　　　　）、$3x^8$ は（　　　　　　　）、-$10x^6$ は（　　　　　　　）、

（　　　　　　　）は第８項、（　　　　　　　）は最終項である。

・$x^7 = 4x^6 + 14x^5 - 56x^4 - 49x^3 + 196x^2 - 144$ を交互に整理すると

（　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　）とな

る。

３．与えられた数を２，４，５とすると、第１群は２＋４＋５＝１１、第２群は２・４＋４・５＋５・２＝３８、第３群（最終群）は２・４・５＝４０となる。４つの数２，－３，１，３が与えられたとき、すべての群を求めなさい。

Theorem II. All equations of algebra receive as many solutions as the denomination of the highest term shows, except the incomplete,[10] and the first faction of the solutions is equal to the number of the first mixed, their second faction is equal to the number of the second mixed; their third to the third mixed, and so on, so that the last faction is equal to the closure, and this according to the signs that can be observed in the alternate order.

•
•
•

Explication. Let a complete equation $x^4 = 4x^3 + 7x^2 - 34x - 24$ be given, then the denominator of the highest term is 4, which means that there are four certain solutions, no more and no less, namely 1, 2, -3, 4: here 4 is the number of the first mixed, 7 of the second mixed, and so on. But to see the thing in its perfection we must take the signs which we can see in the alternate order, as $x^4 - 7x^2 - 24 = 4x^3 - 34x$. Then the numbers with their signs (according to the order of the quantities) will be 4, -7, -34, -24, which are the four factions of the four solutions.

•
•
•

In the same way, if then the four factions will be and consequently the four solutions will be

$$\begin{gathered} 1 \\ 1 \\ -1 + \sqrt{-2} \\ -1 - \sqrt{-2} \end{gathered}$$

We must therefore always remember to keep this in mind: if someone were to ask what is the purpose of the solutions that are impossible, then I answer in three ways: for the certitude of the general rule, and the fact that there are no other solutions, and for its use. The use is easy to see, since it serves for the invention of solutions of similar equations

By this means you will find that nobody before has solved the equations with all the solutions.

［日本語訳］

定理２．　不完全な方程式を除いて、すべての代数方程式は最高次の項の次数と同じ数の解を持ち、その方程式の解の第１群は第１項の係数、第２群は第２項の係数、第３群は第３項の係数とそれぞれ等しくなり、・・・そして最終群は最終項と等しくなる。これは、交互に整理したときに見られる符号と一致する。

・
・
・

解説：完全な方程式 $x^4 = 4x^3 + 7x^2 - 34x + 24$ を与えると、最高次の項の次数は４であるから、この方程式は４つよりも多くも少なくもない解を持つ。それは $1, 2, -3, 4$ である。ここで、「４」はこの方程式の第１項の係数であり、「７」は第２項の係数であり、「－34」は…。しかし、定理を満たすようにするためには、$x^4 - 7x^2 - 24 = 4x^3 - 34x$ となるよう交互に整理することで、項を入れ替えなければならない。このとき、$4, -7, -34, -24$ は４つの解の４つの群である。

・
・
・

同様にして①＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿の場合も４つの群は②＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿であるから４つの解は、1，1，$-1+\sqrt{-2}$，$-1-\sqrt{-2}$ である。

私達はいつもこのことを覚えていなくてはならない。もしだれかが不可能な解の目的は何かと尋ねられたら私は３つの方法で答える。それは一般的な規則の確信、他には解がないという事実、そしてその有用性である。同じような方程式の解の発明をたすけることから、この有用性は容易にみることができる。

このことにより、今まで誰もそのような方程式の解をすべて求めることをしなかったことがわかるだろう。

問題

４．この定理では不完全な方程式について述べられていません。後にジラールは不完全な方程式でもこの定理が成り立つことをいっています。どのように説明したと思いますか。例えば、$x^3 = 7x - 6$（解は１，２，－３）について考えてください。

５．日本語訳の空欄に当てはまる　①方程式　②４つの数　を書きなさい。

① ______________________________

② ______________________________