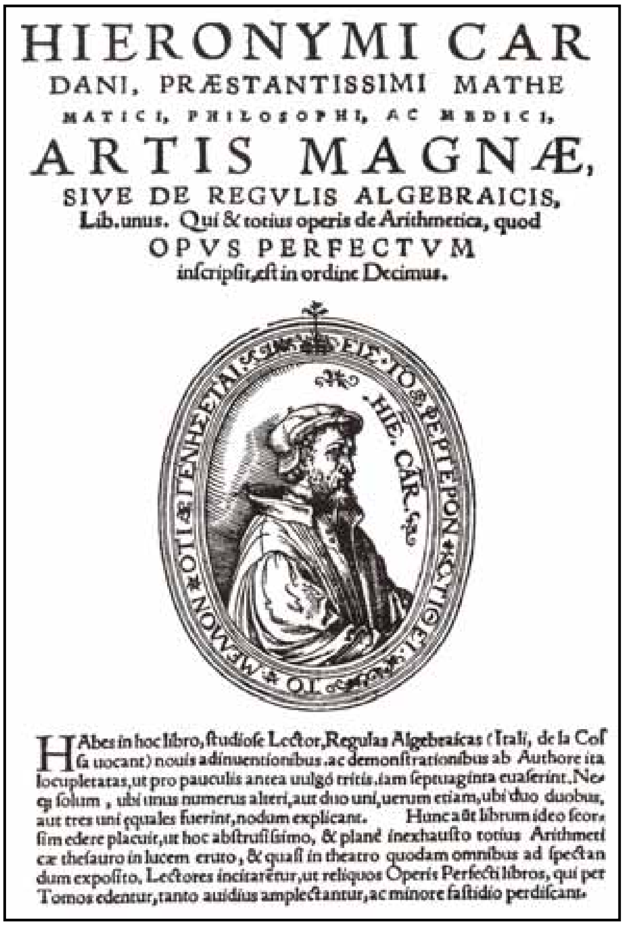
授業資料

2年　　組　　番　氏名

[方程式の理論]

Vol. 1


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inſcripſit, eſt in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neq; ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni ęquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſſimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarentur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

授業者：筑波大学大学院教育研究科１年
大塚　慎太郎

§０．はじめに

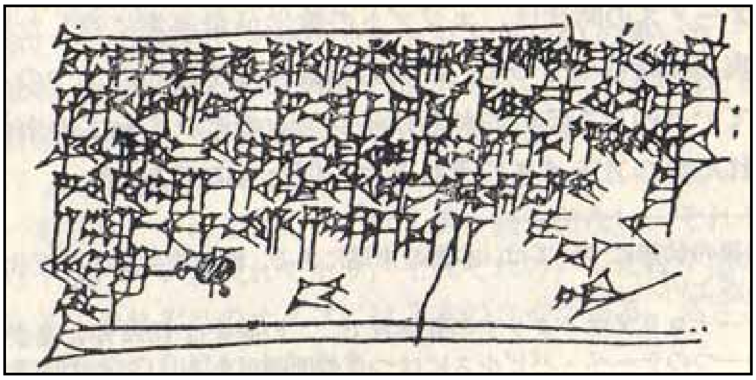
事前課題：問題１

箱の縦は$\frac{1}{3}$、高さは横の 12 倍、箱の底（面積）と容積の和は$1\frac{1}{6}$である。横を求めよ。

事前課題はやってきましたか。この問題は、ある時代のものなのですが、いつの時代だかわかりますか。

ヒント：左はその時代に建てられた建造物。右はその時代に使われていた文字（数学の問題について書かれています）。

この問題の出典は下の粘土板です。その時代にはどのようにこの問題を解いていたか見ていくことにします。



［原典の訳］

・箱の縦は$\frac{1}{3}$、高さは横の 12 倍、箱の底（面積）と容積の和は$1\frac{1}{6}$である。横を求めよ。

・$\frac{1}{3}$に 12 を掛けると、（①　　　　　）。

・①に$1\frac{1}{6}$を掛けて（②　　　　　）。

・$\frac{1}{3}$の半分は（③　　　　　）である。

・③を二乗すると（④　　　　　）。

・②に④を加えて（⑤　　　　　）。

・⑤の平方根は（⑥　　　　　）で、それと③の差は（⑦　　　　　）である。

・①の逆数をつくれば（⑧　　　　　）。

・⑧に⑦を掛ければ（⑨　　　　　）。

・見よ、⑨は横である。

問題

１．①～⑨の空欄を埋めなさい。

２．縦を a、高さは横の b 倍、箱の底（面積）と容積の和を c として、（ｉ）粘土板に書かれている方法と（ⅱ）現代の方法　で解け。

（ｉ） 粘土板の方法	（ⅱ）現代の方法
① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨	

時代は、１６・１７世紀のヨーロッパ。１４世紀のイタリアに発したルネサンスはその後３世紀でヨーロッパ全体に広がりました。この時代には、美術・音楽・文学・科学などが盛んになり、数学も大きく発展しました。そこで、この時代に大きく発展したもののひとつである「方程式」について、３人の数学者の視点から見ていくことにします。

§1. 方程式の解法の発達

二次方程式の解を求める方法は昔から知られていたのに対し、すべての三次以上の高次方程式の解を求める方法はいまだ知られていませんでした。しかし、ある一人の数学者によって、この解法は世の中に広く知れわたることになりました。

◎カルダノについて

Girolamo Cardano

名前：ジロラモ・カルダノ
（Girolamo Cardano, 1501-1576）
出生地：イタリア

主な著書：『大いなる技法』（『Ars Magna』）
『サイコロ遊びについて』
『自伝～我が人生の書～』

カルダノは『大いなる技法』（1545）の中で、三次方程式の解を一般的に求める解法を述べています。しかし、この解法を発見したのは、実はニッコロ・タルタリア（Niccolo Tartaglia, 1499-1557）でした。カルダノは、タルタリアから誰にも言わないという約束をもってこの解法を教えてもらったのですが、『大いなる技法』でこの解法を発表してしまいました。そのため、現在では、三次方程式の解法は「カルダノの解法」と呼ばれています。

また、『大いなる技法』の中には三次方程式の解法だけではなく、四次方程式の解法も述べられています。実は、この解法を発見したのもカルダノではなく、弟子のロドヴィコ・フェラリ（Lodovico Ferrari, 1522-1565）です。この解法については『大いなる技法』の中でフェラリが発見したと述べられています。

カルダノは数学者だけではなく、医者、哲学者、物理学者でもあり、占星術師、賭博師でもありました。そのため、妻と子供のいる身でありながら、賭博にのめりこみ過ぎて一文無しになったこともあります。また、賭博について書かれた本『サイコロ遊びについて』の中では「確率」について研究しており、歴史的に初めて「確率」に関する本を書いたのもカルダノです。

◎三次方程式の解の公式

次の文は、『大いなる技法』で述べられている三次方程式の解法の中のひとつです。ここでカルダノは、「$x^3 + ax = b$」という形の三次方程式の解の公式を示しています。

“ ARS MAGNA or The Rule of Algebra ” Girolamo Cardano,1545 より引用

REGVLA.

Deducito tertiam partem numeri rerum ad cubum, cui addes
quadratum dimidij numeri æquationis, & totius accipe radicem, scili
cet quadratam, quam seminabis, uniqꝫ dimidium numeri quod iam
in se duxeras, adijcies, ab altera dimidium idem minues, habebisqꝫ Bi
nomium cum sua Apotome, inde detracta ℞ cubica Apotomæ ex ℞
cubica sui Binomij, residuũ quod ex hoc relinquitur, est rei estimatio.

［日本語訳］

未知数の係数の三分の一の立方に、方程式の定数の二分の一の平方を加え、全体の平方根をとりなさい。これを二つ作り、ひとつは定数の二分の一を加え、もうひとつは同じものを引きなさい。そうすれば、binomium（前者）と apotome（後者）が得られます。そして、binomium（前者）の立方根から apotome（後者）の立方根を引けば、その残りが未知数の値になります。

問題

3．方程式 $x^3 + 6x = 20$ を、実際にカルダノが示している方法で解いてみよ。

４．問題３で求めた解が正しいかどうか検算して確かめよ。

下にあるのは先ほどの問題3に対するカルダノの説明です。

［原典：カルダノの説明］

Exemplum. cubus & 6 positiones, æquantur 20, ducito 2, tertiam partem 6, ad cubum, fit 8, duc 10 dimidium numeri in se, fit 100, iunge 100 & 8, fit 108, accipe radicem quæ est ℞ 108, & eam geminabis, alteri addes 10, dimidium numeri, ab altero minues tantundem, habebis Binomiũ ℞ 108 p: 10, & Apotomen ℞ 108 m: 10, horum accipe ℞es cubas & minue illam quę est Apotomæ, ab ea quæ est Binomij, habebis rei æstimationem, ℞ v: cub: ℞ 108 p: 10 m: ℞ v: cubica ℞ 108 m: 10.

cub9 p: 6 reb9 æq̃lis 20
2 20
8 ——— 10
108
℞ 108 p: 10
℞ 108 m: 10
℞ v: cu. ℞ 108 p: 10
m: ℞ v: cu. ℞ 108 m: 10

［日本語訳］

例えば、「未知数の立方と未知数の６倍が２０になる」を考える。「6」の三分の一である「2」の 3 乗は「8」であり、定数の二分の一である「10」の 2 乗は「100」である。「100」と「8」を足し合わせると「108」になり、その平方根は$\sqrt{108}$となる。これをふたつ作り、ひとつは定数の二分の一である「10」を足し、もうひとつは同じ数を引く。すると、binomium である$\sqrt{108}+10$と apotome である$\sqrt{108}-10$を得る。それらの三乗根をとりなさい。それぞれ三乗根をとった binomium から apotome を引くと未知数である x の値：$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$ が求まる。

問題

4．カルダノが示した解法で $x^3+ax=b$ の解を求めよ。

『大いなる技法』の中では、下のような異なる形の三次方程式について議論されています。カルダノは、これらすべての形の三次方程式の解を求める方法を示しました。

１． $x^3 + ax = b$
２． $x^3 = ax + b$
３． $x^3 + a = bx$
４． $x^3 = ax^2 + b$
５． $x^3 + ax^2 = b$
６． $x^3 + a = bx$
７． $x^3 + ax^2 + bx = c$
８． $x^3 + ax = bx^2 + c$
９． $x^3 + ax^2 = bx + c$
１０． $x^3 = ax^2 + bx + c$
１１． $x^3 + a = bx^2 + cx$
１２． $x^3 + ax + b = cx$
１３． $x^3 + ax^2 + b = cx$
１４． $x^3 = a$

(a,b,c は正の数)