授業資料２日目

バーサ号転覆沈没事故に潜む数学！




授業者;秋山裕紀

(筑波大学大学院修士課程教育研究科１年)

年　　組　　番

前回の復習

軸が $h<\dfrac{3}{4}p$ の時、回転放物体の直角切片は、傾けても、軸が鉛直になる位置に戻ろうとする。

⇩

アルキメデスの幾何的方法、座標を用いた方法で証明することができた！

じゃー $h>\dfrac{3}{4}p$ の場合はどうなのだろうか？

例えば、$h=\dfrac{3}{2}p$ の時は？

予想

実験　**実際に、木で作った放物体をはりあわせたものを使って考えてみよう！**

どうなった？

注）　ただし、ここで実験に用いた木片は回転放物体ではないことを頭に入れといてください。

アルキメデスがどう考えていたか見てみよう！

原典解釈

〜アルキメデスの ON FROATING BODIES BOOK **II**

「浮体について　第 2 巻」を読んでみる〜

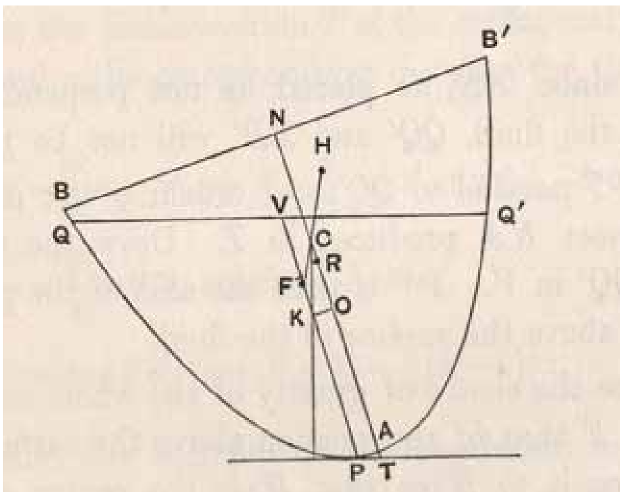
Proposition４

Given a right segment of a paraboloid of revolution whose axis AN is greater than $\frac{3}{4}p$ (where p is the parameter), and whose specific gravity is less than that of a fluid but bears to it a ratio not less than $(AN-\frac{3}{4}p)^2 : AN^2$, if the segment of the paraboloid be placed in the fluid with its axis at any inclination to the vertical, but so that its base does not touch the surface of the fluid, it will not remain in that position but will return to the position in which its axis is vertical.

bears to:**〜にする（**bear:**持ち運ぶ、生み出すが原義）**　inclination:**傾き**

もしその軸 AN が $\frac{3}{4}p$ より大きく、その比重が流体よりも小さく、比重を $\left(AN-\frac{3}{4}p\right)^2 : AN^2$ より小さくない割合にする回転放物体が与えられ、もし放物切片がその軸が鉛直から何度か傾いて、流体中に置かれていてその底面が流体の表面に触れていなかったら、その位置のままにはいないで、その軸が鉛直になるような位置に戻るだろう。

『内容』



放物体の切片の軸をＡＮとし、放物線ＢＡＢ’で分けられ、流体の表面に垂直なＡＮを通る平面が書かれたとする。また放物の底面をＢＢ’とし、放物の弦ＱＱ´を流体の表面とする。

その時、ＡＮはＱＱ´に垂直ではないだろう。Ｐで放物線に接しＱＱ´に平行なＰＴを引きなさい。ＶでＱＱ´を二つに分けるような直径ＰＶを引きなさい。したがってＰＶは物体の沈んだ部分の軸になるだろう。

物体全体の重心をＣとし、Ｆを沈んだ部分の重心とする。ＦＣを結びＨが残った部分の重心となるようにＨをとる。

回転して元に戻る条件についてのアルキメデスの考え

アルキメデスはその著書 On Conoids and Spheroids の Proposition24 で、回転放物体の比重は $\frac{PV^2}{AN^2}$（つまり回転放物体全体の体積を回転放物体の沈んでいる部分の体積で割ったもの）であることを発見した。これを用いる。

ここでは何を考えるか？…『回転放物体の断面（回転放物体の直角切片）を考え、物体全体の重心をＣ、沈んだ部分の重心をＦとした時、Ｃが常にＦの右側に存在すれば必ず回転放物体はその軸が鉛直となるような方向に回転する』そしてその条件下で物体の比重を考えることにより『回転して軸が鉛直に戻るためのＡＮの長さ』が求まる。

図のような左に傾いている場合を考える。

アルキメデスは放物線の重心はＡＮを２：１に分ける点と考えていたので

ＡＮ＝（　　　）ＡＣ、…①

そして、仮定よりＡＮ＞（　　　　）

したがって、ＡＣ＞（　　　）。

そして、ＣＡに沿ってＣＯを $\frac{p}{2}$ に等しくなるようにとりなさい　…②

（そしてＯＣに沿ってＯＲを $\frac{1}{2}$ ＯＡに等しくなるようにとりなさい。）

またＯからＯＡに対し垂直に引かれた直線のＰＶとの交点をＫとする。

また、ＡＯ＝ＡＣ－ＯＣなので①よりＡＯ＝（　　　　　）　…③

またＦは沈んでいる部分の重心なので、ＰＦ＝$\frac{2}{3}$ＰＶ　…④

次ページに続く…

ここでＣＫを結んで三角形ＫＣＯを考える。

また、放物線の接点Ｐを通る接線ＰＴに垂直な直線がＡＮと交わる点をＧとし、

接点ＰからＡＮに垂直な直線を考え、その直線が交わる点をＪとすると、

三角形（　　　　）と三角形（　　　　　）は、次の⑤、⑥、⑦により合同になる。

なぜなら、②よりＣＯ＝$\frac{p}{2}$であり、

また、放物線の性質からＧＪ＝$\frac{p}{2}$である。　よって（　　　　）＝（　　　　）　…⑤

また、仮定より∠（　　　　）＝∠（　　　　）＝９０°である。　…⑥

またＡＮとＰＶは平行なので（　　　　）＝（　　　　）　…⑦

よって三角形（　　　　　）と三角形（　　　　　）が合同でＣＯとＧＪが同じ直線上にあることと、ＰＧが接線に垂直であることよりＣＫは接線ＰＴ及び液体面に対し垂直であることがわかる。

次に、放物体がその軸が鉛直方向に戻ることを考えるとＣが必ずＦの右側にならなければならないことと、ＣＫが液体面に対し垂直であることを考慮すると

ＰＫ＜ＰＦ　　…⑧　　　　　にならなければならない。

ＰＫ＜ＡＯなので

ＡＯ＜ＰＦとなれば必ず⑧を満たす。

つまりＡＯ＜ＰＦとなれば、必ず放物体の直角切片はその軸が鉛直となるような方向に回転する。

ここで③より、ＡＯ＝（　　　　　　　）であり、

④より、ＰＦ＝$\frac{2}{3}$ＰＶなので

ＡＯ＜ＰＦより

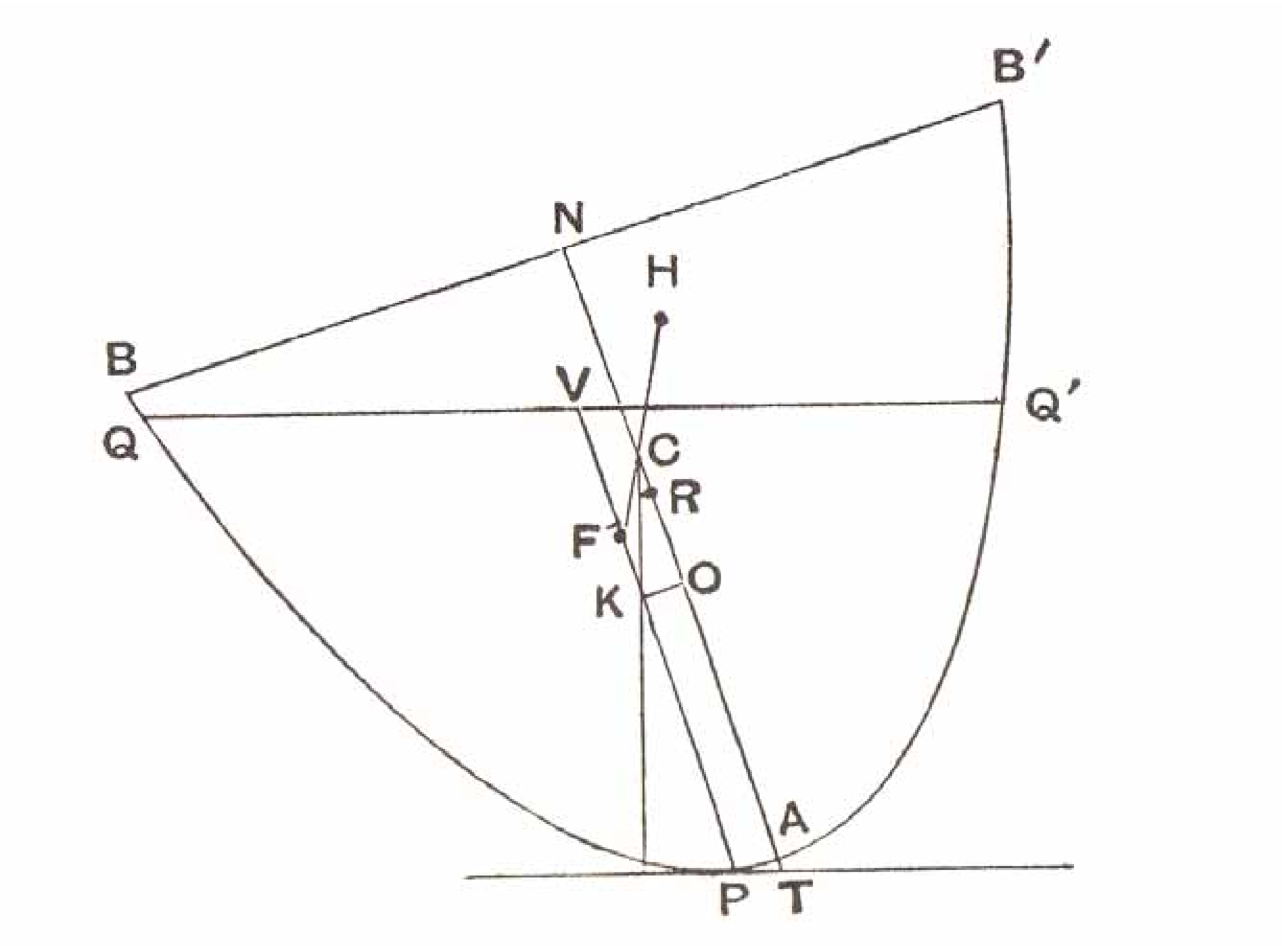
（　　　　　　　）＜（　　　　　　）となる。

よって（　　　　　　　）＜ＰＶとなる。

次ページに続く…

ここで回転放物体の比重が$\dfrac{PV^2}{AN^2}$であることを利用すると。$\dfrac{PV^2}{AN^2} >$（　　　　　　　　　　）となる。

よって回転放物体の比重をｓとするとｓ＞（　　　　　　　　　　）であれば放物体は傾けてもその軸が垂直になるような位置にもどる。



今回使った木片はどのくらいのＡＮの長さがあれば、傾けた状態から軸ＡＮが鉛直な方向に戻らないような放物体になるのだろうか？

⇩

この木片の体積と重さを計測した結果

⇩

体積９１０ｃｍ³　重さ３８６ｇであった

水に対する比重を求めよう！この結果から軸ＡＮが鉛直な方向に戻らなくなるような木片のＡＮの長さを求めることができるのだろうか？

考え）

何かおかしくないだろうか？

アルキメデスは回転放物体のつりあいの条件について考えていた。

だから、放物体の比重と放物体の軸の長さの関係の式を導出するときに回転放物体の体積比を考えていた

しかし

今回ここで用いた木片は回転放物体ではない！
よってこの放物線をたくさん張り合わせた形の木片の体積比は放物線の面積比になる。

⇨　この木片の体積比は $\dfrac{PV^{\frac{3}{2}}}{AN^{\frac{3}{2}}}$ となる。

$$0.42 > \left(\frac{AN - \frac{3}{4}}{AN} \right)^{\frac{3}{2}}$$

この式を満たすＡＮが、軸ＡＮが鉛直に戻るようなＡＮの条件であると考えられる。

（$y = x^2$ のグラフが高さ h のところでカットされた時の放物線内部の面積は $\frac{4}{3}h^{\frac{3}{2}}$ であるので。この木片の体積比は上のようになる。）

まとめ

　はるか２０００年も昔にアルキメデスは現在のモーメントの考え方に近いものをすでに考えていたし、幾何の性質を用いてかなり論理的に物体の静止と安定の条件について考えていた。しかし、アルキメデスがここで考えていたのは、放物体を回転したものについてであり､｢放物線の線上の点の法線と軸との交点の座標とその線上の点から軸に垂直に下ろした直線と軸との交点の距離が放物線の焦点と頂点の距離の長さの２倍に常に等しくなる」という図形的性質を用いて上手く解析していたが、放物線についてしか適用できないものであった。

　一般的な図形に還元できないもの（例えば船など）の回転条件やバランスについて考える時はまず重心をもっと正確に求める必要がある。例えば、船の重心を求める場合はまず船の形態を曲線で近似し、シンプソン係数を用いて微小面積のモーメントを足し合わせるといった考え方を使わないといけない。

　ヴァーサ号が沈没した年は１６２８年という、ニュートンもライプニッツも生まれる前であり、特に微分積分という学問が完成される前であった。微積分の発達後は、オイラーやシンプソン、チャップマンといった数学者が船舶についての理論を完成に近づけた。現在、船舶等が安全に運行できるようになったのもそれらの数学による理論が発達したからと言っても過言ではないのである。

　また、設計ミスによるバラスト（船の重心を下げるためのおもり）の積み込み不足や大砲を船の上部に設置したことなど重心管理の不徹底、知識不足がヴァーサ号沈没の原因とされている。