授業資料１日目

ヴァーサ号転覆沈没事故に潜む数学

授業者；秋山裕紀

（筑波大学大学院修士課程教育研究科１年）

年　　組　　番

０．はじめに

ヴァーサ号は 1628 年スウェーデンのグスタフ･アドルフ 2 世のために建造された、長さ約 50m、幅 11.5m、排水量 1279 トン、総トン数 1053 トンの戦艦でした（当時としてはかなり大きいのですが、現在最も大きい船は 10 万トン前後）
しかし、航海出発後すぐに沈没してしまいました。
　この授業では直接ヴァーサ号の沈没原因を調べるわけではありません。しかし、この船の沈没は数学の発展の歴史と大きく関係してくるのです！

問い１
皆さんが良く知っている船の沈没事故と言えばタイタニック号の事故がありますが、あの事故は氷山の激突したことで沈没したそうです。ヴァーサ号の事故原因はちょっと違います。それではどんなことが原因だったのでしょうか？思いつくことを考えてみよう！

問い２
船のような水中に浮く物体を考えるとき『アルキメデスの原理』は欠かせません。ではアルキメデスの原理ってどんな原理だったでしょうか？
思い出そう！（わかる範囲でいいので）

１．人物紹介

アルキメデス（archimedes,BC287～BC212）

- **イタリアのシシリー島シラクサ生まれ**
- **数学者、物理学者、技術者**
- **円周率の計算**
- **アルキメデスの原理の発見**
- **楕円・放物線の面積・立体の表面積・体積など多くの求積問題を解決した**
- **流体静力学の基礎的研究（流体中の立体の静止と安定の条件の研究）**

主な著書「方法」「円の計測」「螺旋について」「放物線の求積」「浮体について」

注）

アルキメデスの文献の中には数学的に美しいものしか書かれていない。実用のための様々な機械や道具を作っていたが、それらについては書き残していない。ただし、書き記されているような数学を発見する過程では道具等を発見の媒介手段として用いていたらしい。

アルキメデスにまつわるエピソード

アルキメデスは入浴中に直感的なひらめきから浮力の法則（アルキメデスの原理）を見つけ、「ヘウレーカ、ヘウレーカ」（「見つけた、見つけた」）と叫びながらシラクサの街を裸のまま走り回った。

⇩

このアルキメデスが「アルキメデスの原理」を発見した際のエピソードは、実はローマの建築家ウィトルウィウス(紀元後1世紀)によるものである。

このエピソードばかりが取りあげられるが、これはアルキメデスが発見したものの一部にすぎず、流体に浮く物体について様々な数学的解析をしている。

⇩

さっそく流体中の回転放物体の静止と安定の条件について数学的に解析しているアルキメデスの書き残した文献を見てみよう!

２．原典解釈

～アルキメデスの書いた

ON FROATING BODIES　BOOK II　「浮体について　第2巻」を読んでみる～

Proposition2（Proposition1 は資料の最後に付録として載せてあります。）

If a right segment of a paraboloid of revolution whose axis is not greater than $\frac{3}{4}p$ (where p is the principal parameter of the generating parabola), and whose specific gravity is less than that of a fluid, be placed in the fluid with its axis inclined to the vertical at any angle, but so that the base of the segment does not touch the surface of the fluid, the segment of the paraboloid will not remain in that position but will return to the position in which its axis is vertical.

right segment of a paraboloid of revolution:**回転放物体の直角切片**　specific gravity:**比重**　fluid:**流体**
incline to:**傾く**　vertical:**鉛直**

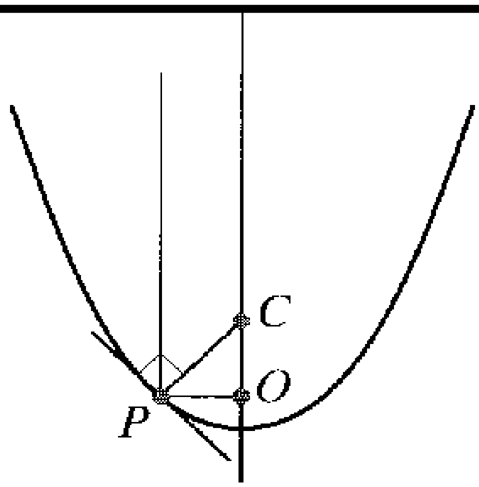
もしその軸が$\frac{3}{4}p$（$y=\frac{1}{p}x^2$のp）より大きくなく、その比重が流体の比重よりも小さい回転放物体の直角切片がその軸が鉛直に比べて何度か傾いている状態で流体中に置かれていたら（ただし、切片の底面は流体の表面に触れていない状態で）放物の切片はその位置にとどまることなくその軸が鉛直になるような位置に戻るだろう。

これはどのような状態だろうか？放物切片を使って考えてみよう！

（考え）

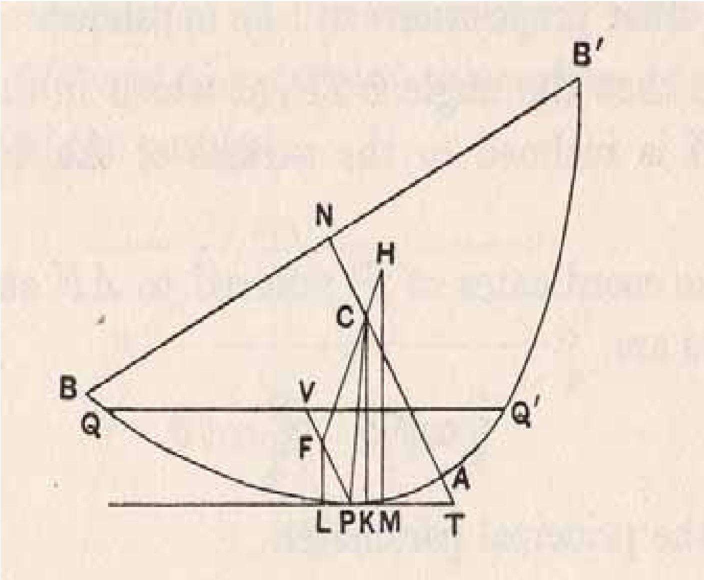
アルキメデスの時代にも良く知られていた放物線の性質

左図のように、放物線上の点Ｐから放物線の軸に対して垂直に下ろした放物線の軸との交点をＯとし、点Ｐでの接線に垂直な点Ｐを通る直線と放物線の軸との交点をＣとするとＣＯ＝$\frac{1}{2}p$となる。



『座標軸を使う代数的な証明』	**放物線の性質**
放物線を $y=\frac{1}{p}x^2$ とすると、 **接点の座標はＰ（a、$\frac{1}{p}a^2$）となる。** **点Ｐでの接線に垂直なＰを通る直線の方程式は** $y-\frac{1}{p}a^2=-\frac{p}{2a}(x-a)$ **となるので、** y **軸との交点の座標はＣ（０、$\frac{p}{2}+\frac{a^2}{p}$）** **また点Ｐから y 軸に下ろした y 軸との交点の座標は** **Ｏ（０、$\frac{1}{p}a^2$）となる。** **よってＣＯ＝$\frac{1}{2}p$となる。**	**今まで放物線は、二次関数のグラフとして学んできたが、図形としては次のように定義される。（アルキメデスの時代は図形を座標軸の上で考えるという考え方がなかった。座標の考え方が出てきたのはルネ・デカルト（１５９６～１６５０）の出現を待たなければならない。** **『定義』** **定直線Ｌと、Ｌ上にない定点Ｆからの距離が等しいような点の軌跡を放物線といい、Ｆをその焦点、Ｌをその準線という。** **ただし、上図のようなＣＯが常に$\frac{1}{2}p$になることは知られていた。もちろん p というのは座標を用いて考えた結果生じる変数のため、アルキメデスの時代は*ＣＯの長さは放物線の頂点と焦点の長さの２倍である*というような考え方であったが。**

『アルキメデスは回転放物体の直角切片について次のように考えた』



放物切片の軸を *AN* とし、*AN* を通り流体の表面に垂直な平面を書く。その平面を放物線 *BAB’*で放物体に分け、放物切片の底面を *BB’*とし、流体の表面の平面を放物の弦 *QQ’*とする。

その時、軸 *AN* は *QQ’*に垂直でない位置にあるので、*BB ’*は *QQ’*に平行にはならないだろう。

*QQ’*に平行になるように放物線の接線 *PT* を引くと、*P* は接点になるだろう

V で *QQ’*と交わるように *P* から *AN* に平行に *PV* を引く。その時 *PV* は流体に沈んでいる放物体の部分の軸になる。

C を放物体 *BAB’*の重心とし、流体に沈んでいる部分の重心を *F* とする。*FC* を結んだ延長上に生成される流体の表面上に出ている残った部分の重心を *H* とする。

注）アルキメデスは重心の位置を「放物線の軸を２：1 に分けるような点」と考えた。（実際は３：２に分ける点である。）ここでは物体全体の重心はＣ（ＰＶを２：１に分ける点）、液体面下の放物線の重心はＦ（ＡＮを２：１に分ける点）

アルキメデスの時代には座標上で図形を考える考え方がなかったことや、今のような、モーメントの考えがなかったため、辺の長さと角の大きさを用いて図形の性質だけでこのような状態を解明することをアルキメデスは考えた。

さっそくアルキメデスの考え方をみてみよう！

『Proposition2のアルキメデスの幾何的な証明』

このような条件下において、アルキメデスは放物線の重心を AN を２：１に分ける点（実際は違う）として考えていたので

AN＝（　　　）AC

そして仮定より AN＜（　　　）p

よって AC＜（　　　）p ということになる。…①

また、接点 P での法線が G で軸 AN に交わるとすると、
AG は（　　　）より大きくなる。⇒『放物線の性質』。…②

（ただし法線が頂点 A に重なる場合を除いて。しかし仮定によって AN は垂直に置かれていないので法線が A に重なることは考えなくて良い。）

よって①と②より、いつも AG（　　）AC となる。

よって∠TPG＝（　　　）°なので、∠CPT＜90°（つまり　　角）になる。

それゆえ、もしＣＰが結ばれると、
∠ＣＰＴ＜（　　　）°（つまり　　角）になるだろう。

したがって、もしＣＫがＰＴに垂直に引かれたなら、ＫはＰとＴの間に落ちるだろう。そして、もしＦＬ、ＨＭがＣＫに平行に引かれ、ＰＴと交わるなら、それらはそれぞれ流体の表面に（　　　　）になるだろう。

今、放物体の切片の沈んでいる部分に働く力はＬＦに沿って（　　）向きであり、一方、流体の外に出ている部分の重さはＨＭに沿って（　　）向きに働くであろう。
それゆえそこにはつりあいはなく、ＡＮが鉛直の位置になるまで、切片はＢがあがりＢ´は落ちるだろう。

∠ＣＰＴが鋭角であることはこの図で言えば、Ｆより右側にＨがあることを示し、アルキメデスの平衡分析の考え方によるとこの状態は物体が時計回りに回転することを示す。（パワーポイント参照）

注）現在はこのような回転条件を求めるとき、「モーメント」の概念を利用するが、アルキメデスはその釣り合いを分析するときにはこのようにＣ（物体全体の重心）と F（物体全体に対する沈んだ部分の重心）を見つけることができれば、回転条件を導けると考えていたことが伺える。

アルキメデスの時代にはなかった座標を使った証明

$\angle NTP=\theta$ とおく。

A での接線を x 軸、AN を y 軸として考えると放物線上の点 P の座標は

$\left(-\dfrac{p}{2\tan\theta},\dfrac{p}{4\tan^2\theta}\right)$ で表されることが知られている。（ここで p は $y=\dfrac{1}{p}x^2$ の p）

$AN=h, PV=k$ として考える。

C から TP に下ろした垂線の足を点 K とし、TK＝x とおく。

F から TP に下ろした垂線の足を点 L とし、TL＝x' とおく。

（ｉ）x＝TK

$=\boxed{}\cos\theta$

$=(\mathrm{TA}+\boxed{})\cos\theta$

点 T が点 P における接線とｙ軸との交点であることを考える。

接線の方程式は、

$\boxed{}$

これより、TA＝$\boxed{}$

また、アルキメデスの重心の決め方より、

$$AC=\frac{2}{3}h$$

以上より、$x=\left(\boxed{}+\boxed{}\right)\cos\theta$　…①

…続き

（ii）$x'=TL$

$=TP+\boxed{}$

ここで点Ｐのｘ座標を考えると、

$$TP\sin\theta=-\left(\boxed{}\right)=\frac{p}{2\tan\theta}$$

よって、TP＝$\boxed{}$

PL＝$\boxed{}\cos\theta$で、

アルキメデスの重心の決め方より $PF=\frac{2}{3}k$ だから

PL＝ $\boxed{}$

以上より、$x'=\boxed{}+\boxed{}$

$=(\boxed{}+\frac{2}{3}k)\cos\theta$ …②

①、②より

$$\therefore x'-x=\boxed{}-\boxed{}$$

$$=\cos\theta\left\{\frac{p}{4}\left(\frac{1}{\boxed{}}+2\right)-\frac{2}{3}(h-k)\right\}$$

ここで、放物切片が∠PTN を増やす方向に回転するようにするため、

x' は x より大きくなる。つまり、 $x'-x>0$ になる。

0°＜θ＜90°と考えると　$\frac{1}{\tan^2\theta}\geq 0$　で、$k\geq 0$ なので、

$\frac{1}{\tan^2\theta}\geq 0$、$k=0$　のときに$\left\{\quad\right\}$の中は最小になる。

$\therefore \boxed{}>0$

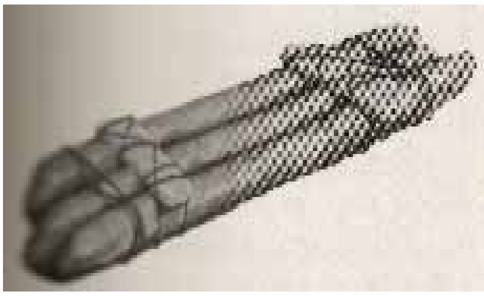
$\therefore \quad \dfrac{1}{\tan^2\theta} \geq 0$、$k=0$　のときの$\left\{ \quad \right\} > 0$　のときならたとえどんなθの値でも回転放物体は元の位置に戻るだろう。

$$\therefore \frac{P}{4} \times \boxed{} - \boxed{} \times h > 0$$

$$\therefore h < \frac{3}{4}P$$

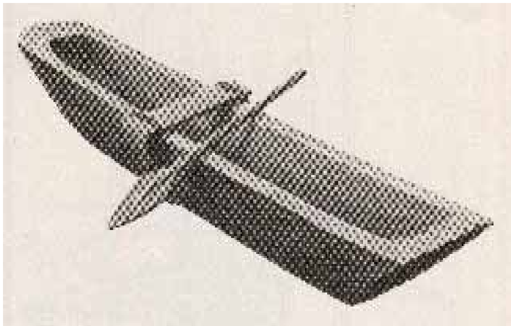
付録１

船の思いつき･･･人間がいつ最初の船を思いついたか、という質問には、正確に答えることは不可能であるが、数万年の昔、人類が発生した時から、水辺に住んでいた人にとっては生活、特に狩猟のためにも、また交易のためにも、まず水を渡る必要があった。



⇩

船の始め･･･「浮き」を航海の用具として発見した人間の欲望には際限がなく、次に丸太を並べることを考案した。⇒いかだ船（木いかだ、竹いかだ、草いかだ、浮皮袋いかだ）

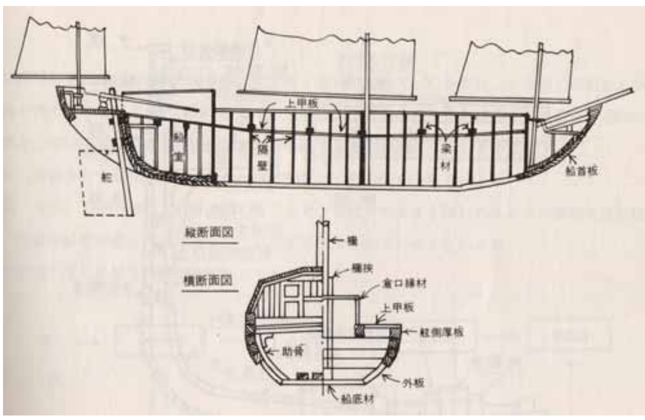


⇩

進んだ船･･･「船の始まり」から人の知恵が進んで考えついたのが　ｉ）木の幹をくり抜いて造ったくり船　ii）細い木の枝を骨組みとし、それに動植物の皮を張りつけて造った皮船　iii）木材や木板などを縫い合わせて造った縫合船

⇩

最も進んだ船･･･組立て船。木板を、木または鉄の釘で接合、水密に構造した簡単なものから、これの内部にフレームという骨組をいれたものもあり、さらに、縦通材を取り付けて、縦及び横の長さを維持するのに苦心した高級なものまである。



付録2

船の歴史年表

年表	世界の船の歴史	
ＢＣ５０００	ナイル川に帆船が走る	
ＢＣ２００	ローマの商船に二本マストの船	・アルキメデスの誕生（ＢＣ212）
	が出現	・小野妹子を隋に遣わす。遣隋使のはじめ(607)
ＡＤ８００～	ノルマン人バイキングとして各	・中国で羅針盤、火薬の発明(900)
１０００	地に遠征航海を行う	
１０９６	十字軍の遠征	・磁気コンパスが使われる(1200～) ・元軍筑前に来襲(1281)
１４２０	平面海図と羅針盤(コンパス)が	・足利義満が明との貿易を始める(1401)
	始めて航海に実用される	・室町幕府は明に使者を送り、銅銭と書籍を求める(1474)
１４９２	コロンブス（イタリア人）が西	
	インド諸島を発見	
１５２０	マゼラン海峡の発見	・フランシスコ・ザビエル来日(1549)
１５９８	ドイツの天文学者ヨハン・ケプ	・豊臣秀吉により朱印船貿易が始まる(1592)
	ラーが潮汐の理論を発表	・徳川家康がウイリアム・アダムスに命じ、洋式帆船を造らせる(1605)
１６２８	バーサ号沈没	・ニュートン、ライプニッツらが微積分を発達させる。
		・オイラー(1707)、シンプソン(1710)らが生まれる
１７３６	英人ハルスは引船に用いる蒸気	
	船を発明	・伊能忠敬が沿海実測全図を完成させる(1813)
１９１２	タイタニック号の沈没	
１９１４	第一次世界大戦始まる	
１９３９	第二次世界大戦始まる	

付録3

ON FROATING BODIES BOOK II 「浮体について 第2巻」

Proposition1 (浮力の法則)

If a solid lighter than a fluid be at rest in it, the weight of the solid will be to that of the same volume of the fluid as the immersed portion of the solid is to the whole.

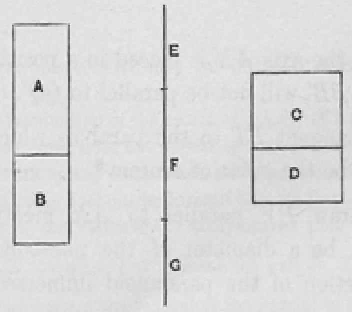
和訳

もし流体より軽い固体が流体の中に静止していたら、その固体の重さはその固体の沈んだ部分と同じ流体の体積分の重さになるだろう。

Let $(A+B)$ be the solid, B the portion immersed in the fluid.

Let $(C+D)$ be an equal volume of the fluid, C being equal in volume to A and B to D.

Further suppose the line E to represent the weight of the solid $(A+B)$, $(F+G)$ to represent the weight of $(C+D)$, and G that of D.



Then

weight of $(A+B)$: weight of $(C+D)=E:(F+G)$...(1).

And the weight of $(A+B)$ is equal to the weight of a volume B of the fluid [I. 5], i.e. to the weight of D.

That is to say, $E=G$.

Hence, by (1),

$$\begin{aligned}\text{weight of }(A+B):\text{weight of }(C+D)&=G:F+G\\&=D:C+D\\&=B:A+B.\end{aligned}$$

（A+B）を固体とし、B を流体の中で沈んだ部分とせよ。

（C+D）を流体中での等しい体積とし、C は A と体積に関して等しく、B は D と等しい。

さらに固体（A+B）の重さを示す線 E、(C+D)の重さを示す(F+G)、D の重さを示す G を考える。

そのとき、（A+B）の重さ：(C+D）の重さ＝E：（F+G）…（1）

そして（A+B）の重さは流体の体積 B の重さに等しい、すなわち D の重さ。

すなわち、E=G

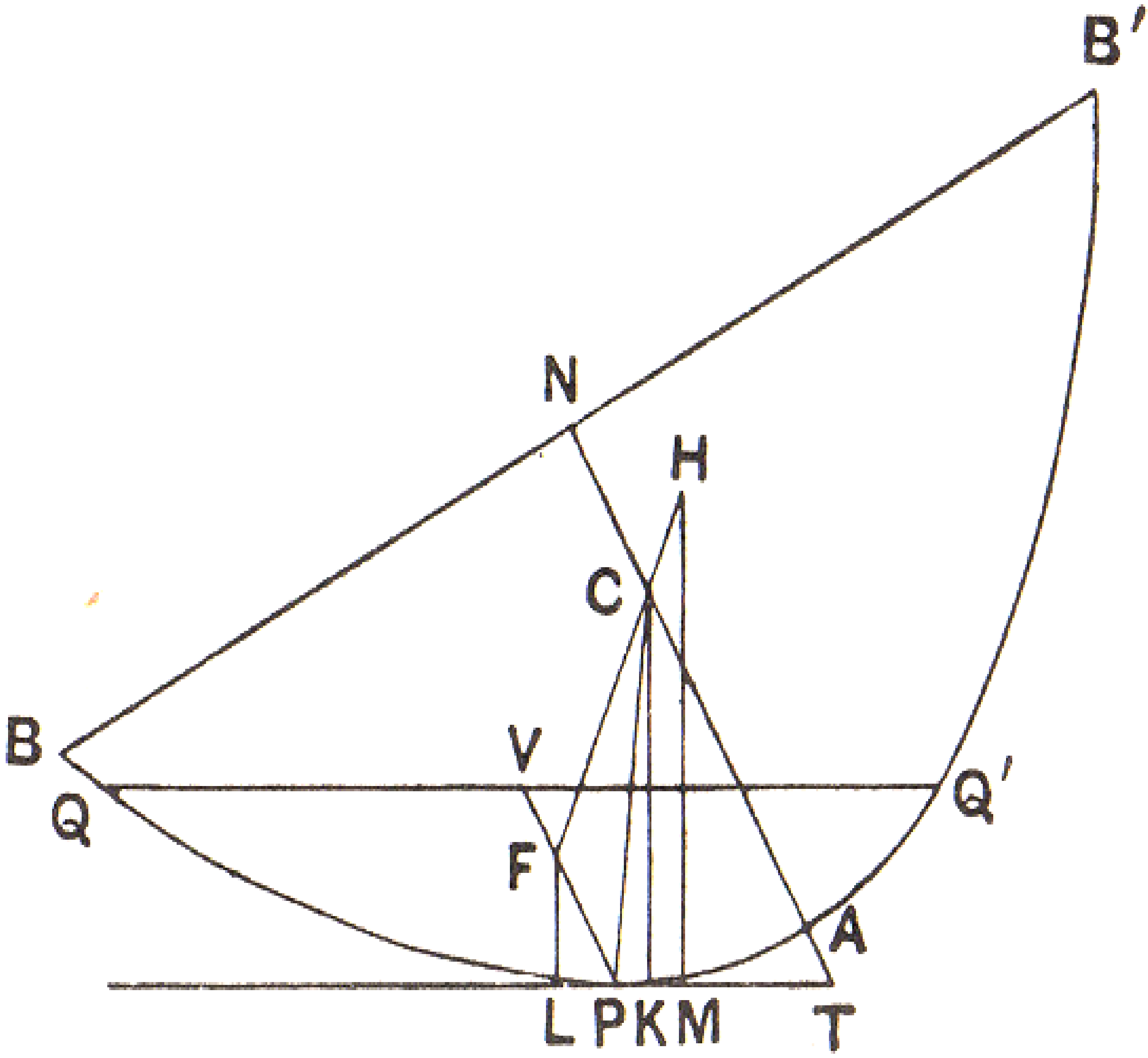
したがって、（1）によって、

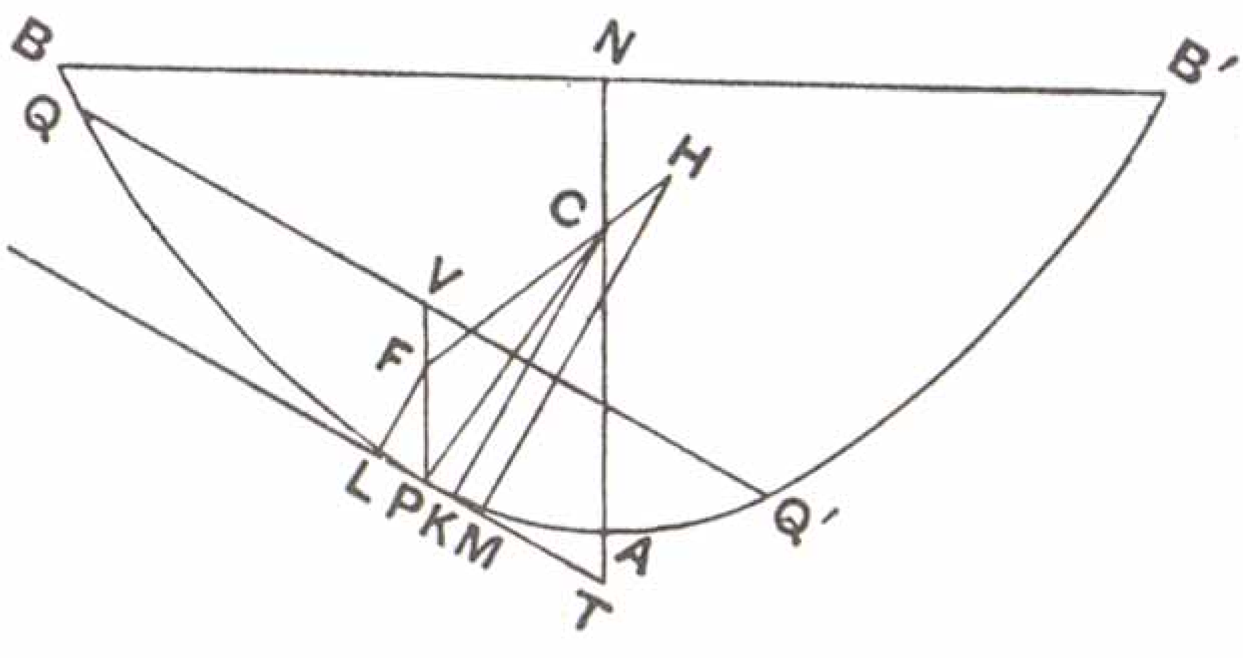
（A+B）の重さ：(C+D）の重さ

＝G：F+G

＝D：C+D

＝B：A+B


B′
N
H
C
B
V
Q′
Q
F
A
L
P
K
M
T


B
N
B'
Q
H
C
V
F
L
P
K
M
A
Q'
T