授業資料
数三角形を利用した確率論
(2 日目)

LETTRE DE PASCAL À FERMAT

Le 29 juillet 1654.

MONSIEUR,

L'IMPATIENCE me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse; j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous.

J'admire bien davantage la méthode des partis que celle des dés; j'avais vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le Chevalier de Méré, qui est celui qui m'a proposé ces questions et aussi M. de Roberval : mais M. de Méré n'avait jamais pu trouver la juste valeur des partis ni de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvais seul qui eusse connu cette proportion.

Votre méthode est très sûre et est celle qui m'est la première venue à la pensée dans cette recherche; mais parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ai trouvé un abrégé et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrais pouvoir vous dire ici en peu de mots : car je voudrais désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvait, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris.

2年　　組　　番
氏名

授業者：平島　絡美
（筑波大学大学院修士課程教育研究科 1 年）

1.　前回の確認

前回は、

・ パスカルの数三角形がどのようなものであるか

・ ３つの帰結

・ パスカルが数学的帰納法を使って証明していたこと

について触れました。

今日はそれらをふまえて

・ 数三角形はどのように役に立っているか

・ 数三角形が今日パスカルの三角形と呼ばれているのはなぜか

について考えていきましょう。

2.　確率の創始者としてのパスカル

パスカルは、数三角形だけでなく、確率の分野でも有名です。

「17 世紀には偉大な人々が数多く輩出し、また偉大な発見が数多くなされた。
おそらく、17 世紀は人間精神の声価をもっとも高めた世紀だろう。
確率論は、この 17 世紀の 2 人の幾何学者によって誕生したのである。
すなわち、パスカルとフェルマーが確率に関する問題をいくつか提示し、
これを解決したのである・・・・・。」

〔ラプラス『確率の解析的理論』より）

3.　分配問題

シェヴァリエ・ド・メレ（Chevalier de Mere）という有名な賭博者がパスカルに以下のような問題を問いかけ、パスカルが解決したことが確率の始まりになります。

「2 人の賭博者が対戦し、定められた得点を先にとったものが勝ちときめる。
もし、この 2 人がゲームを最後までやりおえないで別れなければならないとすると、2 人の賭金をどのように分配すればよいだろうか？」

以上のように、確率は賭事の問題から発展しました。

そこで、この分配問題について扱っていきます。

それでは、実際に分配問題について考えていきましょう。

賭や分け前には、いくつかのルールがあります。まずは、そのルールを紹介します。

4. 賭のルール

・ 賭博者はあらかじめ認め合った条件に従う。
・ お金を賭けたら、賭博者はそのお金の所有権を失う。
・ 賭をして、勝ったら賭金以上の金額がもらえる。
・ 賭博者は、勝負がどのような段階であろうと、話し合いによって勝負をやめて、賭金の一部の所有権を回復することができる。

5. 分け前のルール

2 人の賭博者が勝負の途中で賭をやめ、賭金を分けようとするときの正しい配分を**分け前**という。その際、分け前は双方が納得できるものでなければならない。

・ 2 人の賭博者が勝負をして、一人が勝てば一定の金額をもらい、負ければ相手のものになるという場合において、彼らが賭をやめて分け前を取ろうとするとき、正当に分けようと思うならば、勝ったときにもらえる金額から負けたときにもらう金額を引いた金額を折半し、各自が自分の分を取ることである。

6. 問題

それでは、パスカルの解いた問題を考えていきましょう。
（ピストルは賭事の単位）

2 人の賭博者が 3 回上がりの勝負をし、各々がそれぞれ 32 ピストルずつ賭けたとする。

（Ⅰ）A さんが 2 回、B さんが 1 回勝っている。
（Ⅱ）A さんが 2 回、B さんが 0 回勝っている。
（Ⅲ）A さんが 1 回、B さんが 0 回勝っている。

このとき、

①次の勝負で A さんが勝った場合
②次の勝負で B さんが勝って、そこで勝負をやめた場合
③ここで勝負をやめた場合

のそれぞれの場合について賭金の配分はどうなるか。

(Ⅰ)の場合について、パワーポイントを見ながら、一緒に数字を埋めていこう。

今全部で 64 ピストルある。

① A さんが勝てば勝数が$\boxed{}$になるので勝負が終わり、A さんが全額$\boxed{}$ピストル。B さんは$\boxed{}$ピストルもらうことになる。

② B さんが勝ってそこで勝負をやめるとき、A さんの勝数は$\boxed{}$、B さんの勝数は$\boxed{}$となり、そこで勝負をやめると、A さんと B さんが同じ立場に立つので、分け前は半分ずつの$\boxed{}$ピストルをもらうことになる。

③ ここで勝負をやめると、A さんの勝数は$\boxed{}$、B さんの勝数は$\boxed{}$であり、正当に分け前をもらおうと思うときを考える。A さんが勝ったときにもらえる金額は、64 ピストルであり、負けたときにもらえる 32 ピストルである。つまり、勝負の勝ち負けにかかわらず、$\boxed{}$ピストルもらえることになる。よって、分け前のルールにより、勝ったときにもらえる金額から負けたときにもらえる金額を引いた金額を折半し、それを勝ち負けにかかわらずもらえる 32 ピストルに足せば、A さんの分け前であるピストルが決まる。B さんは、全額から 48 ピストルを引いた$\boxed{}$ピストルが分け前となる。

（Ⅱ）（Ⅲ）の場合について考えてみよう。

計算

	A さん	**B さん**
Ⅱ	① ピストル	① ピストル
	② ピストル	② ピストル
	③ ピストル	③ ピストル
Ⅲ	① ピストル	① ピストル
	② ピストル	② ピストル
	③ ピストル	③ ピストル

7. 命題（③の場合）：分配問題

パスカルが分配問題を解くために、数三角形を使っています。それを『数三角形論』の一部を読んで解釈していきましょう。

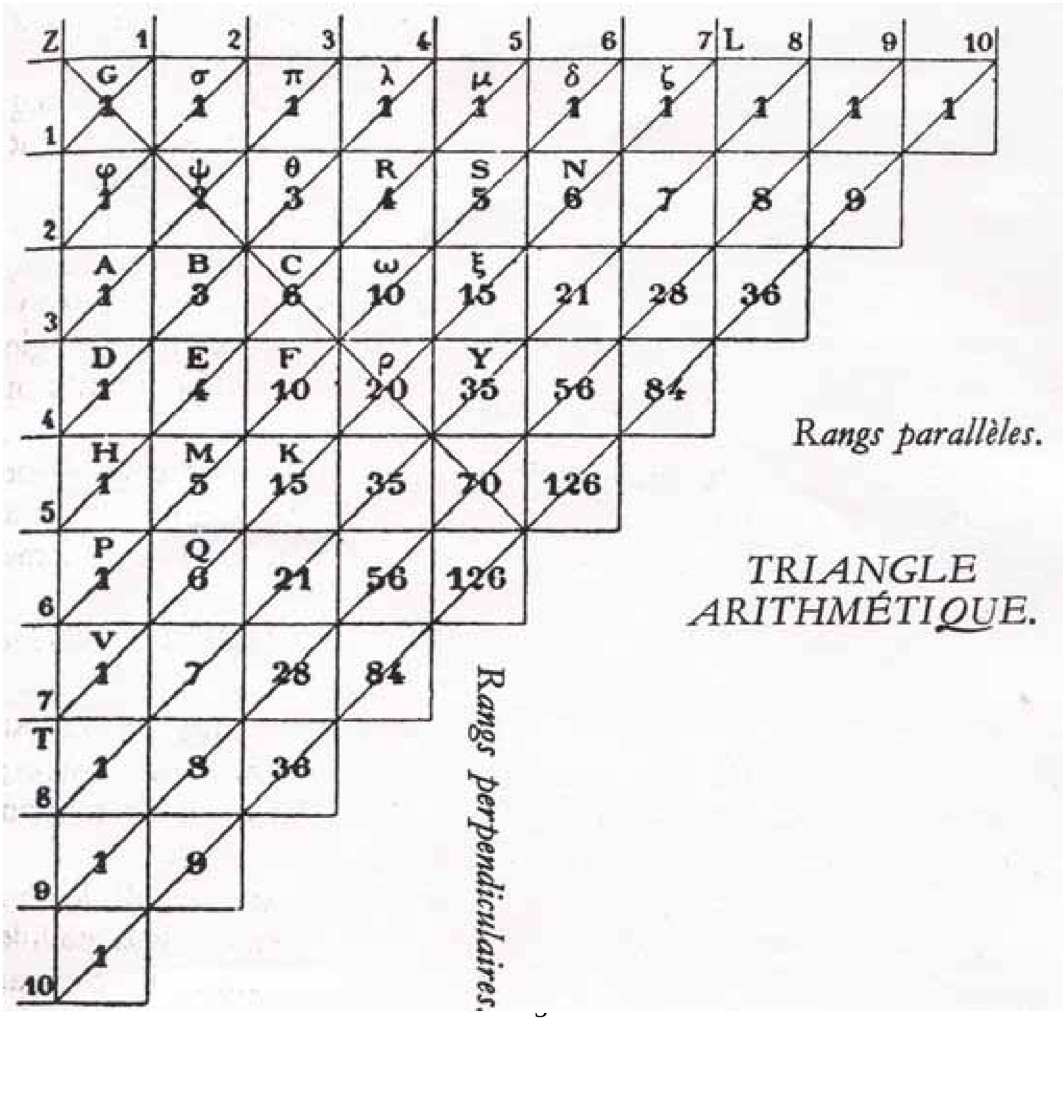
Étant proposés deux joueurs, à chacun desquels il manque un certain nombre de parties pour achever, trouver par le Triangle arithmétique le parti qu'il faut faire (s'ils veulent se séparer sans jouer), eu égard aux parties qui manquent à chacun.

2 人の賭博者があり、賭に決着をつけるには各自なお一定数の勝が不足しているとき、（賭をせずに別れようとする場合に）なされるべき分け前を、各自に不足している勝を考慮しながら、数三角形を用いて見出すこと。

解説

例. 2 人の賭博者が 3 回上がりの勝負をし、各々がそれぞれ 32 ピストルずつ賭けたとする。

A さんが 2 回、B さんが 1 回勝っているとき（3 ページ、問題Ⅰの③）、なされるべき分け前を数三角形を使って次のページの$\boxed{}$に数字を入れてみよう。



(1) A さんに不足している勝数は$\boxed{}$であり、B さんに不足している勝数は$\boxed{}$であるから、2 人に不足している勝数の合計は$\boxed{}$である。

(2) その不足している勝数と同じ個数の細胞を持つ底辺である第$\boxed{}$底辺をとる。

(3) そして、この底辺の細胞の第 1 の細胞から、B さんに不足している勝数である$\boxed{}$のと同じ数の連続する細胞をとり、それらの細胞の数の和はになる。

(4) ゆえに、底辺には相手に不足している勝数と同じ個数$\boxed{}$の細胞が残り、これらの数の和$\boxed{}$を作る。

(5) よって、

$$\text{Aさんの分け前}=\frac{\text{(3)で出た数の和}}{\text{第□底辺の和}}\times 2\text{人の賭金}=\boxed{}$$

$$\text{Bさんの分け前}=\frac{\text{(4)で出た数の和}}{\text{第□底辺の和}}\times 2\text{人の賭金}=\boxed{}$$

問題のⅡの③でも確かめてみよう。

問題のⅢの③でも確かめてみよう。

数三角形を使って解いた答えも一致しましたね！

8. 命題の証明

(1)

Quoique cette proposition ait une infinité de cas, je la démontrerai néanmoins en peu de mots par le moyen de deux lemmes.

Le 1er, que la seconde base contient les partis des joueurs auxquels il manque deux parties en tout.

Le 2e, que si une base quelconque contient les partis de ceux auxquels il manque autant de parties qu'elle a de cellules, la base suivante sera de même, c'est-à-dire qu'elle contiendra aussi les partis des joueurs auxquels il manque autant de parties qu'elle a de cellules.

D'où je conclus, en un mot, que toutes les bases du Triangle arithmétique ont cette propriété : car la seconde l'a par le premier lemme; donc, par le second lemme, la troisième l'a aussi, et par conséquent la quatrième; et à l'infini. C. q. f. d.

Il faut donc seulement démontrer ces 2 lemmes.

(2)

Le 1er est évident de lui-même; car s'il manque une partie à l'un et une à l'autre, il est évident que leurs conditions sont comme φ à σ, c'est-à-dire comme 1 à 1, et qu'il appartient à chacun cette fraction :

$$\frac{\sigma}{\varphi + \sigma} \text{ qui est } \frac{1}{2}.$$

(3)

Le 2e se démontrera de cette sorte.

Si une base quelconque, comme la quatrième Dλ, contient les partis de ceux à qui il manque quatre parties, c'est-à-dire que, s'il manque une partie au premier, et trois au second, la portion qui appartient au premier sur la somme qui se joue, soit celle qui est exprimée par cette fraction $\frac{D + B + \theta}{D + B + \theta + \lambda}$ qui a pour dénominateur la somme des cellules de cette base, et pour numérateur ses trois premières; et que, s'il manque deux parties à l'un, et deux à l'autre, la fraction qui appartient au premier soit $\frac{D + B}{D + B + \theta + \lambda}$; et que, s'il manque trois parties au premier, et une à l'autre, la fraction du premier soit $\frac{D}{D + B + \theta + \lambda}$, etc.

(4)

Je dis que la cinquième base contient aussi les partis de ceux auxquels il manque cinq parties; et que s'il manque, par exemple, deux parties au premier, et trois à l'autre, la portion qui appartient au premier sur la somme qui se joue, est exprimée par cette fraction :

$$\frac{H + E + C}{H + E + C + R + \mu}.$$

Car pour savoir ce qui appartient à deux joueurs à chacun desquels il manque quelques parties, il faut prendre la fraction qui

(5)

appartiendrait au premier en cas de gain, et celle qui lui appartiendrait en cas de perte, les mettre à même dénomination, si elles n y sont pas, et en former une fraction, dont le numérateur soit la somme des deux autres, et le dénominateur double de l'autre, par le lemme précédent.

Examinons donc les fractions qui appartiendraient à notre premier joueur en cas de gain et de perte.

Si le premier, à qui il manque deux parties, gagne celle qu'ils vont jouer, il ne lui manquera plus qu'une partie, et à l'autre toujours trois; donc il leur manque quatre parties en tout : donc, par l'hypothèse, leur parti se trouve en la base quatrième, et il appartiendra au premier cette fraction $\frac{D + B + \theta.}{D + B + \theta + \lambda}$.

Si au contraire le premier perd, il lui manquera toujours deux parties, et deux seulement à l'autre; donc, par l'hypothèse, la fraction du premier sera $\frac{D + B}{D + B + \theta + \lambda}$. Donc, en cas de parti, il appartiendra au premier cette fraction

$$\frac{D + B + \theta + D + B}{2D + 2B + 2\theta + 2\lambda}, \text{ c'est-à-dire, } \frac{H + E + C}{H + E + C + R + \mu}.$$

C. q. f. d.

以上は、パスカルが『数三角形論』の中で証明した文章です。
この証明を 5 つに分けて解釈していきましょう。

（1） 以下の訳を読んで、パスカルはどのような証明法を使って証明しようとしているのか考えてみましょう。

[訳]この命題は無数の場合をもつとはいえ、私は 2 つの補題を用いて簡単にこれを証明しよう。

第 1. 第 2 底辺は、双方合わせて 2 勝が不足している 2 人の賭博者の分け前を含んでいる。

第 2. もし任意の 1 底辺が、そこにある細胞の数と同数の勝が不足している 2 人の賭博者の分け前を含むならば、次の底辺も同様である。すなわち、次の底辺もまた、そこにある細胞の数と同じ勝が不足している 2 人の賭博者の分け前を含む。

ここから私は、数三角形のすべての底辺がこの性質をもつと一挙に結論する。なぜならば、第 1 の補題によって、第 2 底辺はこの性質をもつ。故に、第 2 の補題によって、第 3 底辺もまたこの性質をもつ。従って、第 4 底辺もこの性質をもつ。以下限りなく同様である。故に、この 2 つの補題のみを証明すればよい。

（2） パスカルはここで何を言おうとしていたのでしょうか？

[訳]第 1 のものは自明である。なぜならば、もし一方に 1 勝、他方にも 1 勝が不足しているならば、彼らの分け前の条件は σ 対 φ、すなわち 1 対 1 であり、各自がそれぞれ分数、$\dfrac{\sigma}{\varphi+\sigma}$ すなわち $\dfrac{1}{2}$ を得ることは明らかである。

（3） 空欄を埋めよう。

[訳]第 2 のものは次のようにして証明される。

任意の底辺、例えば第 4 底辺 Dλ が合わせて 4 勝不足している 2 人の賭博者の分け前を含むとする。すなわち、もし第 1 の者に 1 勝、第 2 の者に 3 勝が不足しているとすれば、賭金の額のうち第 1 の者の得る分は、この底辺のすべての細胞の和を分母とし最初の 3 細胞の和を分子とする分数 $\boxed{}$ であらわされる部分であり、一方に 2 勝、相手にも 2 勝が不足しているとすれば、第 1 の者の分数は $\boxed{}$ であり、第 1 の者に 3 勝、相手に 1 勝が不足しているとすれば、第 1 の者の分数は $\boxed{}$ である、などとする。

（４）点線で囲まれた部分に注目し、どの帰結が使われているか考えましょう。

[訳]そうすれば,第 5 底辺もまた、合わせて 5 勝が不足している 2 人の賭博者の分け前を含む。例えば、第 1 の者に 2 勝、相手に 3 勝が不思しているとすれば、賭けられた金額のうち第 1 の者の得る分は $\dfrac{H+E+C}{H+E+C+R+\mu}$ なる分数であらわされる。

なぜならば、それぞれに何勝かが不足している 2 人の賭博者の得るものを知るためには、前の補題によって、第 1 の者が勝った場合に得る分数と負けた場合に得る分数とをとり、異分母であればこれを通分した上、両分数の分子の和を分子とし分母の 2 倍を分母とする分数を作らねばならない。

故に、いまの場合の第 1 の購博者が勝った場合と負けた場合とに得る分数を調べよう。

2 勝が不足している第 1 の者がこれからおこなう勝負にもし勝てば､彼にはもう 1 勝しか不足しておらず、相手には依然として 3 勝が不足している。故に、さきの仮説によって、彼らの分け前は第 4 底辺において見出され、第 1 の者は $\dfrac{D+B+\theta}{D+B+\theta+\lambda}$ なる分数を得ることになる。

反対に、もし第 1 の者が負ければ、彼には依然として 2 勝が不足しており、相手にはもはや 2 勝しか不足していない。故に、仮説によって、第 1 の者の分数は $\dfrac{D+B}{D+B+\theta+\lambda}$ となる。故に、分け前の場合には、第 1 の者は、

$$\frac{D+B+\theta+D+B}{2D+2B+2\theta+2\lambda} \text{すなわち} \frac{H+E+C}{H+E+C+R+\mu}$$

なる分数を得ることになる。

証明終

分子が $D+B+\theta+D+B$ から $H+E+C$ になるときに、帰結第$\boxed{}$が、分母が $2D+2B+2\theta+2\lambda$ から $H+E+C+R+\mu$ になるときに、帰結第$\boxed{}$が使われている。

9.　フェルマー

　パスカルは、この分配問題について友人のフェルマーと書簡を通して議論しています。

ピエール・ド・フェルマー　Pierre de Fermat　(1601-1665)
　フランス生まれ　数学者・弁護士
　　業績
　　　確率論
　　　フェルマーの数
　　　フェルマー予想（最終定理）
　　著書
　　　『軌跡論入門』死後の 1679 年に出版

10. 書簡

　パスカルとフェルマーによって確率論が創始された頃、この 2 人はヨーロッパでもっとも著名な数学者であった。この問題自体が興味深く、当時の著名な 2 人の数学者が論じあっていたので、この話は多くの人たちの話題の的になってもよさそうであったが、実際は、2 人が研究を公表することに無関心だったため、広く知られることはなかった。

　パスカルとフェルマーの往復書簡は、現在では 6 通が確認されている。

　Ⅰ．フェルマーからパスカルへ　1654 年月日不明
　Ⅱ．パスカルからフェルマーへ　1654 年 7 月 29 日
　Ⅲ．パスカルからフェルマーへ　1654 年 8 月 24 日
　Ⅳ．フェルマーからパスカルへ　1654 年 8 月 29 日
　Ⅴ．フェルマーからパスカルへ　1654 年 9 月 25 日
　Ⅵ．パスカルからフェルマーへ　1654 年 10 月 27 日

その中から、書簡IIの一部を読んでみよう。

LA RÈGLE DES PARTIS 77

LETTRE DE PASCAL À FERMAT

Le 29 juillet 1654.

MONSIEUR,

L'IMPATIENCE me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse; j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous.

J'admire bien davantage la méthode des partis que celle des dés; j'avais vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le Chevalier de Méré, qui est celui qui m'a proposé ces questions et aussi M. de Roberval : mais M. de Méré n'avait jamais pu trouver la juste valeur des partis ni de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvais seul qui eusse connu cette proportion.

Votre méthode est très sûre et est celle qui m'est la première venue à la pensée dans cette recherche; mais parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ai trouvé un abrégé et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrais pouvoir vous dire ici en peu de mots : car je voudrais désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvait, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris.

[訳]じっとしていられないのは私も同じで、まだ床についているのですが、こう申上げないではいられません。昨日の夕方カルカヴィ氏から、賭の分け前に関するあなたのお手紙を頂きましたが、それをどんなにすばらしいと思ったか、とても言葉でいえるものではないと。心ゆくまで讃嘆の言葉をつづける時間がありませんので一言で申しますと、あなたは骰子遊びの分け前と勝負の分け前と、この二つの分け前を完全に正しく見出されたのです。まことに嬉しく存じます。いみじくもあなたと同じものを見出したのである以上、私が真理の中にいることはもはや疑いないところですから。

　骰子遊びよりも賭の分け前を定めるあなたの方法に私はずっと敬服致しました。骰子遊びの分け前は、シュヴィリエ・ド・メレ氏またロベルヴァール氏など数人の方がすでに見出されていたのですが、メレ氏は分け前の正しい値を見出すことは勿論、それを見出す糸口さえお分りになれませんでした。それで私は分け前の正しい比を知っているのは自分一人だと思っておりました。

　あなたの方法は非常に確かなものです。そして、私がこれを見出すべく努力していた時、最初に考えついたのもまさにそれなのです。しかし組合せを使うと大へん手間がかかりますので、私はそれを要約したもの、さらに適切に申せば、ずっと短く明晰な別の方法を見出したのです。それをここで簡単にお話したいと思います。というのは、もしできましたら、これからはあなたには心を開いて語りたいのです。それほど私たちが意見を同じくしたということが私には嬉しいのです。パリでもトゥールーズでも真理は一つなのですね。

パスカルは、どんな気持ちでこの書簡をフェルマーに送ったのでしょう。

11. まとめ

数三角形はどのように役に立っているか？

数三角形が今日パスカルの三角形と呼ばれているのはなぜか？

2 日間ありがとうございました。