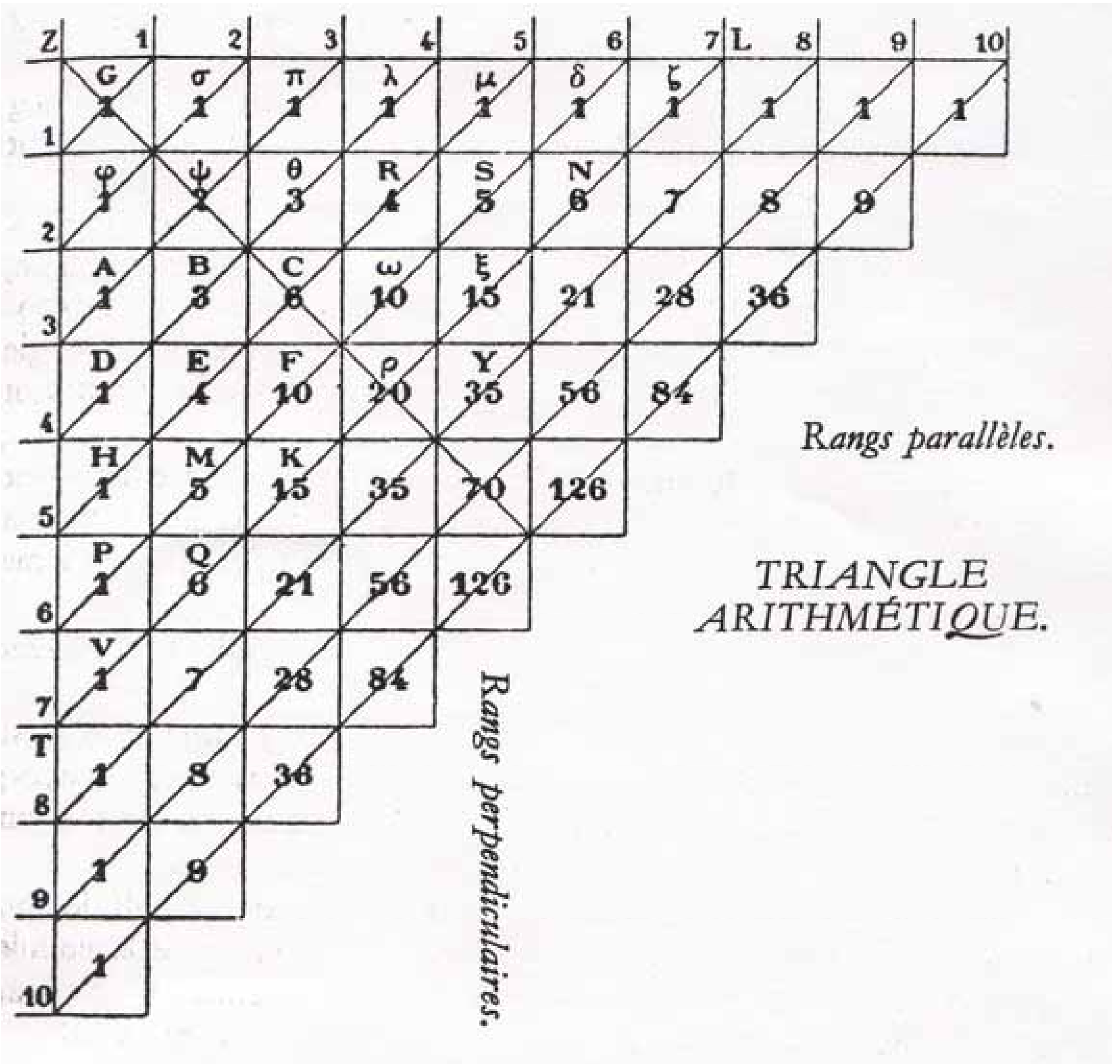
授業資料

数三角形を利用した確率論

(1 日目)



授業者：平島　絡美
（筑波大学大学院修士課程教育研究科 1 年）

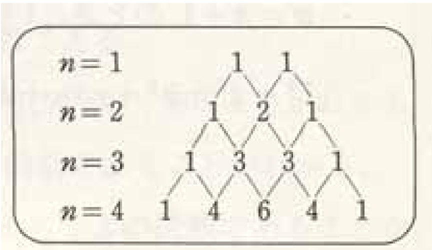
2 年　　組　　番
氏名

1. はじめに

みなさんは、数学の歴史について考えたことがありますか？
なぜその数学が生まれたのか。
どうやってその数学が発展してきたのか。
この 2 日間を通して、このようなことに触れる機会を提供したいと思います。

2. 数三角形とは？

数三角形と聞いて何を思い浮かべますか？
現在では、数三角形は「パスカルの三角形」として広く知られています。
一般に、$(a+b)^n$ の展開した式の係数を下のように並べたものがパスカルの三角形です。パスカルの三角形では、上の行の隣り合う 2 数の和が下の行の数になっている。



しかし、パスカルが数三角形を考える前にも数 3 角形は存在していました。

■紀元前 2 世紀　インドの数学者
　　組合せの問題を解くときに使っていた。
■1000 年頃　イラン：アル・カラジー
　　ベキが 4 のときの 2 項展開を求めた。
　　ペルシア：ウマル・ハイヤーミー
　　一般の 2 項展開について知っていた。
■1050 年頃　中国：賈憲（チャ　シェン）
　　ベキが 6 のときまでを計算した。
■1300 年頃　中国：朱世傑
　　ベキが 8 までの 2 項係数をあらわす三角形をえがいている（図 1）。
■1400 年頃　イラン：アル・カーシー
　　ベキが 9 での係数表を書いた。
■1654 年　フランス：パスカル
　　論文『数三角形論』を発表。


図 1

パスカルの論文が発表されるまで、上記の数学者たちが数三角形を発表していたにもかかわらず、なぜ「パスカルの三角形」と呼ばれているのでしょうか？

3. パスカル

ブレーズ・パスカル　Blaise Pascal　(1623-1662)　フランス生まれ　数学者・哲学者

業績

「人間は考える葦である」

パスカルの三角形

確率論

数学的帰納法　ほか

著書

『パンセ』

『デトンヴィル氏の手紙』

『四分円の正弦に関する論考』

『数三角形論』

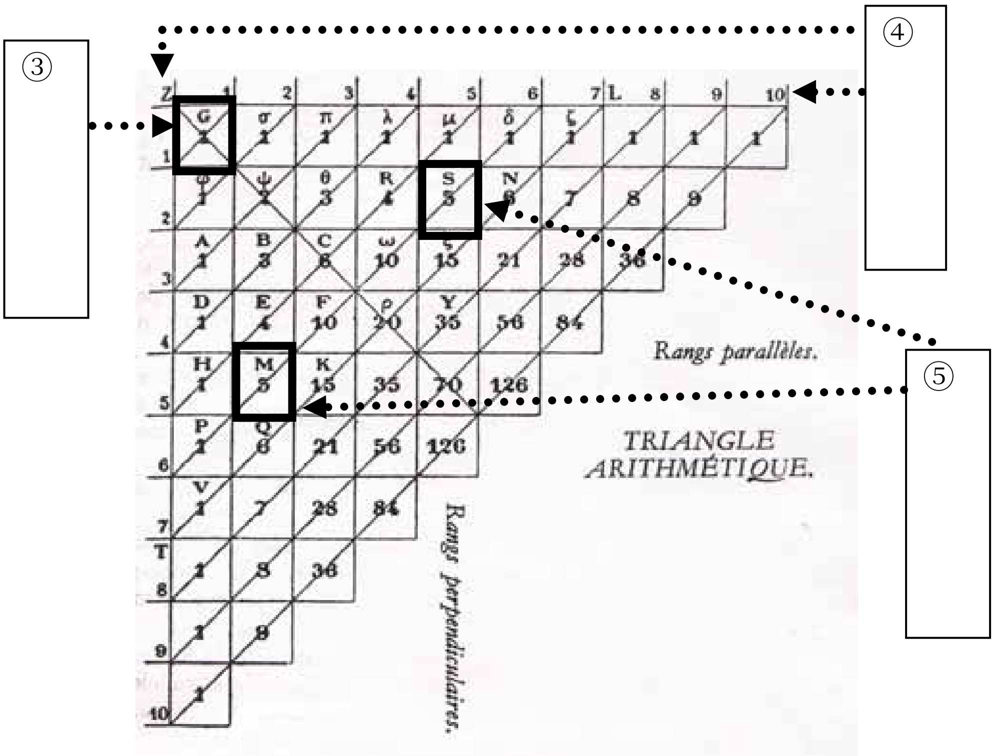
『円錐曲線試論』　ほか

4. パスカルの数三角形

□ の中に言葉を埋めていこう。

四角いマス１つひとつを ① □ と呼ぶ。

左下から右上へ進む対角線上に横切っている線のことを ② □ という。



左から右へ進む 2 つの平行線の間の細胞のことを同じ ⑥ の細胞という。

上から下へ進む 2 つの平行線の間の細胞のことを同じ ⑦ の細胞という。

各細胞の数は、その垂直行における直前の細胞の数とその水平行における直前の細胞の数との和に等しい。

以下の細胞の中に、数字を埋めてみよう。

Z	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	G	σ	π	λ	μ	δ	ζ			
2	φ	ψ	θ	R	S	N				
3	A	B	C	ω	ξ					
4	D	E	F	ρ	Y					
5	H	M	K							
6	P	Q								
7	ν									
8										
9										
10										

上の数三角形を見て、気付いたことを挙げてみよう。

5. 帰結

パスカルは、数三角形から 19 個の帰結を導いています。
その中から 3 つの帰結について原典を使って解釈していきましょう。

以下は、パスカルの説明を穴埋めにしたものです。パスカルは、どのように帰結を説明したのでしょうか。下線部に**細胞の名前もしくは数字**を入れていきましょう。

＜帰結第 7＞

CONSÉQUENCE SEPTIÈME

En tout Triangle arithmétique, la somme des cellules de chaque base eſt double de celles de la base précédente.

訳：すべての数三角形において、各底辺の細胞の和は、その直前の底辺の細胞[の和]の 2 倍である。

任意の底辺として DBθλ をとる。そうすれば、その細胞の和はその直前の

底辺①__________の細胞の和の 2 倍になる。なぜならば、[任意の底辺の]両端の

細胞②________と③________は、[その直前の底辺の]両端の細胞である

④_______と⑤_______に等しく、他の各⑥_______、⑦_______は、直前の底辺の

2 細胞⑧_________と⑨__________に等しい。

故には、⑩______________は⑪______________に等しい。

他のすべての底辺についても同じことが同様にして証明される。

他の例を挙げてみよう。

＜**帰結第 10**＞

CONSÉQUENCE DIXIÈME

En tout Triangle arithmétique, la somme de tant de cellules continues qu'on voudra de sa base, à commencer par une extrémité, est égale à autant de cellules de la base précédente, plus encore à autant hormis une.

訳：すべての数三角形において、或る底辺の 1 端から始めて連続した細胞を欲するだけとれば、その和は、直前の底辺中の同じ個数の細胞に、同じ個数より 1 個だけ少ない細胞を加えたものに等しい。

底辺DBθλの欲するだけの細胞、例えば最初の 3 個の和をとる。そうすれば、この和は、直前の底辺の最初の①____個の和②____________に、同じ底辺の最初の③____個の細胞の和④____________を加えたものに等しい。なぜならば、⑤____は⑥________に、⑦____は⑧________に、⑨____は⑩________に等しい。故に、⑪____________は⑫________________に等しい。

他の例を挙げてみよう。

＜帰結第 12＞

CONSÉQUENCE DOUZIÈME

En tout Triangle arithmétique, deux cellules contiguës étant dans une même base, la supérieure est à l'inférieure comme la multitude des cellules depuis la supérieure jusqu'au haut de la base à la multitude de celles depuis l'inférieure jusqu'en bas inclusivement.

訳：あらゆる数三角形において、同じ底辺にあって隣接する 2 つの細胞のうち、上位の細胞と下位の細胞との比は、上位の細胞から底辺の最上段までの細胞の個数（両端の細胞を含む）と、下位の細胞から最下段までの細胞の個数（両端の細胞を含む）との比に等しい。

同じ底辺の任意の隣接 2 細胞として①__________、②__________をとれば、

下位の細胞①__________と上位の細胞②__________との比は、下位の細胞

①__________から最下段までには、③________つの細胞、すなわち細胞

④_______________があり、上位の細胞②__________から最上段までには、

⑤__________つの細胞、すなわち細胞⑥_______________があるから、

⑦______と⑧______との比に等しい。

他の例を挙げてみよう。

6. 帰結第 12 について

パスカルは、帰結第 12 に証明を与えています。

Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant 2 lemmes.

Le 1, qui est évident de soi-même, que cette proportion se rencontre dans la seconde base; car il est bien visible que φ est à σ comme 1 à 1.

Le 2, que si cette proportion se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.

D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les bases : car elle est dans la seconde base par le premier lemme; donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième, et à l'infini.

Il faut donc seulement démontrer le second lemme, en cette sorte. Si cette proportion se rencontre en une base quelconque, comme en la quatrième $D\lambda$, c'est-à-dire si D est à B comme 1 à 3, et B à θ comme 2 à 2, et θ à λ comme 3 à 1, etc.; je dis que la même proportion se trouvera dans la base suivante, $H\mu$, et que, par exemple, E est à C comme 2 à 3.

Car D est à B comme 1 à 3, par l'hypothèse.

Donc $\underbrace{D + B}_{E}$ est à B comme $\underbrace{1 + 3}_{4}$ à 3.

E à B comme 4 à 3.

De même B est à θ comme 2 à 2, par l'hypothèse.

Donc $\underbrace{B + \theta}_{C}$ à B, comme $\underbrace{2 + 2}_{4}$ à 2.

C à B, comme 4 à 2.

Mais B à E, comme 3 à 4.

Donc, par la proportion troublée, C est à E comme 3 à 2.

C. q. f. d.

以下は、帰結第 12 の証明の訳です。フランス語と数 3 角形を参考にして、下線部分に**数字**を入れましょう。

この命題には無限に多くの場合があるが、私は 2 つの補題を仮定することによって、極めて短い証明を与えよう。

第 1. これは自明であるが、この比例は第 2 底辺において成り立つ。なぜならば、φ と σ との比が 1 対 1 との比に等しいことは極めて明らかである。

第 2. もしこの比例が任意の 1 底辺において成り立つならば、それは必然的に次の底においても成り立つ。

ここから、この比例が必然的にすべての底辺において成り立つことがわかる。なぜならば、補題 1 によって、この比例は第 2 底辺において成り立つ。故に、補題 2 によって、それは第 3 底辺において成り立つ。故に、第 4 底辺においても成り立つ。以下限りなく同様である。

故に、補題 2 のみを証明すればよい。それは次のようにする。

いま、この比例が任意の 1 底辺、例えば第 4 底辺 Dλ において成り立つとする。すなわち、DとBとの比が①____と②____との比に、Bと θ との比が 2 と 2 との比に、θとλとの比が③____と④____との比にそれぞれ等しいとする。そうすれば、同じ比例が次の底辺Hμにおいても成り立ち、例えばEとCとの比は 2 と 3 との比に等しい。

なぜならば、仮定によって、DとBとの比は⑤____と⑥____との比に等しい。

故に、$\underbrace{\text{D+B}}$とBとの比は、$\underbrace{⑦____}$と⑧____との比に等しい。

EとBとの比は⑨____と⑩____との比に等しい。

同様に、仮定によって、Bとθとの比は⑪____と⑫____との比に等しい。

故に、$\underbrace{\text{B}+\theta}$とBとの比は$\underbrace{⑬____}$と⑭____との比に等しい。

CとBとの比は⑮____と⑯____との比に等しい。

しかるに、BとEとの比は、⑰____と⑱____との比に等しい。

故に、交鎖比によって、CとEとの比は、⑲____と⑳____との比に等しい。

証明終。

この証明法は、$\boxed{}$ である。

この論法は、パスカルによってはじめて完全に述べられた。