授業資料

折り紙で
ユークリッドに挑戦
～第３日目：折り紙と立方体の倍積問題～

年	組　　　番
氏名	

授業者：常國　敬太郎
（筑波大学大学院修士課程教育研究科１年）

●前回のまとめ

ユークリッド幾何
の５つの公準

折り紙で表す
ことが可能！

つまり、ユークリッド幾何でできることは折り紙で全てできる！！

ユークリッド
幾何の土台

これが特徴！！

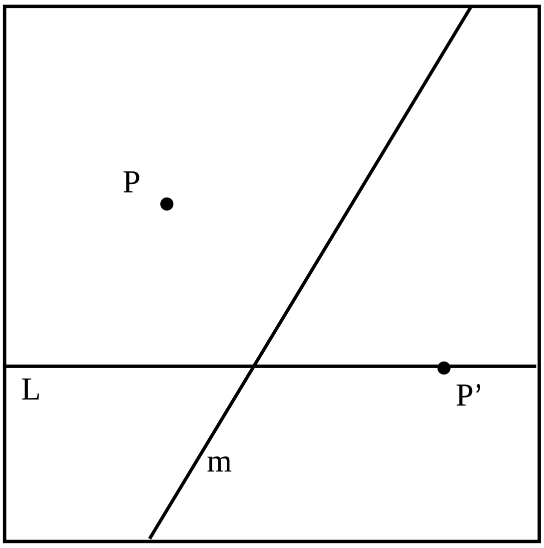
点 P が直線 L に重なるように折る折り方

どうやら、この折り方で現れる曲線は放物線のようである！

●今回の目標

折り紙で放物線の接線が折れることを証明します。
次に２つの放物線の接線を折り、それを分析することによって、立方体の倍積問題が解けることを勉強しよう！

●現れた曲線が放物線であることを証明しよう！



まず、焦点Ｐと準線Ｌが与えられる。
ＰをＬ上に重ねた点を P'とする。

折り目は PP'の（　　　　　　　）になる。この折り目を直線mとする。

直線 m が放物線の接線であれば、現れた曲線が放物線であることがわかる。
したがって、まず直線 m が放物線の接線であることを証明する。

線分 PP'の中点を M とし、P'を通って準線 L に垂直な直線と、直線 m との交点を Q とする。
ここで、ΔPMQ　と　ΔP'MQ　を比較する。

点 M は線分 PP'の中点なので　（　　　　　）　＝　（　　　　　）

直線 m は PP'の垂直 2 等分線なので（∠　　　　）＝（∠　　　　）＝　90°

MQ は　（　　　　　）

三角形の合同条件「　　　　　　　　　　　　　　　　」より、

ΔPMQ　と　ΔP'MQ　は　（　　　　　）

よって　（　　　　　）　＝　（　　　　　）

焦点 P からの距離（PQ）と準線 L からの距離（P'Q）が等しいので、
放物線の定義より点 Q は放物線上の点である。

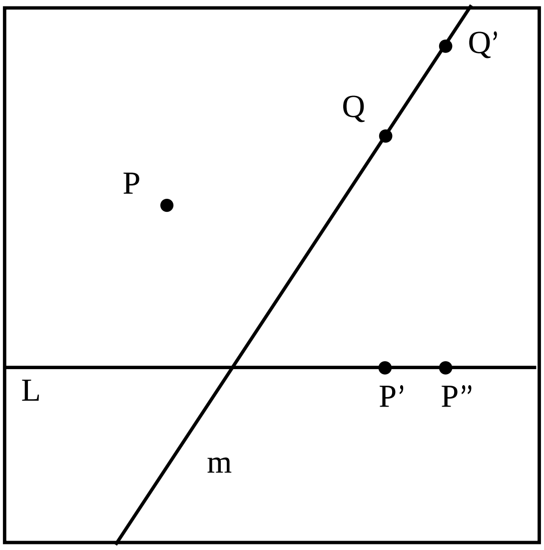
したがって、　直線 m は点 Q で放物線と交わる。

直線 m が点 Q 以外で放物線と交わらないことがわかれば、直線 m は放物線の接線であることが証明できる。

そこで、まず「直線 m が点 Q 以外で交わる」という間違った仮定をたて、それが矛盾することを示すによって「直線 m が点 Q 以外で交わらない」ことを証明しよう！

直線 m が点 Q 以外で放物線と交わる点を点 Q'とする。

また、Q'から準線 L におろした垂線の足を P"とする。



直線 m は PP'の垂直 2 等分線なので、PQ'　＝　（　　　　）

点 Q'は放物線上の点なので、放物線の定義より、PQ'　＝　（　　　　）

（以上 ①）

ここで、ΔP'Q'P"に注目すると P'Q'は直角三角形の斜辺なので

P'Q'　＞　（　　　　）　・・・　②

①、②より、この結果は矛盾する。

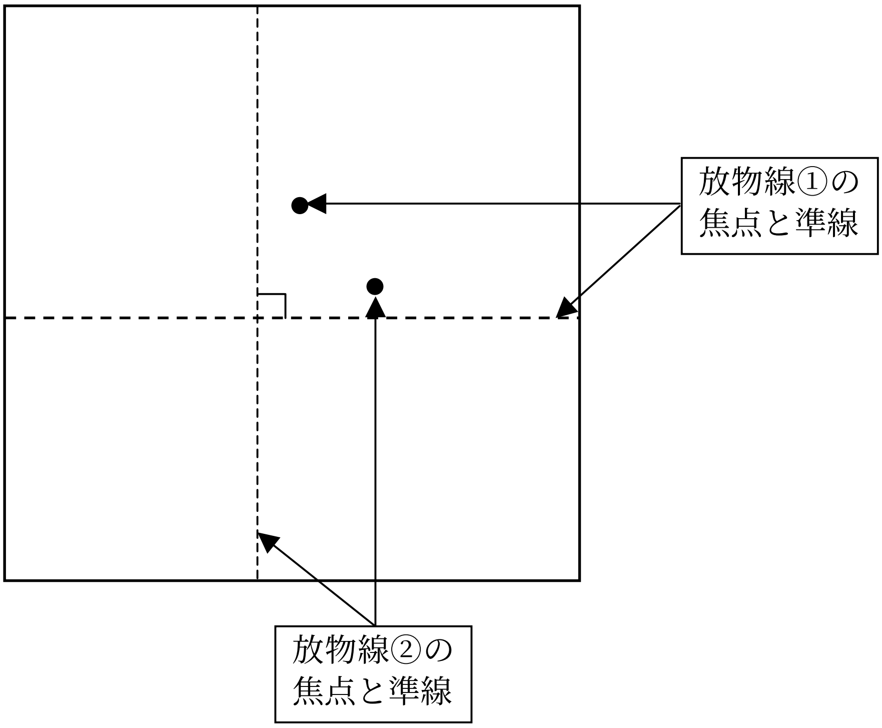
したがって、　点 Q'は放物線上の点ではない。
また、　　　　直線 m は放物線と点 Q のみで交わる。

つまり、　**直線 m は点 Q を接点とする、放物線の接線である。**

→ 多くの接点を見つけることができるので、接点の集まりである放物線を描くことができる。

●二つの放物線の接線

準線と焦点の位置を決めることで、放物線が定まるのだった。
ここでは、２つの放物線の準線と焦点の位置を下図のように定めて、２つの放物線に同時に接する接線、つまり共通接線を折ってみよう！



●共通接線を、方程式を用いて分析する

以下の手順で２つの放物線の共通接線を式で表そう！

２つの放物線をそれぞれ　$y=\frac{1}{2a}x^2\cdots①$　,　$x=\frac{y^2}{2b}\cdots②$　とする。

※ただし、$a,b>0$

・①、②を y について解く。

①　$y_1=$ ②　$y_2=$ ここで、共通接線は明らかに放物線②の y<0 で接しているので

・放物線①の接線の方程式を考える

・微分：　$y_1'=$ ・放物線①で、接点の　x　座標を　t　とおくと接点の　y　座標は ・x = t とおいたので、放物線①の接線の傾きは ・接点の座標と傾きから、放物線①の接線の方程式：y_s $y_s=$

・y_s　と放物線の交点

$y_s = y_2$　　とすれば交点が出るので、

・判別式から　t　を求める

y_sは放物線②にも接する。したがって放物線②との交点は１つである。

判別式

・２つの放物線の共通接線の傾き

$y_1' = \frac{1}{a}x$　　で　　$x = t = -\sqrt[3]{a^2 b}$　　であったので

$y_1' =$

以上より、２つの放物線の共通接線の傾きは・・・

$\left(\qquad\qquad\right)$

●２つの放物線の共通接線の性質

$\begin{cases} a=1 \\ b\text{ は任意の数} \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{代入}}$ b の（　　　　　）が求められる！

つまり

ユークリッド原論では解けない、三大作図問題の１つ：

____

が折り紙では解ける、ということ！

つまり

折り紙の独自の方法である、共通接線を折る折り方は、ユークリッド原論の内容を超越した方法です。
コンパスと定木でできることに加えて、三乗根を求めることができるのが、『折り紙』という道具だということです。

●今までの復習

1．古代ギリシア時代の数学

古代ギリシア時代の数学

定木とコンパスのみを用いた作図で問題を解く数学

代表的な本

ユークリッド原論

2．三大作図問題

２千年以上もの間、多くの数学者が挑戦してきた問題

・立方体の倍積問題
・角の三等分問題
・円の平方化問題

定木とコンパスのみを用いた作図では、三乗根（立方根）を求めることができない！

３．５つの公準と折り紙

ユークリッド原論は５つの公準を土台にして構成されている！

折り紙で表すことができる！

つまり・・・

定木とコンパスで解ける問題は、全て折り紙で解くことができる！

４．折り紙の特徴的な折り方

放物線の接線を折ることができる！

ポイントは・・・

<u>放物線の定義</u>
焦点と準線からの距離が等しい点の集まり

５．２つの放物線の共通接線

２つの放物線の共通接線を折ることができる。

共通接線の傾きを方程式を使って求めると・・・

三乗根（立方根）を求めることができる！！