

授業資料

折り紙で ユークリッドに挑戦

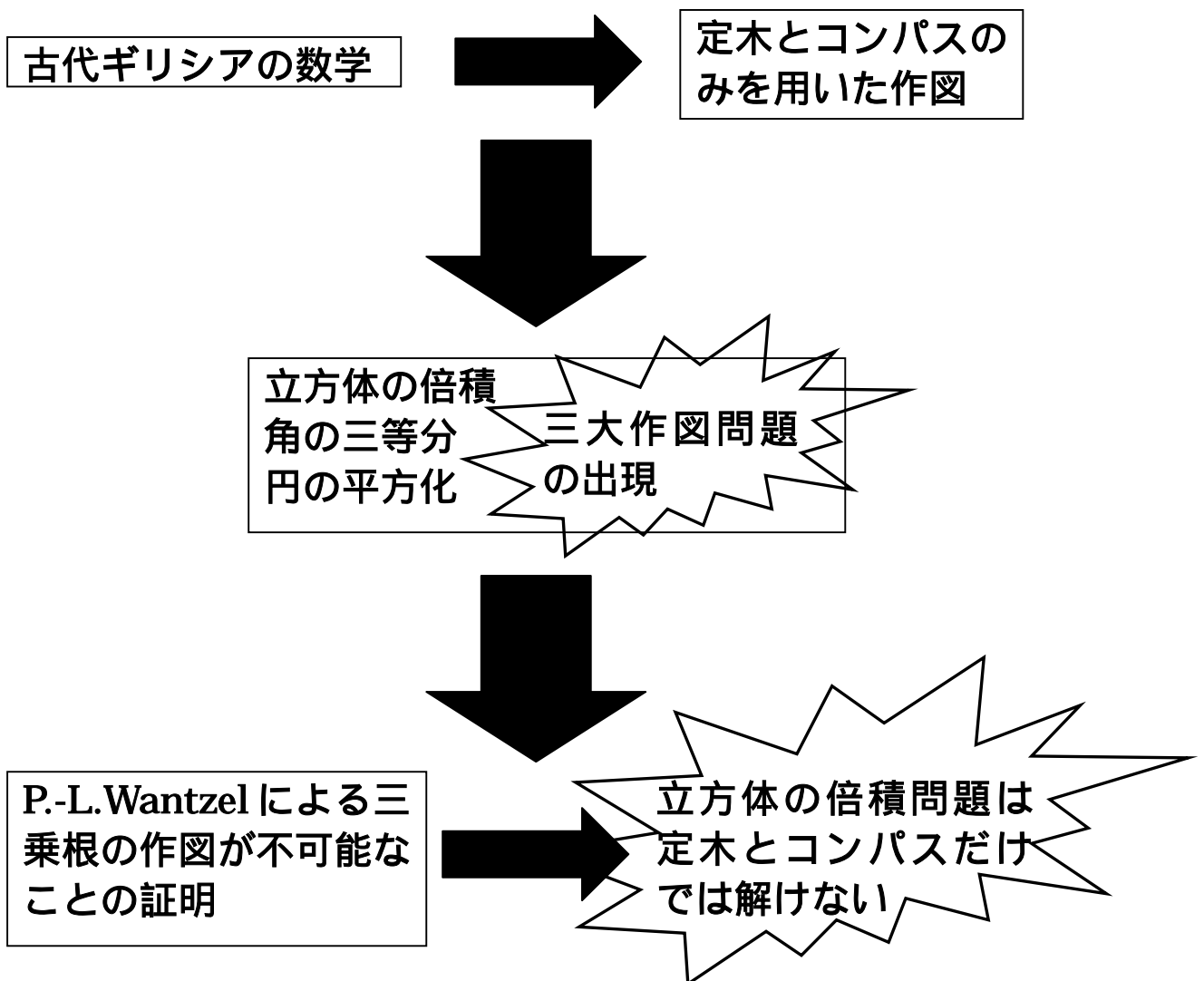
～ 第2日目：折り紙とユークリッド原論～



年	組	番
氏名		

授業者：常國 敬太郎
(筑波大学大学院修士課程教育研究科1年)

前回のまとめ



今回の目標

折り紙とユークリッド原論との対応を考え、折り紙の特徴的な性質を勉強しよう！

ユークリッド原論における公準～前回の復習～

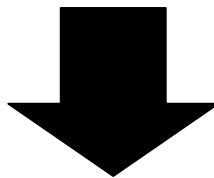
公準（要請）

次のことが要請されているとせよ。

- 1．任意の点から任意の点へ直線をひくこと。
- 2．および有限直線を連続して一直線に延長すること。
- 3．および任意の点（中心）と距離（半径）とをもって円を描くこと。
- 4．およびすべての直角はお互いに等しいこと。
- 5．および1直線が2直線に交わり同じ側の内角の和を2直角より小さくするならば、この2直線は限りなく延長されると2直角より小さい角のある側において交わること。

『ユークリッド原論 第1巻』より

公準・・・自明ではないが、証明不可能な命題。
つまり、ユークリッドが「この原論の中ではこのように考える」と要請したもの。



つまり、定木とコンパスのみを使う作図では、上の5つの公準のみが認められているということ！

もっとわかり易く言うと・・・

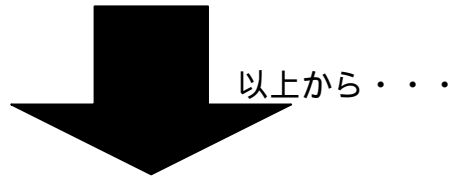
ユークリッド原論は上の5つの公準が土台になって構築されているということ！

「5つの公準」と「折り紙」

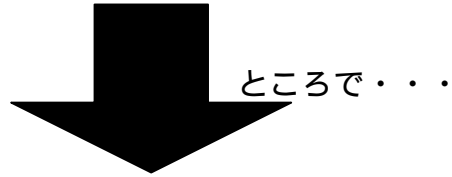


公準1～5を折り紙で表そうとすると、問題となったことを書いてみよう。

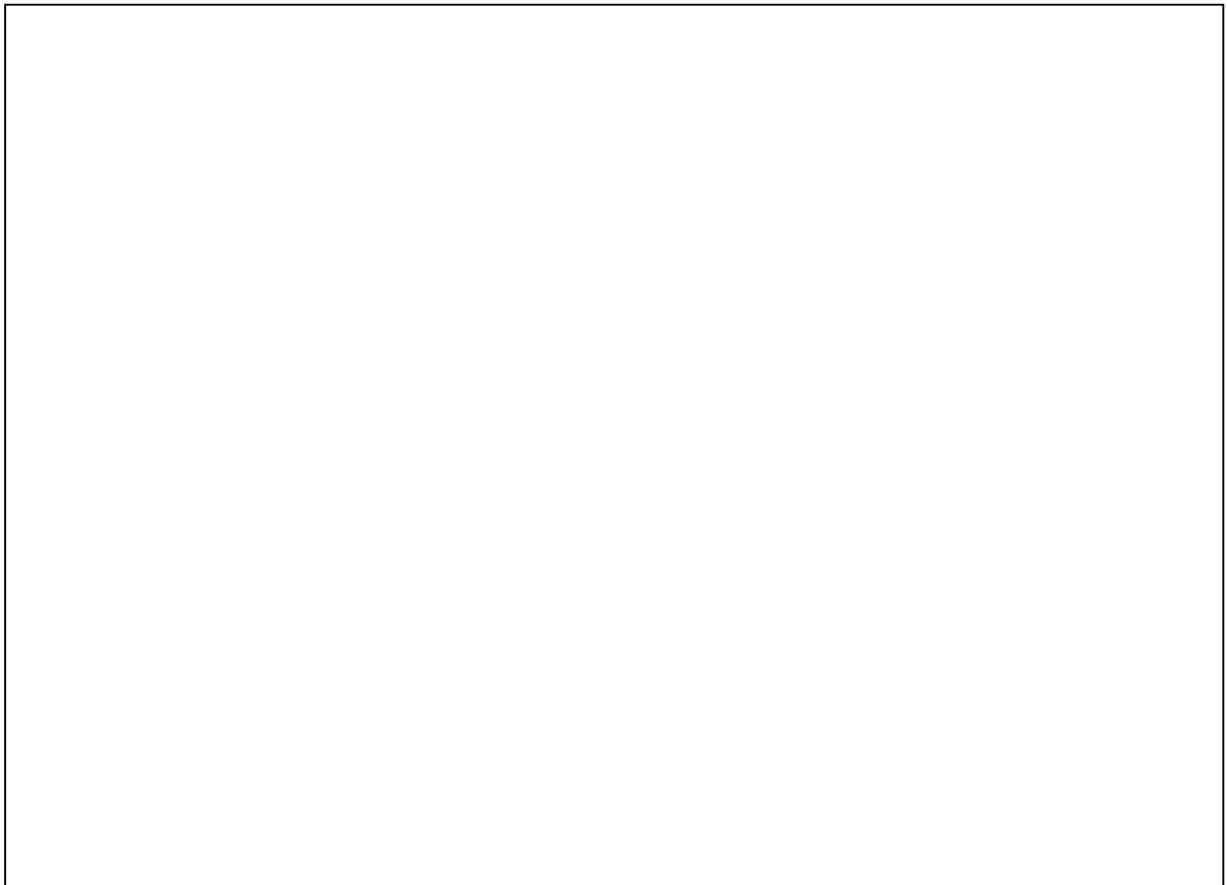
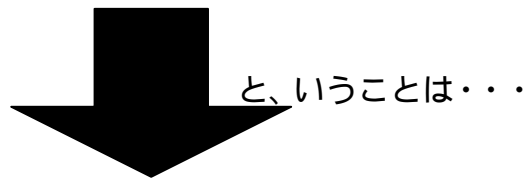
問題の解決策を考えよう。



ユークリッド原論の5つの公準は折り紙を使うことによって表すことができる！



ユークリッド原論は5つの公準が土台になって構築されたものだった。
その土台が全て折り紙で表せた！



折り紙の特徴的な折り方

点 P が直線 L に重なる
ように折ってみよう！

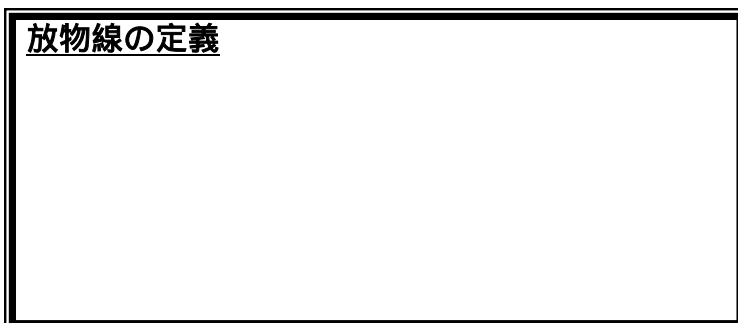


どんな形が現れて
きますか？

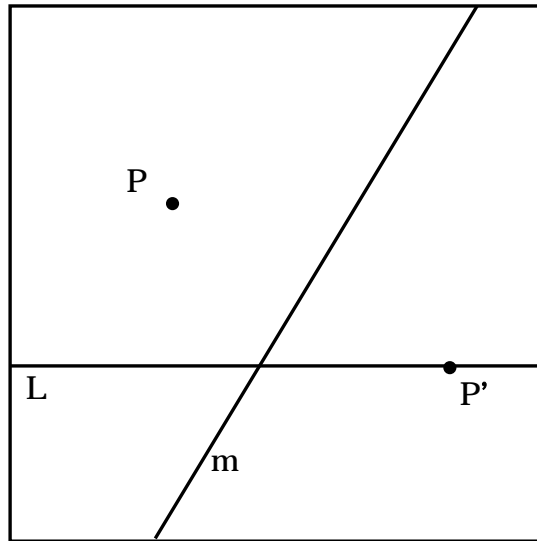
放物線とは、どんな曲線??



放物線の定義



現れた曲線が放物線であることを証明しよう！



まず、焦点Pと準線Lが与えられる。
PをL上に重ねた点をP'とする。

折り目はPP'の()になる。この折り目を直線mとする。

直線mが放物線の接線であれば、現れた曲線が放物線であることがわかる。
したがって、まず直線mが放物線の接線であることを証明する。

線分PP'の中点をMとし、P'を通過して準線Lに垂直な直線と、直線mとの交点をQとする。
ここで、PMQ と P'MQ を比較する。

点Mは線分PP'の中点なので () = ()

直線mはPP'の垂直二等分線なので () = () = 90度

MQは ()

三角形の合同条件「 」より、

PMQ と P'MQ は ()

よって () = ()

焦点Pからの距離(PQ)と準線Lからの距離(P'Q)が等しいので、
放物線の定義より点Qは放物線上の点である。

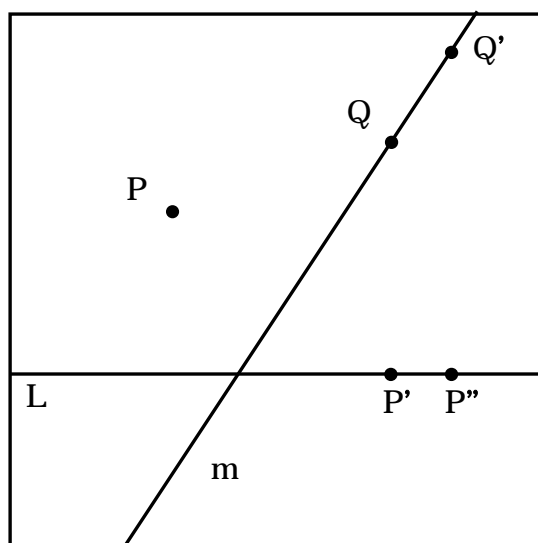
したがって、直線mは点Qで放物線と交わる。

直線 m が点 Q 以外で放物線と交わらないことがわかれば、直線 m は放物線の接線であることが証明できる。

そこで、まず「直線 m が点 Q 以外で交わる」という間違った仮定をたて、それが矛盾することを示すによって「直線 m が点 Q 以外で交わらない」ことを証明しよう！

直線 m が点 Q 以外で放物線と交わる点を点 Q' とする。

また、 Q' から準線 L におろした垂線の足を P'' とする。



直線 m は PP' の垂直二等分線なので、 $PQ' = (\quad)$

点 Q' は放物線上の点なので、放物線の定義より、 $PQ' = (\quad)$

ここで、 $P'Q'P''$ に注目すると $P'Q'$ は直角三角形の斜辺なので

$P'Q' > (\quad) \dots$

よ、この結果は矛盾する。

したがって、点 Q' は放物線上の点ではない。

また、直線 m は放物線と点 Q のみで交わる。

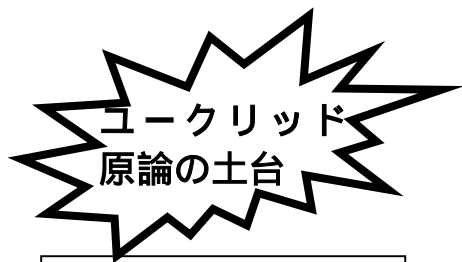
つまり、

直線 m は点 Q を接点とする、放物線の接線である。



多くの接点を見つけることができるので、接点の集まりである放物線を描くことができる。

今日のまとめ

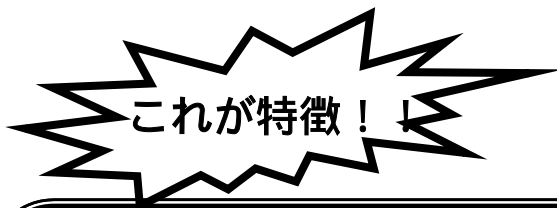


ユークリッド原論
の5つの公準



折り紙で表す
ことが可能!

つまり、ユークリッド原論の問題
は折り紙で全て解くことができ
る!!



点 P と直線 L が与えられたとき、点 P を焦点とし、直線 L を準線とする放物線の接線を折ることができる。



放物線の定義：
準線と焦点からの距離が等しい点の集まり

次回予告

2つの放物線の共通接線を折ります。
その共通接線を分析して、折り紙で立方
体の倍積問題が解けることを勉強しよ
う!