

授業資料

# 折り紙で ユークリッドに挑戦

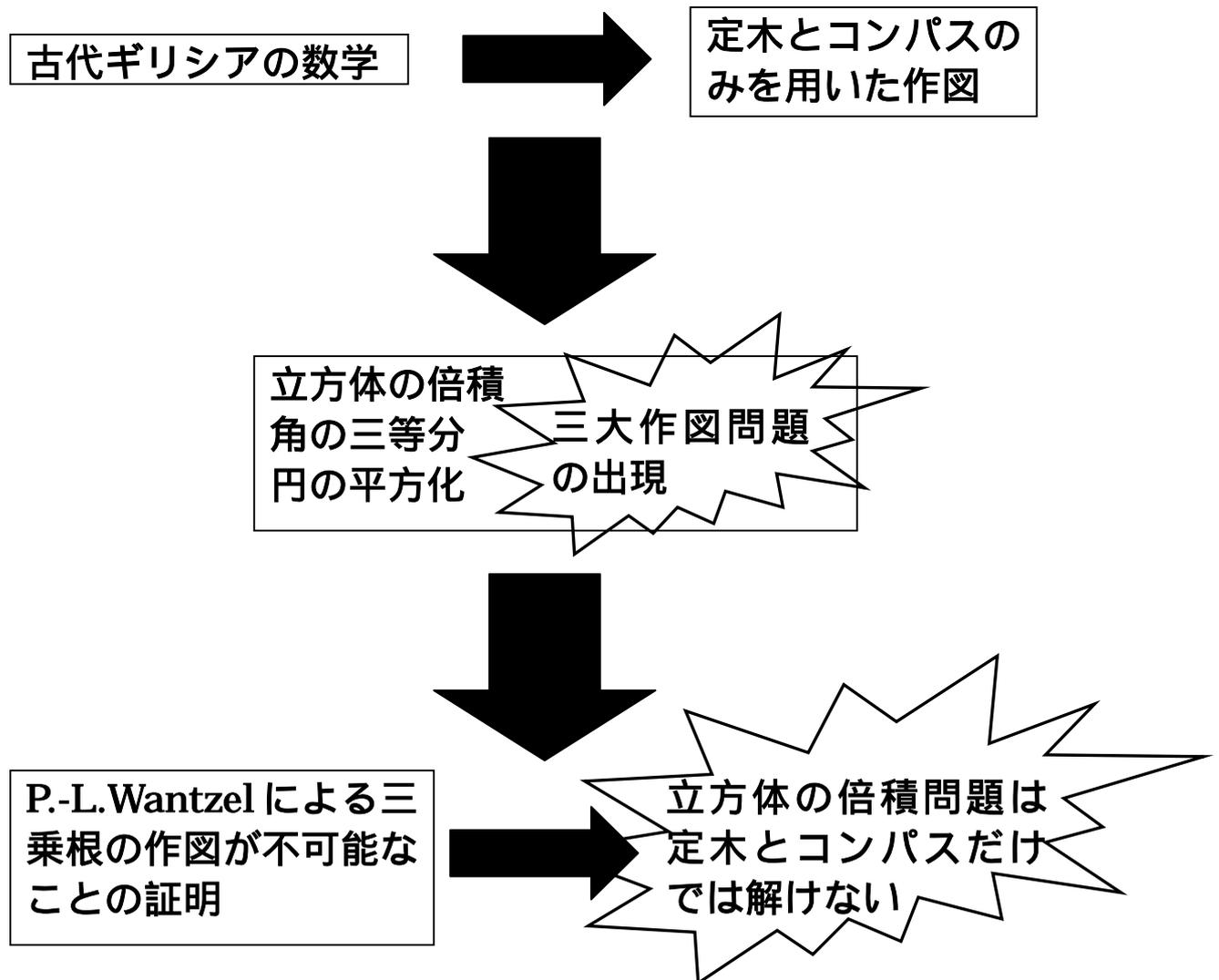
～ 第2日目：折り紙とユークリッド原論～



年	組	番
氏名		

授業者：常國 敬太郎  
(筑波大学大学院修士課程教育研究科1年)

## 前回のまとめ



## 今回の目標

折り紙とユークリッド原論との対応を考え、折り紙の特徴的な性質を勉強しよう！

## ユークリッド原論における公準～前回の復習～

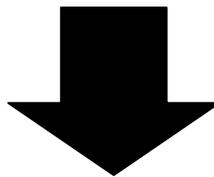
### 公準（要請）

次のことが要請されているとせよ。

- 1．任意の点から任意の点へ直線をひくこと。
- 2．および有限直線を連続して一直線に延長すること。
- 3．および任意の点（中心）と距離（半径）とをもって円を描くこと。
- 4．およびすべての直角はお互いに等しいこと。
- 5．および1直線が2直線に交わり同じ側の内角の和を2直角より小さくするならば、この2直線は限りなく延長されると2直角より小さい角のある側において交わること。

『ユークリッド原論 第1巻』より

公準・・・自明ではないが、証明不可能な命題。  
つまり、ユークリッドが「この原論の中ではこのように考える」と要請したもの。



つまり、定木とコンパスのみを使う作図では、上の5つの公準のみが認められているということ！

もっとわかり易く  
言うと・・・

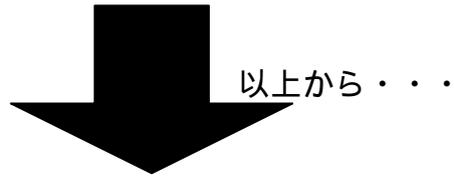
ユークリッド原論は上の5つの公準が土台になって構築されているということ！

「5つの公準」と「折り紙」

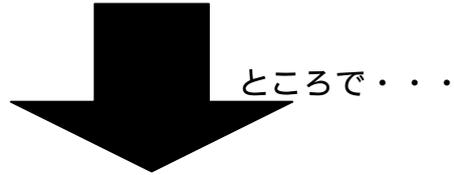


公準1～5を折り紙で表そうとすると、問題となったことを書いてみよう。

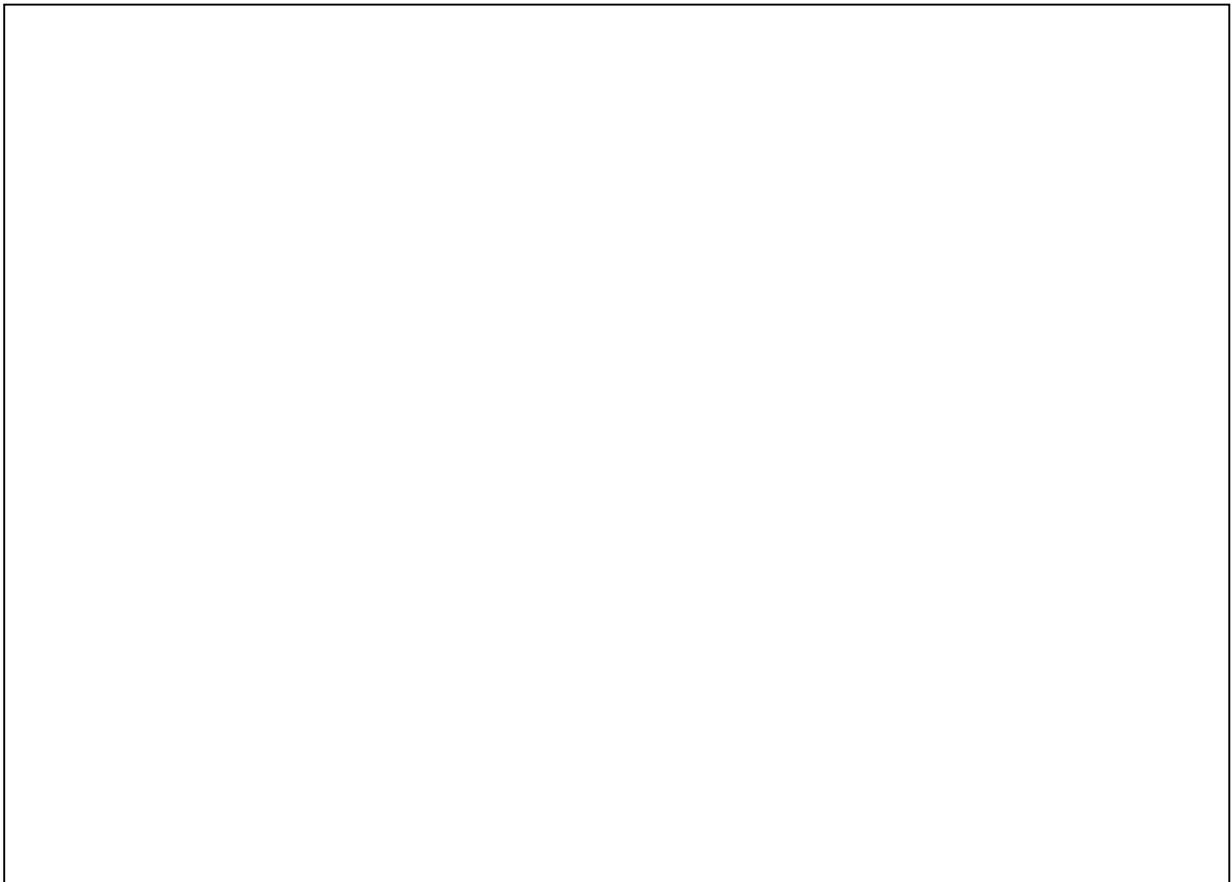
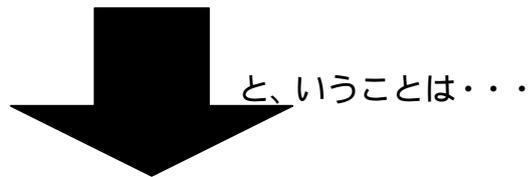
問題の解決策を考えよう。



ユークリッド原論の5つの公準は折り紙を使うことによって表すことができる！



ユークリッド原論は5つの公準が土台になって構築されたものだった。  
その土台が全て折り紙で表せた！



## 折り紙の特徴的な折り方

点  $P$  が直線  $L$  に重なる  
ように折ってみよう！

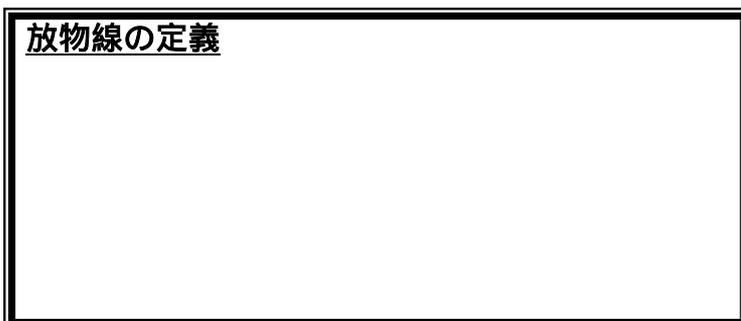


どんな形が現れて  
きますか？

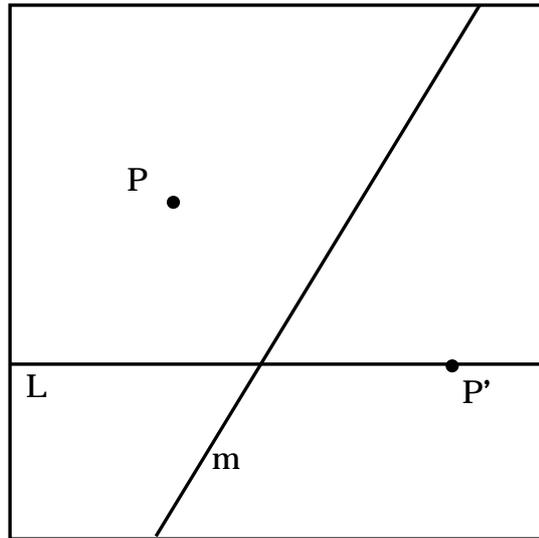
放物線とは、どんな曲線??



放物線の定義



現れた曲線が放物線であることを証明しよう！



まず、焦点Pと準線Lが与えられる。  
PをL上に重ねた点をP'とする。

折り目はPP'の( )になる。この折り目を直線mとする。

直線mが放物線の接線であれば、現れた曲線が放物線であることがわかる。  
したがって、まず直線mが放物線の接線であることを証明する。

線分PP'の中点をMとし、P'を通過して準線Lに垂直な直線と、直線mとの交点をQとする。

ここで、PMQ と P'MQ を比較する。

点Mは線分PP'の中点なので ( ) = ( )

直線mはPP'の垂直二等分線なので ( ) = ( ) = 90度

MQは ( )

三角形の合同条件「 」より、

PMQ と P'MQ は ( )

よって ( ) = ( )

焦点Pからの距離(PQ)と準線Lからの距離(P'Q)が等しいので、  
放物線の定義より点Qは放物線上の点である。

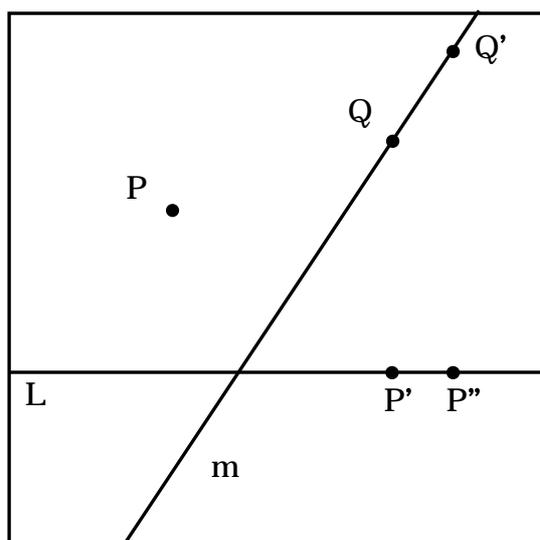
したがって、直線mは点Qで放物線と交わる。

直線  $m$  が点  $Q$  以外で放物線と交わらないことがわかれば、直線  $m$  は放物線の接線であることが証明できる。

そこで、まず「直線  $m$  が点  $Q$  以外で交わる」という間違った仮定をたて、それが矛盾することを示すによって「直線  $m$  が点  $Q$  以外で交わらない」ことを証明しよう！

直線  $m$  が点  $Q$  以外で放物線と交わる点を点  $Q'$  とする。

また、 $Q'$  から準線  $L$  におろした垂線の足を  $P''$  とする。



直線  $m$  は  $PP'$  の垂直二等分線なので、 $PQ' = ( \quad )$

点  $Q'$  は放物線上の点なので、放物線の定義より、 $PQ' = ( \quad )$

ここで、 $P'Q'P''$  に注目すると  $P'Q'$  は直角三角形の斜辺なので

$P'Q' > ( \quad ) \dots$

よ、この結果は矛盾する。

したがって、点  $Q'$  は放物線上の点ではない。  
 また、直線  $m$  は放物線と点  $Q$  のみで交わる。

つまり、

**直線  $m$  は点  $Q$  を接点とする、放物線の接線である。**



多くの接点を見つけることができるので、接点の集まりである放物線を描くことができる。

今日のまとめ



ユークリッド原論  
の5つの公準



折り紙で表す  
ことが可能!

つまり、ユークリッド原論の問題  
は折り紙で全て解くことができ  
る!!



点  $P$  と直線  $L$  が与えられたとき、点  $P$  を焦点とし、直線  $L$  を準線とする放物線の接線を折ることができる。



放物線の定義：  
準線と焦点からの距離が等しい点の集まり

次回予告

2つの放物線の共通接線を折ります。  
その共通接線を分析して、折り紙で立方  
体の倍積問題が解けることを勉強しよ  
う!