出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.175-185、2005年3月

歴史的道具を用いた数学的活動をよる授業研究

－F.VAN SCHOOTEN の作図器を題材にして－

筑波大学大学院修士課程教育研究科
江田　慶彦

章構成

要約

本研究ではF.VAN SCHOOTENの作図器の教材化を行い、原典解釈と実際に道具を観察、操作する授業実践を行った。これにより生徒は数学を人の営みとして捉え、より興味・関心を抱くとともに、道具の持つ役割・歴史的価値・有用性を感じることができたことを確認された。その結果、生徒たちの数学間の変容が見られた。

キーワード： F.VAN SCHOOTEN、楕円、双曲線、放物線、曲線作図器

１.はじめに

中学校学習指導要領（1999）では、「数学的活動の楽しさ」を数学の目標の中に含み、指導要領解説（1999）においては「観察、操作、実験など具体的な活動」、「自ら学び自ら考える力」の育成、「数学的活動」の充実を図っている。

礒田・土田（2001，p.8）によると、「他者の認めた良さを味わうためには、他者の立場になって考えてみる必要がある。」また、礒田（2001，p.43，2002，p.9-10）は「普段与えられることのない課題を投げかけて異文化体験させて、生徒自身が学んでいる数学文化を自覚できない状況、学んでいる数学から疎外されている状況から脱して、その意味を自覚し、それ以後の数学意識への新たな視野を提供する。」、「実際の歴史上の原典を開き、その原典を記した人の立場や考え方を送迎し、その人に心情を重ねて解釈すると、今、自分たちの学ぶ数学が、異なる時代・文化背景に生きた人々によって、まるで異なる思考様式で研究され、表現されていたことが体験できる。」と述べている。さらに礒田（2003，p.249）は「道具を実際に利用してみることで、人は、その道具の開発者・利用者がなぜそれを用いたのか、彼らが実際どのように考えたのかを知るきっかけを得ることができる。」と述べている。

また、これまでに原典解釈と歴史的道具を用いた授業実践として、諏佐（2004，p.94）がガリレオの比例コンパスを題材として、「数学的活動によって生徒は道具の中にある数学を見出し、数学を人の営みとして捉えることができた。」と報告し、今村（2004，p.134）は原典解釈と道具を用いて追体験する授業を行うことで生徒自身が今まで経験してきた数

学とは違った数学を発見でき、数学に対する更なる興味・関心を持てたと報告している。

これらをふまえ、筆者は原典解釈と歴史的道具を授業の題材とし、異文化体験させる授業実践を行う。特に歴史的道具を実際に観察し、操作することで生徒が「数学的活動の楽しさ」を見出し、数学に対する興味・関心をより引き出すことができるとともに、道具の持つ役割・歴史的価値・有用性を感じることができる。さらには「道具の開発者・利用者がなぜそれを用いたのか、どのように考えたのかを知るきっかけを得ること」で「自ら学び自ら考える力」の育成にもつながるのではないかと考える。

以上より原典解釈を行い、特に歴史的道具の追体験を重視した授業実践を行い、道具を実際に組み立て、操作することで数学を人の営みとして捉え、より興味・関心を抱かせるとともに、道具の持つ役割・歴史的価値・有用性を感じることで、数学観の変容を考察する。

２．研究目的・研究方法

（１）研究目的

F.VAN SCHOOTEN が著書『ORGANICA』の中で使っている道具を実際に組み立て、操作することで数学を人の営みとして捉え、より興味・関心を抱かせるとともに、道具の持つ役割・歴史的価値・有用性を感じることで、数学観の変容を考察する。

以上の目的を達成するために、以下を課題とする。

課題１：道具のできた歴史的背景を知り、F.VAN SCHOOTEN の作図器を実際に操作することで数学を人の営みとして捉え、より興味・関心を持つことや数学的活動の楽しさを感じることができる。

課題２：課題１を通し、作図することで、道具の持つ役割・歴史的価値・有用性を感じることができるか。

（２）研究方法

楕円・双曲線・放物線の作図に関するテキストを開発し、それを用いて授業実践を行う。そして、授業前後のアンケート、ビデオによる授業記録に基づき考察した。

３．F.VAN SCHOOTEN の作図器の教材化

本研究では上記の 2 つの研究課題を達成するために、F.VAN SCHOOTEN の作図器の教材化を行った。教材化に当たり、F.VAN SCHOOTEN の著書『ORGANICA』を原典とした。

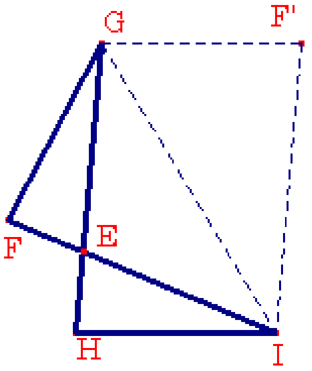
F.VAN SCHOOTEN 以前に Descartes,R が紐と杭、定木を用いて楕円・双曲線・放物線を描き、それぞれを定義している。その後 F.VAN SCHOOTEN が著書『ORGANICA』の中でも Descartes,R の方法を取り上げ、さらに機構を用いて楕円･双曲線･放物線を描いている。同じ曲線を異なる道具で描くことで「道具の開発者・利用者がなぜそれを用いたのか、どのように考えたのかを知るきっかけを得ること」（礒田 2003，p.249）ができると考える。

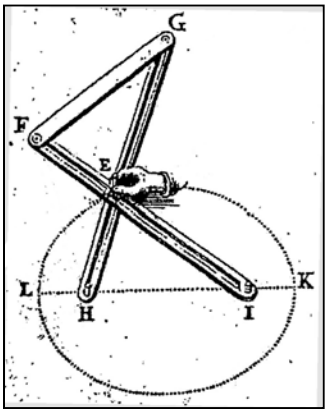
また、本研究で対象とした生徒は中学三年生であり、学習して間もない放物線などの曲線を描ける道具を実際に操作することで道具の持つ役割・歴史的価値・有用性を感じることができ、より興味・関心を持つことができると考え、教材化した。

出典：中学校·高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.175-185、2005年3月

４．F.VAN SCHOOTEN の作図器の数学的解説

（１）楕円作図器（コントラパラレログラム①）





【図１】楕円作図器　　【図２】楕円作図器（『ORGANICA』より）

コントラパラレログラム①は交叉平行四辺形を利用した作図器である。交叉平行四辺形 HIFG とは、平行四辺形 HIF'G を対角線 IF'で折り返した図形である。HG=IF、HI=FG、HI<IF を満たす。辺 HG と辺 IF の交点を E とする。辺 HI を固定して、点 G が点 H の周りを回転するとき交点 E は点 H、I を焦点とする楕円を描く。

（証明）平行四辺形 HIF'G の対角線 GI に対して F'を線対称移動したものが F であるから、△IFG は△IF'G を折り返した図形となっている。よって、

FG= F'G= HI　・・・①

∠FEG ＝ ∠HEI　・・・②

∠GFI ＝ ∠GF'I = ∠IHG　・・・③

②③より∠EGF =∠EIH・・・④

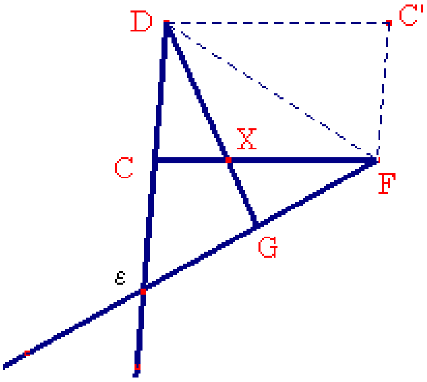
よって、①③④より一辺とその両端の角が等しいので、

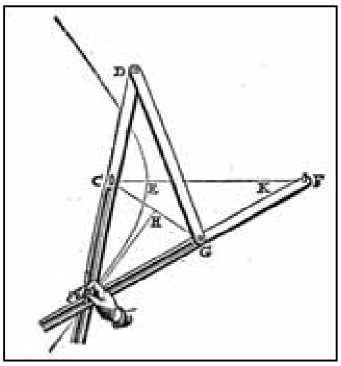
△HIE ≡ △FGE

したがって、HE + IE = HE + EG= HG

つまり、点 E は点 H、I からの距離の和が常に一定となっているので、点 E が描く図形は楕円である。

（２）双曲線作図器（コントラパラレログラム②）





【図３】双曲線作図器　　【図４】楕円作図器（『ORGANICA』より）

コントラパラレログラム②はコントラパラレログラム①と同様に交叉平行四辺形を利用した作図器である。辺 DC、辺 FG の延長線の交点を ε とする。辺 CF を固定して、点 G が点 F の周りを回転するとき交点 ε は点 C、F を焦点とする双曲線を描く。

交叉平行四辺形の性質より、DG=FC・・・①

△DCX≡△FGX・・・②（楕円の証明より）

②より、∠εDG ＝ ∠εFC・・・③

∠DGε ＝ １８０°－∠FGX

＝ １８０°－∠DCX＝∠FCε・・・④

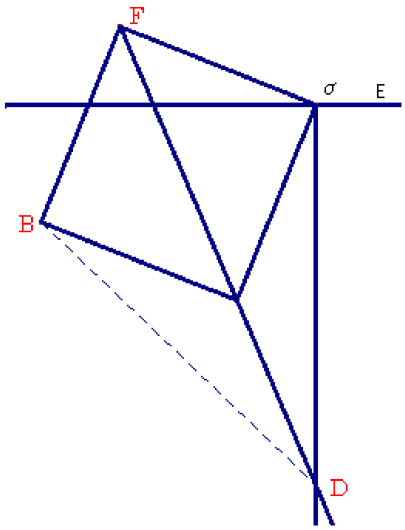
①③④より一辺とその両端の角が等しいので、

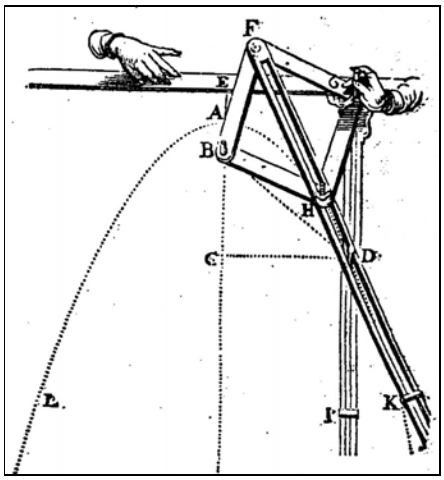
△DGε ≡△FCε

よって、Fε－Cε＝Fε－Gε＝FG

つまり点 ε は点 C、F からの距離の差が常に一定となっているので、点 ε が描く図形は双曲線である。

（３）放物線作図器





【図５】放物線作図器　　　　　　　　【図６】楕円作図器（『ORGANICA』より）

図６はひし形 BFσH を利用した作図機である。対角線 FH の延長線と点 σ を通り、直線 E に垂直な直線 I の交点を D とする。点 B を固定し、直線 E 上を点 σ が移動するとき、交点 D は、点 B を焦点、直線 E を準線とする放物線を描く。

（証明）△FBD と△FσD に注目。

FD＝FD・・・①

ひし形の性質より

FB＝Fσ・・・②

∠BFD＝∠σFD・・・③

①②③より、２辺とその間の角が等しいので

△FBD≡△FσD

つまり、BD=σD

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.175-185、2005年3月

よって、点Bからの距離と直線Eからの距離が常に等しいので点Dは放物線を描く。

5．授業概要

（1）授業環境

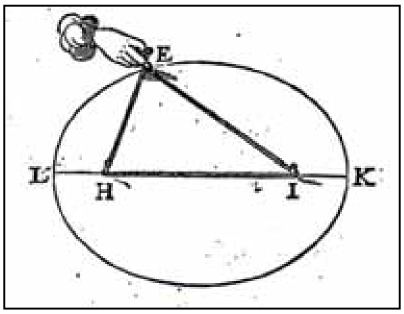
①日時：平成16年12月13日、14日、16日（50分×3回）

②対象：茨城県内私立中学校第3学年（2クラス92名）

③準備：コンピューター（Windows）、作図ソフト（Cabri GeometryⅡ）、ビデオプロジェクター、実物投影機、事前・事後アンケート、授業テキスト、ワークシート、楕円・双曲線作図器、放物線作図器、授業記録用のデジタルカメラ等

（2）授業展開

1日目



【図７】Descartes,Rの行った楕円の作図（『ORGANICA』より）

【目標】

曲線を描く必要性が出てきた歴史的背景を知るとともに、道具を実際に組み立て操作することで道具に対する興味・関心を高める。

① 楕円の作図法の紹介・楕円の定義

はじめに図7をスクリーンに提示し、図は何をしているところかという発問をした。

【対話】

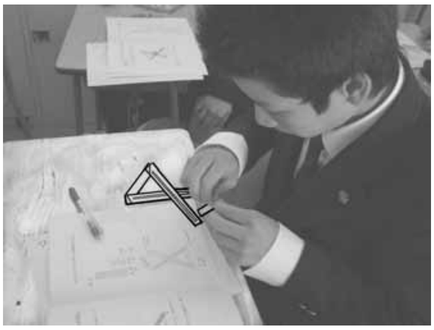
授業者：これは何をしているところですか。

生徒：作図。

授業者：何を作図していますか。

生徒：楕円。

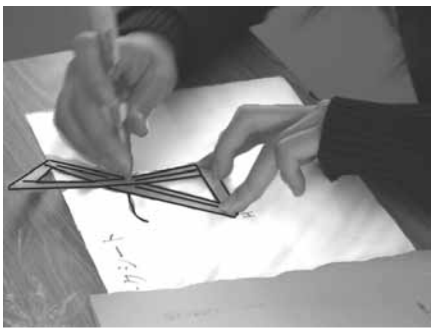
次に、原典解釈によって楕円を定義した（ある2点からの距離の和が常に一定の点の集まり）。そして、17世紀ごろ、なぜ楕円などの曲線を描く必要があったのかを説明した。



【写真１】道具を組み立てる

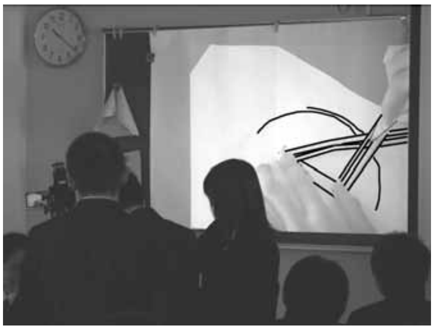
② コントラパラレログラム①の組み立て・作図

すでに配布済みのコントラパラレログラム①のパーツを二人一組になって組み立てさせ、コントラパラレログラム①がどのような動きをするのか実際に動かしてみた。このとき、コントラパラレログラム（交叉平行四辺形）がどのようにして出来ているかを説明した。その後、HIを固定させたときのコントラパラレログラム①の交点Eの動きに注目させてから、コントラパラレログラム①を使ってワークシート上に交点Eの動きを描かせた。



【写真２】楕円を描く

すべての生徒がワークシート上の作業が出来る十分な時間を与えた。このとき授業者は机間巡視しながら、生徒の作業状況を把握し、適宜アドバイスをした。十分な時間が経過した後、交点 E の動きをきれいに描くことが出来た生徒を代表として前に出てもらい、実物投影機を使って作図の実演してもらった。

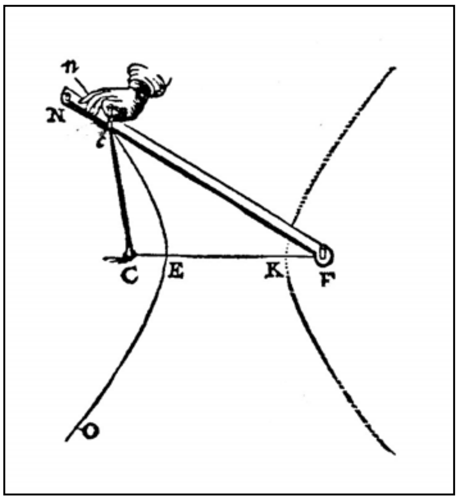


【写真３】スクリーンで発表

③ 証明
描かれた図形はいったいどのような図形であるか質問したところ、授業の導入で楕円を見せているので、すぐにコントラパラレログラム①によって描かれた図形は楕円だという答えが出てきた。
ここで、F.VAN SCHOOTEN が著書『ORGANICA』の中でコントラパラレログラム①を使い楕円を描いていることを紹介し、楕円の定義（ある 2 点からの距離の和が常に一定の点の集まり）を確認した。その後、コントラパラレログラム①の交点 E は楕円を描くことを実際に確認するため、穴埋めの証明をした。

④ まとめ
最後になぜ楕円などの曲線を描く必要があったのか歴史的背景と楕円の定義をもう一度確認して 1 日目の授業を終えた。

2 日目



【図８】Descartes,R の行った双曲線の作図
（『ORGANICA』より）

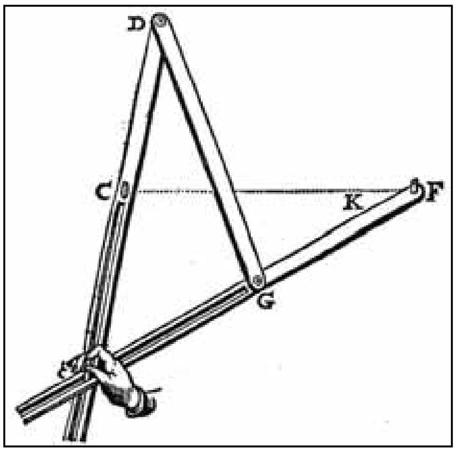
【目標】
1 日目に扱ったコントラパラレログラム①とコントラパラレログラム②の似ている点・違っている点に気づいた上で道具を操作する。

① 1 日目の復習
1 日目の復習として、曲線を描く必要があった歴史的背景、コントラパラレログラム①を利用して楕円が描けること、楕円の定義を確認した。また、Cabri GeometryⅡにて、コントラパラレログラム①が楕円を描くことを示して見せた。２日目で扱う双曲線の定義は「ある 2 点からの距離の差が常に一定の点の集まり」であるので、楕円の定義の確認では､「ある 2 点からの距離の和が常に一定の点の集まり」というように「和」を強調して生徒に印象付けた。

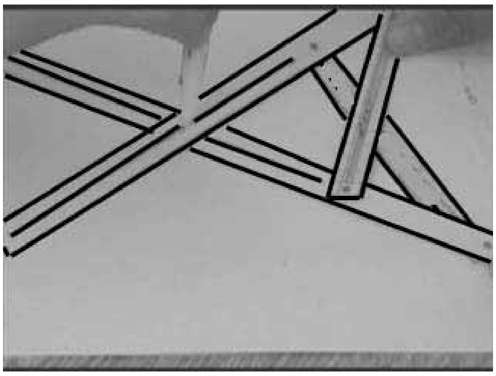
②双曲線の作図法の紹介・双曲線の定義
はじめに図８をスクリーンに提示し､図は何をしているところかという発問をするとすぐに双曲線という答えが出てきた。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.175-185、2005年3月

次に、原典解釈によって双曲線を定義した（ある 2 点からの距離の差が常に一定の点の集まり)。このとき「差」を強調して、楕円の定義に似ていることを示した。



【図９】コントラパラレログラム②
（『ORGANICA』より）



【写真４】双曲線を描く

1 日目の学習と似ている点をクラス全体に意識させ、以下の学習でも似ている点違っている点を探させた。

③ コントラパラレログラム②の組み立て･作図

図９をスクリーンに提示し、何か気づいたことはないかと発問した。

【対話】

授業者：これ見て何か気づいたことある。

生徒：昨日のコントラパラレログラム①に似ている。

次に 1 日目に組み立てたコントラパラレログラム①に延長のパーツを付けたしたものをコントラパラレログラム②とした。1 日目と同様に二人一組になってコントラパラレログラム②を組み立てさせ、どのような動きをするのか実際に動かしてみた。それから、CF を固定したとき、延長パーツの交点εの動きに注目させ、実際にコントラパラレログラム②を使ってワークシート上に交点εの動きを描かせた。

すべての生徒がワークシート上の作業が出来る十分な時間を与えた。このとき授業者は机間巡視しながら、生徒の作業状況を把握し、適宜アドバイスをした。十分な時間が経過した後､交点εの動きをきれいに描くことが出来た生徒を代表として前に出てもらい、実物投影機を使って作図の実演してもらった。

描かれた図形はいったいどのような図形であるか質問したところ､すぐにコントラパラレログラム②によって描かれた図形は双曲線だという答えが出てきた。

ここで、F.VAN SCHOOTEN が著書『ORGANICA』の中でコントラパラレログラム②を使い双曲線を描いていることを紹介して 2 日目の授業を終えた。

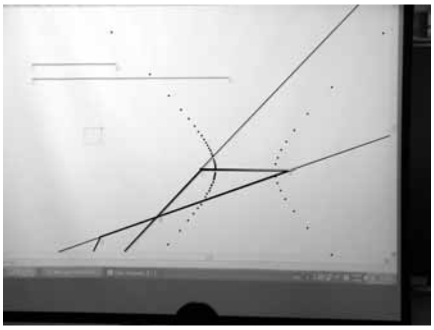
3 日目

【目標】

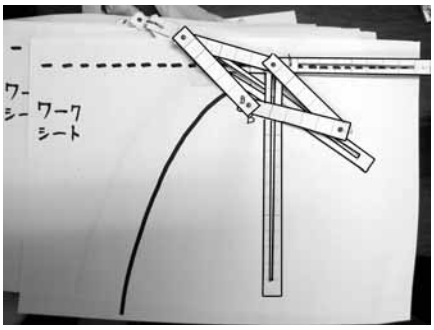
3 日間の道具の変容と道具の持つ役割・歴史的価値・有用性を感じる。

① 双曲線の証明

2 日目にコントラパラレログラム②を使い描いた図が双曲線になっていることを確認す



【写真５】
Cabri GeometoryⅡで確認



【写真６】
ひし形を利用した機構

【写真７】
道具を操作する

【写真８】
二人で協力して作図する

るために穴埋め式の証明をした。また、Cabri GeometryⅡにて、コントラパラレログラム②が双曲線を描くことを示して見せた。

次にコントラパラレログラムの短い辺を固定すると長い辺の交点が楕円を描き、長い辺を固定すると短い辺の延長線の交点が双曲線を描くことを伝え、コントラパラレログラムを使えば固定する辺を変えることで楕円も双曲線も両方とも描けることを説明した。

① 放物線を描く機構の紹介・作図

3 日目で扱う作図器を紹介する前に機構の説明をして、1 日目と 2 日目に使用したコントラパラレログラムも機構であることを伝えた。その後、ひし形を利用した機構をスクリーンに提示し、コントラパラレログラムと同様に楕円と双曲線を描けることを説明した。

次に図 6 を見せ、何をしているところかと問いかけると、すぐに放物線を描いているところという答えが返ってきた。ひし形を利用した機構（写真６）の使い方を、実物投影機を用いて説明し、すでに組み立てあるものを配布した。コントラパラレログラムと比べ構造が複雑であるため、4 人一組でワークシートに放物線を描かせた。

作業時間中に授業者は机間巡視を行い、生徒の活動を観察した。機構が厚紙で作られていることもあり、放物線を描く交点をそのままなぞると厚紙が曲がってしまい、きれいに曲線が描けないので、機構を動かして、そのつど交点の点を打ち、最後にその点を結ぶほうがきれいに曲線を描けることを伝えた。十分な時間を与えた後に、放物線をきれいに描けた生徒一組に代表して、実物投影機を使い、曲線を描いてもらった。その後、原典を用いて、放物線の定義を説明した。

② まとめ

3 日間のまとめとし、曲線を描く必要が出てきた歴史的背景、楕円・双曲線・放物線のそれぞれの定義、コントラパラレログラム、機構の確認をして授業を終えた。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.175-185、2005年3月

６．議論

（１） 課題１に対する議論

課題１：道具のできた歴史的背景を知り、F.VAN SCHOOTEN の**作図器を実際に操作**することで数学を人の営みとして捉え、より興味・関心を持つことや数学的活動の楽しさを感じることができる。

アンケート（授業を通して数学に対するイメージに変化、興味があったもの、感想など）に対する生徒の答え。 ① 物を使って、いろいろな図形を描くことが出来るのはすごい。 ② １日目は楕円の書き方をやっていて初めて知ったので興味が沸いた。 ③ 数学が勉強のための存在だけでなく、人々の生活に必要だったことがわかった。 ④ 昔の人こうやって数学を発展させてきたのかなと思った。 ⑤ 昔の人のやり方を体験できてよかった。

上に挙げたものは生徒のアンケートの記述からの抜粋である。本研究における授業では、曲線作図器の歴史的背景を説明し、実際に道具を使い作図を行った。

①②のでは、作図器を実際操作し、曲線が描けること、曲線の描き方を知り、驚きの中に興味・関心が湧いていることがわかる。また③④⑤からは歴史的背景を学び、体験することで数学の発展や生活との結びつきに興味・関心が示され、特に③では数学を人の営みと捉えていることがわかる。

以上のことより、本研究の授業実践において課題１は達成されたといえる。

（２） 課題２に対する議論

課題２：課題１を通し、作図することで、道具の持つ役割・歴史的価値・有用性を感じることができるか。

アンケート（実際に道具を使ってみてどのように感じましたか、感想等）に対する生徒の答え。 ⑥ 昔の人の知恵もすごいなと思った。本当にきれいにかけた。 ⑦ PC でしか描けないと思っていた曲線が描けることに驚いた。 ⑧ 図形も応用すればいろいろなことに使えると思った。 ⑨ 数学は頭の中だけではなく、道具を使うことも大切だということ。 ⑩ 難しかった。使いこなせなくて残念。

上に挙げたものは生徒のアンケートの記述からの抜粋である。

（１）で挙げた③④⑤からは生徒が道具の歴史的価値を感じていることがうかがえる。また、⑥⑦⑧⑨からは自ら道具を操作し、作図することで道具の持つ役割や有用性を感じることができたと言える。

しかし、⑩の生徒のように道具を扱うことが難しいと感じた生徒も少なくはなかった。

それでも、「使いこなせなくて残念。」というように、道具を使ってみたいという意思は汲み取ることができる。

以上のことより、本研究の授業実践において課題２は達成されたといえる。

７． おわりに

本授業研究は F.VAN SCHOOTEN が著書『ORGANICA』の中で用いている曲線作図器を題材として、実際に操作・作図を行う授業実践を行った。授業においては生徒自身が実際に道具を操作し、作図をすることでどのような図形を描けるかを確認することができ、さらに Cabri GeometryⅡを用いることでうまく作図できなかった生徒も曲線作図器が描く図形をスクリーン上で確認することができた。また、「昔の人の知恵もすごいなと思った。本当にきれいにかけた。」「PC でしか描けないと思っていた曲線が描けることに驚いた。」といった、事後アンケートの回答からもうかがえるように、普段使うことのない道具やテクノロジーを用いた授業を行うことで、生徒はより興味を持って授業に取り組むことができたと言えるだろう。

しかし、その一方で「授業が難しかった。」、「道具がうまく使えなかった。」という生徒の答えもあった。今回の授業を受けた生徒は楕円・双曲線・放物線の定義は未習であったため、原典解釈や証明を難しいと感じる生徒が多かったと思われる。原典解釈や証明は曲線作図器を使うためにも欠かせないところであると同時に、理解することでよりいっそう道具の持つ役割・歴史的価値・有用性を感じることができるものであるので、原典解釈や証明を倦厭されにくいアプローチの仕方を考えなくてはならない。また、道具の材料や組み立て方を吟味することで扱いやすいものを作成することや道具の使用方法の具体的なマニュアルを作ることがあげられる。これらを今後の課題とする。

謝辞

授業研究の実施に際して、私立茗溪学園の永田眞裕先生、島一史先生をはじめ、数学科の諸先生方には、貴重なご助言・ご指導、ならびに多大なるご協力をいただきました。厚くお礼申し上げます。

注）

本研究は、平成 16 年度科学研究費、特定領域研究（2）課題番号 15020214「数学用機械と JAVA による移動・変換と関数・微積ハンズオン教材の WEB 化研究」（研究代表者礒田正美）において開発された歴史的道具を前提にして、平成 16 年度科学研究費、基盤研究（B）（2）課題番号 14380055「数学の文化的視野覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」（研究代表者礒田正美）の一環として行われた。

引用・参考文献

（1）文部省（1999）．中学校学習指導要領．東京：財務省印刷局．

（2）文部省（1999）．中学校学習指導要領（平成 10 年 12 月）解説：数学編．東京：大阪

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.175-185、2005年3月

書籍.
（3）礒田正美・土田知之（2001）．異文化体験を通じて数学の文化的視野の覚醒；数学的活動の新たなパースペクティブ，第 25 回日本科学教育学会年会論文集．497-498.
（4）礒田正美（2003）．なぜ道具を数学教育で活用する必要があるのか：道具を使ってこそ学べる数学の教育的価値を明かすためのパースペクティブ．教育日本数学学会　第 36 回数学教育論文発表会　「課題別分科会」発表集録，246-249.
（5）礒田正美（2001）．異文化体験から見た数学の文化的視野の覚醒に関する一考察ー隠れた文化としての数学間の意識化と変容を求めてー．筑波数学教育研究，20，39-48.
（6）F.VAN SCHOOTEN（1648）．ORGANICA.
（7）Descartes,R（1637）．三宅徳嘉他訳（2001）．デカルト著作集 1 増補版：屈折光学．白水社.
（8）諏佐洋一（2004）．歴史的道具「比例コンパス」を用いた数学的活動による授業研究ーガリレオの軍事的コンパスを題材としてー．中学校・高等学校数学化教育課程開発に関する研究（11）「確かな学力」の育成と道具を用いた数学教育. 筑波大学数学教育学研究室, 83-96
（9）今村幸永（2004）．道具と数学史を用いた解釈学的営みとしての授業研究ーレンズを題材とした円錐曲線の教材開発ー中学校・高等学校数学化教育課程開発に関する研究（11）「確かな学力」の育成と道具を用いた数学教育．筑波大学数学教育学研究室，123-135