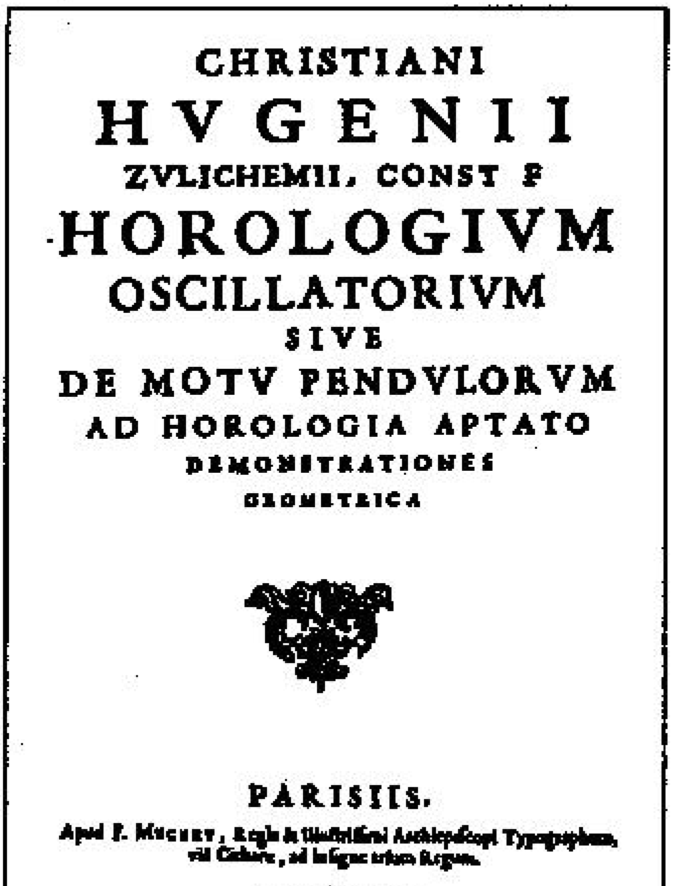
授業資料１時間目

授業資料

『ホイヘンスの数学』

～振子時計を解明しよう！！～


CHRISTIANI
HVGENII
ZVLICHEMII, CONST. F.
HOROLOGIVM
OSCILLATORIVM
SIVE
DE MOTV PENDVLORVM
AD HOROLOGIA APTATO
DEMONSTRATIONES
GEOMETRICAE

PARISIIS,
Apud F. MUGUET, Regis & Illustrissimi Archiepiscopi Typographum, via Citharæ, ad insigne trium Regum.
MDCLXXIII.
CVM PRIVILEGIO REGIS

氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

授業者：筑波大学大学院修士課程教育研究科数学教育コース１年
能登誉光

1、はじめに

ポスターを見て感じたことや不思議に思ったことを書いてみよう。

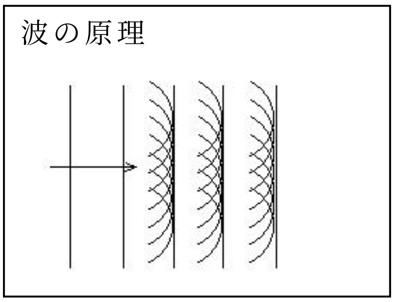
2、人物紹介

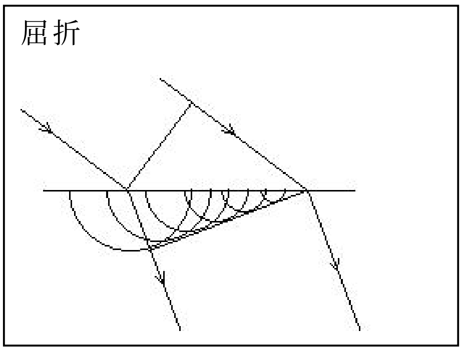
クリスチャン・ホイヘンス
(Christiaan Huygens)は、1629年4月14日にオランダのハーグで生まれ、1695年7月8日に66歳、同地で亡くなった。彼は、*数学者*であり*物理学者*でもあり*天文学者*でもあった。

３、ホイヘンスの業績

・ホイヘンスの原理

平面上を波が伝わっていくとき、これは波面の移動によって行われる。ある時間を経過した後、波面がどの位置まで移動するかを素元波と言う。それらのすべてと接している曲線または曲面が波面である。これをホイヘンスの原理という。(物理ⅠB,啓林館,1993)
この原理で、波の反射や屈折、回折など、**波の進み方を、統一的**に理解することができる。
このことによって 1690 年『光学概論』(光の波動説)を発表。



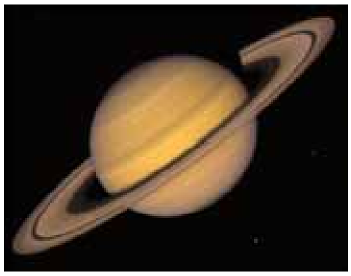


・振子時計

1657 年に振り子時計をつくった。

・土星について

天文学上では、1655 年の自作の望遠鏡を用いて土星の衛星タイタン（Taitan）を発見、また土星の環の存在を結論し、更に新しい観測と理論的追究の末、1659 年「土星の体系」を発表。



・等時曲線

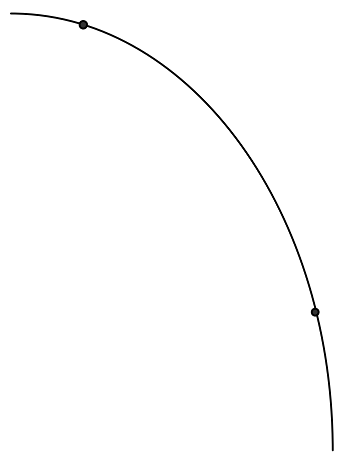
サイクロイドの等時性を発見。

・伸開線と縮閉線の発見

４、伸開線について

Definition Ⅲ
When we consider that a thread or flexible line is laid along curve concave to one side, and when we remove one end from it while the other end of the thread stays on the curve in such a way that the developed part remains taut, then this end of the thread will clearly describe another curve this curve is called an *involute*.

和訳）
定義Ⅲ
我々は、糸や曲げやすい線が凹の曲線に沿って一つの辺に対して置かれることを考え、曲線から一つの端を移す。一方、他方の糸の端は曲線上にとどまる。展開された部分がぴんと張ったままであるとき、そのときこの糸の端は、明らかに別の曲線を描くであろう。そして、この曲線は**伸開線**と呼ばれる。



5、縮閉線について

Definition Ⅳ

The curve, however, along which the thread has been laid may be called the ***evolute***. In the figure ABC is the evolute, ADE the involute of ABC, for if the end of the thread has come from A to D, then the straight part DB of the thread will be taut, while the other part BC still lies along the curve. It is clear that DB is tangent to the evolute at B.

和訳）

定義Ⅳ

しかしながら、糸が置かれているその曲線は**縮閉線**と呼ばれることができる。図１において ABC は縮閉線であり、ADE は ABC の伸開線である。というのは、もし糸の端が A から D にきたならば、そのとき、糸のまっすぐな部分 DB は、ぴんと張ったままだろう。一方、他の BC の部分は、やはり曲線に沿っている。DB が点 B で縮閉線に接するのは、明らかである。

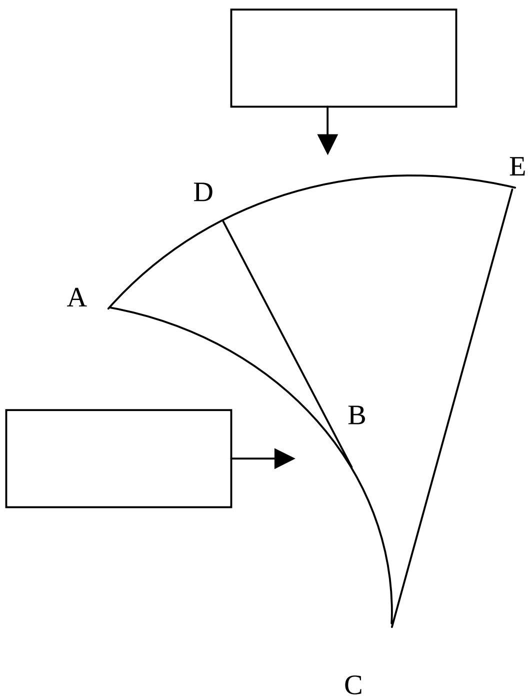


図１

６、伸開線を書いてみよう。

円筒の外周に糸を巻いて、その糸の先に鉛筆をつけます。その鉛筆で糸を緩ませないようにぴんと張った状態を保ちながら、ほどいていくときに、鉛筆が描く曲線が伸開線である。

伸開線を書いてみて何か気付いたことを書いてみよう。

伸開線・・・ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

縮閉線・・・ ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

７、伸開線と縮閉線の性質

Proposition Ⅰ

Every tangent of the eveolute intersects the involute at right angles.

和訳）

命題Ⅰ

全ての縮閉線の接線は、伸開線と直角に交差する。

証明の概要

Let AB[Fig.2]be the evolute, AH its involute. Let the straight line FDC, tangent to curve ADB at D, intersect the curve ACH at C. I claim that it intersects the curve at right angles, that is, if ① we construct on CD the perpendicular CE, then this line should touch the curve ACH at C. Indeed, since the straight line DC is tangent to the evolute at D, it clearly represents the position of the thread at the moment when its end has come to C. When therefore we prove that ② the thread while describing the whole curve ACH can reach the line CE only at the point C, we shall have proved that CE is tangent to the curve ACH at the point C.

和訳）

図２において、ABを縮閉線、AHを伸開線とおきなさい。直線FDCは曲線ADBに点Dで接し、曲線ACHにCで交差する。我々はそれが曲線と直角に交差すると主張する、つまり、もし①CDに対して垂線CE を作図したならば、垂線CEは点Cで曲線ACHに接するべきである。実際、直線DCは点Dで縮閉線に接しているので、それらの端が点Cに来る瞬間に糸の場所が示されるのは明らかである。それゆえに、②全ての曲線ACHを描く間、糸は点Cでのみ線CEに到達することができることを証明でき、CEが点Cで曲線ACHに接することが証明された。

証明の方針

垂線を引く。・・・①

曲線上の他の点で交わらない。・・・②

①②より

$\boxed{}$ ・・・③

接線は、曲線上の１点からただ１個だけ引くことができる。・・・④

③④より

よって、接線ならば垂線である。

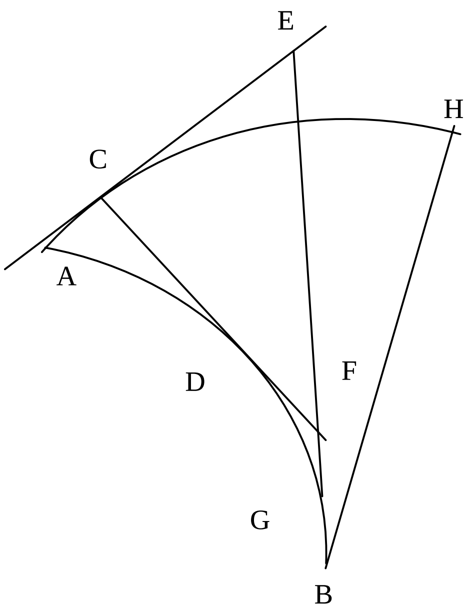


図２

②の証明

Let us take on AC another point H different from C, and let us consider first the case in which H is farther removed than C from the starting point A of the evolution. Let the free part of the thread have the position HG, when its end is at H. The line HG is therefore tangent to the curve AB at G. While the end of the thread describes the arc CH, the thread evolves itself away from arc DG. Hence CD will intersect the line HG if extended beyond D; say at F. Let GH intersect the line CE at E. We then have

$$DF + FG > DG,$$

whether DG be a straight or a curved line. If we add to both sides the straight segment DC, then we obtain

$$CF + FG > CD + DG.$$

In connection with the evolution we have

$$CD + DG = HG.$$

and if we subtract from both aides the segment FG, then we find that

$$CF > HF.$$

But we have

$$FE > FC,$$

since in the triangle FCE the angle C is right. Hence we have fortiori

$$FE > FH.$$

From this it follows that the thread on this side of the point C no longer intersects the line CE.

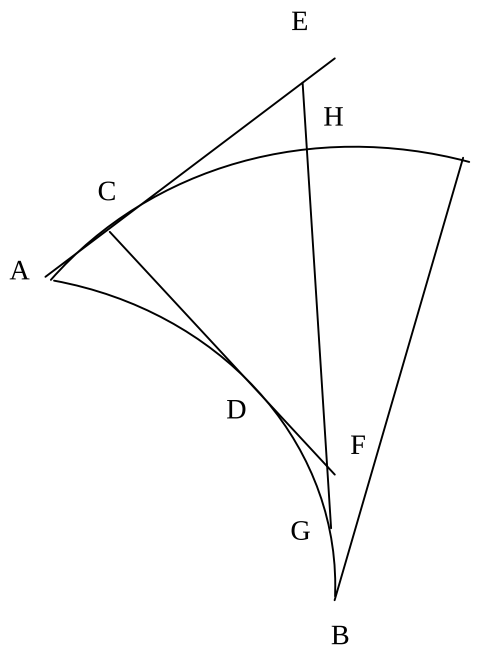


図 2

AC 上に C とは異なる別の点 H を取り、H が縮閉線の始点 A から C よりも離れた場合を始めに考えなさい。HG の端が点 H にあるとき、糸の自由な部分を位置 HG としなさい。そのとき、線 HG は点 G で曲線 AB に接する。糸の端が弧 CH を描くと同時にその糸は、弧 DG から離れる。したがって、もし D 以上に延長されると、CD は線 HG と交差するであろう。その点を F という。GH は点 E で線 CE と交差する。そのとき、

$$DF+FG>DG,$$

DG は直線か曲線のいずれかが成り立つ。もし、両辺にまっすぐな線分 DC を加えたら、そのとき

$$CF+FG>CD+DG$$

を得る。

縮閉線における結合において、

$$CD+DG=HG$$

となる。

そしてもし両辺から線分 FG を引いたら、

$$CF>HF$$

である。

しかし、

$$FE>FC$$

である。

なぜなら三角形 FCE において角 C は垂直であるからである。

したがって我々はなおさら

$$FE>FH$$

をもっている。

これから、点 C のこの側での糸はもはや線 CE とは交差しないということになる。

H が A に対して C より遠い場合

DF＋FG＞ $\boxed{\quad}$

<u>CD＋DF</u>＋FG＞CD＋DG

$\boxed{\quad}$ ＋FG＞CD＋DG・・・(ⅰ)

CD＋DG＝$\boxed{\quad}$ ・・・(ⅱ)

(ⅰ)(ⅱ)より

$\boxed{\quad}$

CF＋FG－FG＞$\boxed{\quad}$－FG

よって

$\boxed{\quad}$

これで曲線上の他の点 H は CE 上で交わらない。

次に

CF>HF・・・(ⅲ)

FE$\boxed{\quad}$FC・・・(ⅳ)

(ⅲ)(ⅳ)より

$\boxed{\quad}$

これで交点が１つである。

これから、点 C のこの側での糸はもはや線 CE とは交差しないということになる。

Now let the point H [Fig.3] be closer to the starting point A than the point C. Let HG be the position of the thread at the moment when its end is at H. Let us draw the lines DG and DH, of which the last one meets the straight line CE at E. It is clear that the straight line DG cannot be on the continuation of HG and that HGD is therefore a triangle. Now, since

$$\overline{DG} \leqq \overset{\frown}{DKG} ,$$

The sign = holding for the case where the part DG of the evolute is straight, we will find, adding GH on both sides, that

$$\overline{DG} + GH \leqq \overset{\frown}{DKG} + GH,$$

or

$$\overline{DG} + GH \leqq DC.$$

But

$$\overline{DH} < DG + GH,$$

Hence DH is a fortiori < DC. But DE > DC, since in triangle DCE the angle C is right. Hence DH is much more < DE. The point H, the end of the thread GH is therefore situated inside the angle DCE. From this it follows that between A and C the end of H never gets as far as CE. Hence CE touches the curve AC at C, so that DC, to which CE has been constructed as a perpendicular, cuts the curve at right angle.　　Q.E.D.

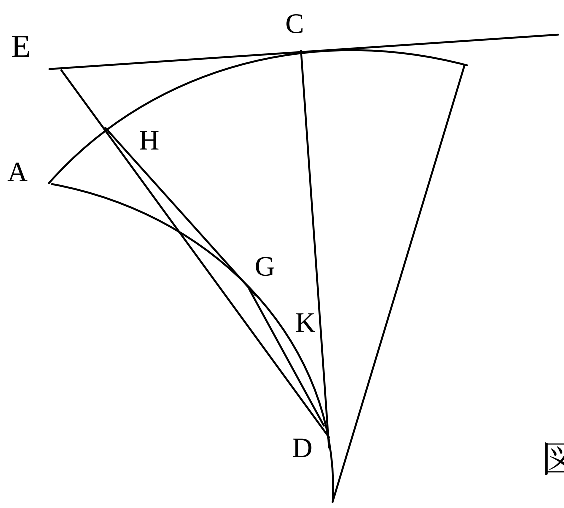


図 3

いま点 H〔図 3〕は点 C より始点 A に近いとする。HG はその端が点 H にある瞬間の糸の位置にあるとする。線 DG と DH を描きなさい、DH は、最後に点 E で直線 CE に合う。直線 DG が HG の延長上でないのは明らかであり、したがって HGD は三角形である。いまゆえに、

$$\overline{DG} \leqq \overset{\frown}{DKG}$$

等式が成立するのは、縮閉線の DG の部分が直線になったときである。
両辺に GH を加えると、

$$\overline{DG} + GH \leqq \overset{\frown}{DKG} + GH$$

あるいは

$$\overline{DG} + GH \leqq DC.$$

しかし、

$$\overline{DH} < \overline{DG} + GH$$

したがって、なおさら DH<DC である。しかし、DE>DC、なぜなら、三角形 DCE において角 C が直角であるからである。したがって、なおさら DH<DE。それゆえに、糸 GH の端である点 H は角 DCE の内部に置かれる。これから、A と C の間で H の端は決して CE まで得られない。したがって、CE は点 C で曲線 AC に触れ、ゆえに、CE が垂直として作図されたために、DC は曲線を垂直に切る。

HがAに対してCより近い場合

$\boxed{\quad\quad} \leqq \overset{\frown}{DKG}$

$\overline{DG} + GH \leqq \underline{\overset{\frown}{DKG} + GH}$

$\overline{DG} + GH \leqq \boxed{\quad\quad}$ ・・・(ⅰ)

$\boxed{\quad\quad} < \overline{DG} + GH$ ・・・(ⅱ)

(ⅰ)(ⅱ)より

$\boxed{\quad\quad}$

これで曲線上の他の点 H は CE 上で交わらない。

次に

DC>DH・・・(ⅲ)

DE$\boxed{\quad}$DC・・・(ⅳ)

(ⅲ)(ⅳ)より

$\boxed{\quad\quad}$

これで交点が 1 つである。

これから、点 C のこの側での糸はもはや線 CE とは交差しないということになる。

8、まとめ

伸開線・・・○糸などを曲線に沿って、ピンと張ったまま、

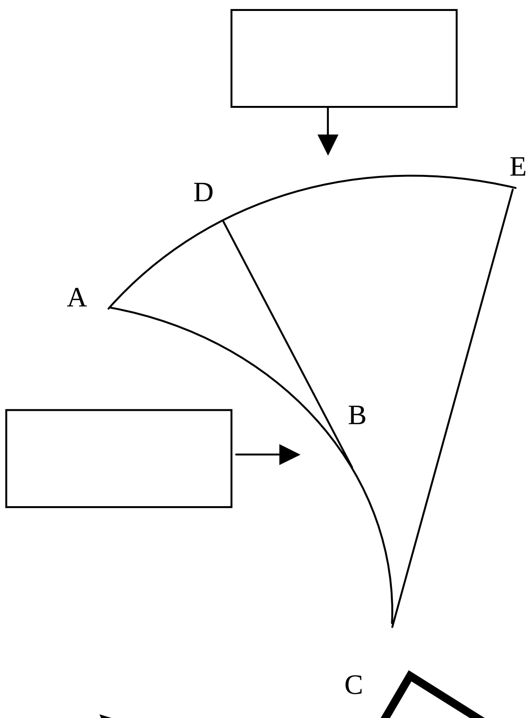
はがしていくときの端の軌跡。

○たくさん存在する。

縮閉線・・・○糸などは、常に縮閉線の接線である。

○ただ１つ存在する。

命題Ⅰ
全ての縮閉線の接線は、伸開線と直角に交差する。



では、いったい伸開線と縮閉線は生活の

どのようなところで使われているのか

考えていこう！！