出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.197-208、2005年3月

振子時計にみられる数学を題材とした授業研究

―ホイヘンスの数学における発展―

筑波大学大学院修士課程教育研究科
能登　誉光

章構成

要約

本研究では、ホイヘンスの振子時計を教材としてホイヘンスが考えた伸開線と縮閉線を原典解釈することによって、生徒が昔の人の考えた数学を知る。さらに振子時計から、社会生活においても数学がさまざまなところに関わり発展してきたことを学習する。そして生徒が身近なものに興味・関心を持つことができ、数学をより身近に感じることを示した。

キーワード：ホイヘンス、振子時計、伸開線、縮閉線

１．はじめに

高等学校学習指導要領解説(1999)では、「数学基礎」の目標において「数学と人間とのかかわりや、社会生活において数学が果たしている役割について理解させ、数学に対する興味・関心を高めるとともに数学的な見方考え方の良さを認識し数学を活用する態度を育てる」である。さらに数学の良さ、数学を学ぶ意味を生徒に伝えたいという考えの下に、「他者の認めた良さを味わうためには、他者の立場になって考えてみる必要がある。」(礒田・土田 2001,p.8、9)つまり、数学を生み出す活動は人によって営まれるため、数学のよさを生徒に伝えるためには生徒が当時の人々の営みを追体験する必要がある。このことを受けて数学史を取り入れた授業の必要性を述べる。この数学史の導入について礒田(2002)は、「数学を生み出す活動は、人によって営まれる。他者の立場に心情を重ねつつ、自らの教訓を導き出そうとする共感に支えられた主体の行為に解釈学的営みは光を当てる。例えば、数学の考えの良さを教えるためにはどうしたらよいか。まずはよさを求めて教材に対する解釈学的営みがなされる。」(礒田,2002p.8:72-78)と述べている。そして「共感と教訓を導く原典解釈機会を取り入れるならば、解釈学的営みを通じて、生徒は自らその数学内容とそれを生み出した人間とのかかわりを知る活動に取り組むことになる。」(礒田 2002,p.8)そのためにも昔の人がどのよ

うに考えたかを理解するためにも、原典解釈をすることによって共感することができるであろう。

さらに「社会生活において数学が果たしている役割について理解させる。」に対して、社会生活において物理などの他教科と関連づけることにより数学の果たしている役割を理解させる。また物理と数学史を扱った先行研究として斉藤(2001)が挙げられる。斉藤は研究の意図として、数学と他教科との関連性、特に、数学史を利用した授業実践を例に、数学と物理との関連性に焦点を当てて考え、その結果、数学史を利用した授業は生徒の持つ数学のイメージをよい方向に変容させると共に、数学に対する興味・関心、学習意欲を高め、また、物理を取り入れた数学の授業は生徒に「数学」「物理」は個別のものではなく、お互いに関わりのあるものであると認識させることができた。

筆者は本研究において、ホイヘンスの数学と振子時計という物理学を考えることにより「文化や社会生活において数学が果たしている役割」に気づくことができるのではないかと考えた。そして今回の授業では、題材として、ホイヘンスが考えた振子時計について取り上げ、それを用いて数学的活動を中心に授業を行った。

２．研究目的・研究方法

（１）研究目的

社会生活において数学が果たしている役割について理解させ、数学に対する興味･関心を高めるとともに数学的な見方考え方の良さを認識し数学を活用する態度を育てる。

目的達成のため、以下を課題とする。

課題 1

時代が変わっていくことによりまわりも変化していくが、数学もまた変化・発展していくのか。現代の数学と昔の数学の違いについても原典解釈から定義や命題の証明などを行ってみる。

課題 2

生徒の数学に対する考え方、特に身近なことに関して数学が役に立っているかについて、意識の変化は生まれるか。

（２）研究方法

数学史とそれにちなんだオリジナルの教材、授業の事前・事後に行ったアンケート、各授業での生徒の感想、授業を撮影したビデオを基づき考察する。

３．「ホイヘンスと振子時計」の教材化

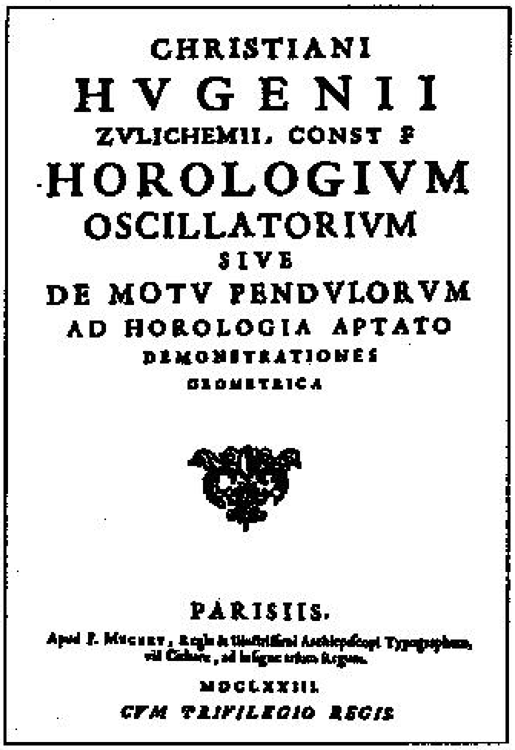
本研究では、上記の 2 つの研究課題を達成するためにホイヘンスと振子時計についての教材化を行った。Die Pendeluhr Horologium oscillatorium,Christiaan Huygens を原典とし struik,A source book in mathematics の英訳に基づいて授

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.197-208、2005年3月

業を進めていった。

まず基となる数学を何にするのか決め、原典に準ずるものがあるものを探してくる。ここでは、struik,A source book in mathematics を英訳原典とし調べていった。ホイヘンスにおいて彼は数学者でもあり物理学者でもありまた天文学者でもあった。ホイヘンスといえばホイヘンスの原理が一番有名であると思われ、物理の波動においては、とても重要な役割を果たしている。ホイヘンスにとって次に有名な業績がこの振子時計であると思われる。そのため振子時計を教材として考えていった。振子時計を解明するにあたってまずは、ホイヘンスが考えた伸開線と縮閉線を十分に理解する必要がある。そしてそれらの性質を証明し、理解していくことになる。授業の中でも生徒が伸開線を書いたり、原典解釈などの活動行うことにより受身の授業にならないように工夫する。基本となる伸開線と縮閉線が学習することができたならば、振子時計の解明に移る。そこでガリレオ・ガリレイの発見した等時性（振動する振子の振幅が大きくても小さくても、周期すなわち１往復に要する時間は同一であるということ。）の説明をし、サイクロイドに着目したホイヘンスの考えに注目する。サイクロイドの性質を紹介していくなかでも、伸開線と縮閉線の考えを使いサイクロイドの伸開線がサイクロイドになるということを学ぶ。ここでも原典解釈やサイクロイドの伸開線についても生徒が活動すること重点におく。そしてサイクロイドが等時曲線であることを物理に関連させながら教えていく。サイクロイド振子の完成となる。しかしそれでも振子時計はうまく機能しないこと、等時性の問題ではないのだが、そこで脱進機（「脱進機」は時計に使われている振子などは、そのままにしておくとだんだんとその動きが弱くなって、止まってしまう。だから、ほんの少しの力を、振子などにあたえつづけて、そのうえ正しい

Christiaan Huygens

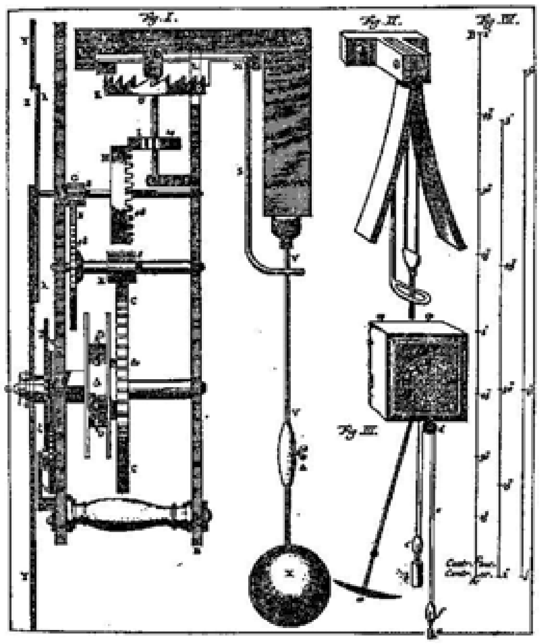


CHRISTIANI
HVGENII
ZVLICHEMII, CONST F.
HOROLOGIVM
OSCILLATORIVM
SIVE
DE MOTV PENDVLORVM
AD HOROLOGIA APTATO
DEMONSTRATIONES
GEOMETRICA

PARISIIS.
MDCLXXIII.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

『振子時計』初版本の表紙

速度で動くようにする働きをしているのが「脱進機」である。）の紹介し、そしてそこにも歯車としてまたサイクロイドや伸開線が使われていることを生徒に教える。さらに時間があれば歯車について授業を進めていくことができればさらに生徒の理解が深まる。歯車にも数学と物理の関係があり、いっそう、社会生活において数学が果たしている役割について生徒が理解し、数学に対する興味・関心を高めるとともに数学的な見方考え方の良さを認識し数学を活用する態度を育てるのに役に立つであろう。



サイクロイド振子時計

４.「ホイヘンスと振子時計」の数学的解説

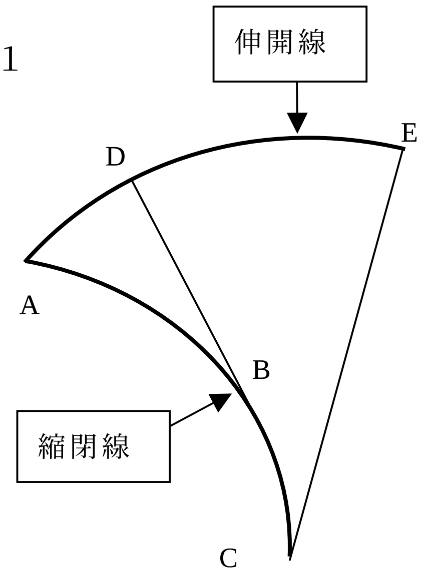
定義Ⅲ

我々は、糸や曲げやすい線が凹の曲線に沿って一つの辺に対して置かれることを考え、曲線から一つの端を移す。一方、他方の糸の端は曲線上にとどまる。展開された部分がぴんと張ったままであるとき、そのときこの糸の端は、明らかに別の曲線を描くであろう。そして、この曲線は伸開線と呼ばれる。

定義Ⅳ

しかしながら、糸が置かれているその曲線は縮閉線と呼ばれることができる。図１において ABC は縮閉線であり、ADE は ABC の伸開線である。というのは、もし糸の端が A から D にきたならば、そのとき、糸のまっすぐな部分 DB は、ぴんと張ったままだろう。一方、他の BC の部分は、やはり曲線に沿っている。DB が点 B で縮閉線に接するのは、明らかである。

図１



出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.197-208、2005年3月

命題Ⅰ

全ての縮閉線の接線は、伸開線と直角に交差する。

証明の一部

H が A に対して C より遠い場合

DF＋FG＞DG

CD＋DF＋FG＞CD＋DG

CF＋FG＞CD＋DG・・・(ⅰ)

CD＋DG＝HG　　・・・(ⅱ)

(ⅰ)(ⅱ)より

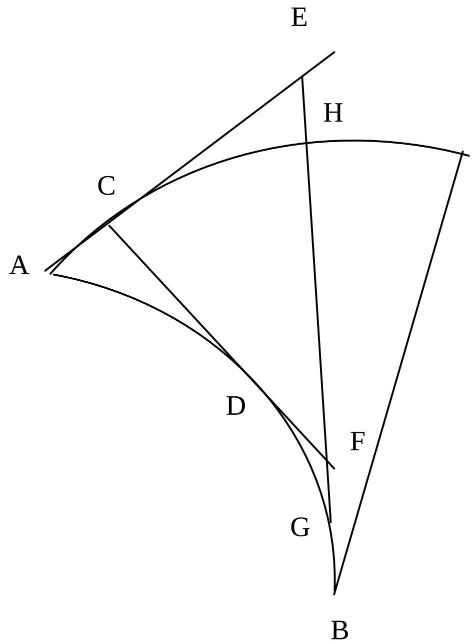
CF+FG＞HG

CF＋FG－FG＞HF＋FG－FG

よって

CF>HF

これで曲線上の他の点 H は CE 上で交わらない。



次に

CF>HF・・・(ⅲ)

FE＞FC・・・(ⅳ)

(ⅲ)(ⅳ)より

FE>HF

これで交点が１つである。

これから、点 C のこの側での糸はもはや線 CE とは交差しないということになる。

命題Ⅴ

サイクロイド AEF に延びているこの接線はサイクロイド AEF と直角に交わると主張する。

証明

AG//BH・・・①

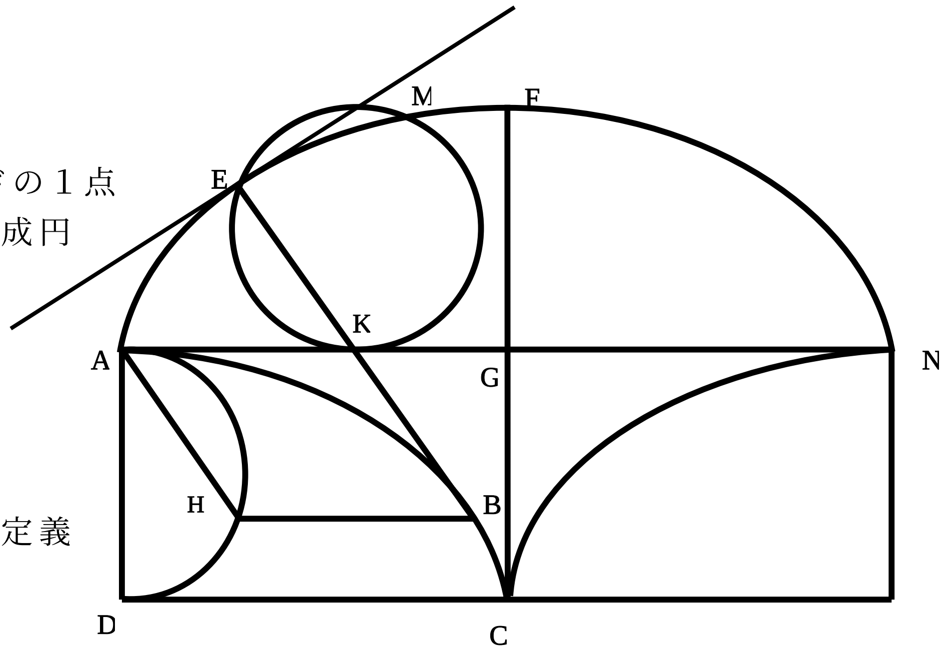
HA//BK(サイクロイドの１点から接線を引くと生成円の頂点を通るより)・・・②

①②より

AHBK は、平行四辺形・・・③

③とサイクロイドの定義より

AK＝HB＝弧 AH…④



③より　BKE//AH
したがって　∠EKA=∠KAH
このことから　弧 KE＝弧 AH・・・⑤
④⑤より　AK＝弧 EK・・・⑥
⑥とサイクロイドの定義より
点 E は、サイクロイド AEF 上にある。
サイクロイド上の点 E から接線を引くと性質１より
接線は生成円の頂点を通る。・・・⑦
⑦と円の直径の性質より
サイクロイド AEF に延びているこの接線はサイクロイド AEF と直角に交わることが証明できた。

５.「ホイヘンスと振子時計」の授業概要

（１）授業環境

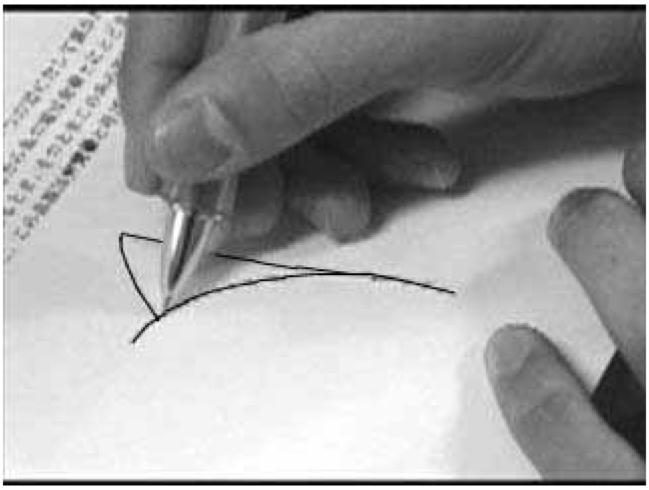
日時：平成 16 年 12 月 20 日、22 日（90×2）
対象：筑波大学附属高等学校２年生（３名）
準備：コンピュータ（Windows)、Microsoft Power Point、作図ツール（Cabri GeometryⅡ）糸、筒、サイクロイドの木材、授業記録用のデジタルビデオカメラ、事前・事後アンケート、授業テキスト

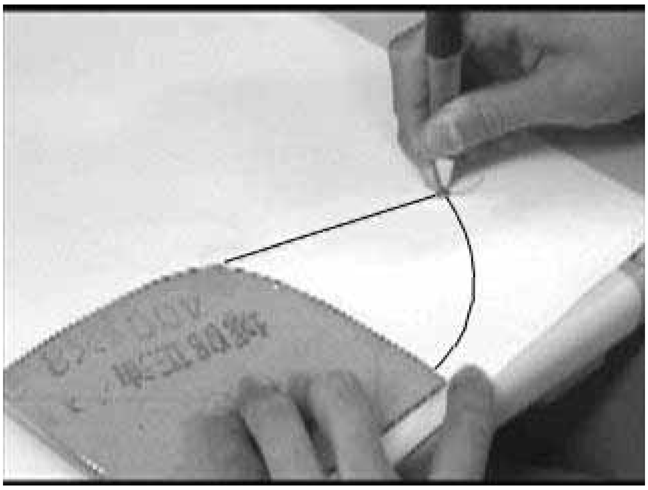
（２）授業展開

＜１時間目＞
【目標】
ホイヘンスの数学的考え方を理解し、伸開線と縮閉線の定義を原点から読み取り証明していく。このことにより昔の人の考え方や証明の仕方を学習することによって、今と昔でも証明の方法は異なるけれど証明の結論は、同じであることを知る。そして昔の人の考えを共有し数学のよさを理解する。そのために、まず基本となることを十分に行う。そして次の授業へ助けとする。
【授業概要】
まず導入として本研究と関係のある身近なものを見せ何か感じたことや思ったことを何でもいいので書いて発表する。次にホイヘンスの人物紹介とともにホイヘンスの業績についてふれ、有名なホイヘンスの原理や振子時計などの紹介をし、伸開線と縮閉線についても紹介していく。
Die Pendeluhr Horologium oscillatorium,


原典に興味を示す生徒

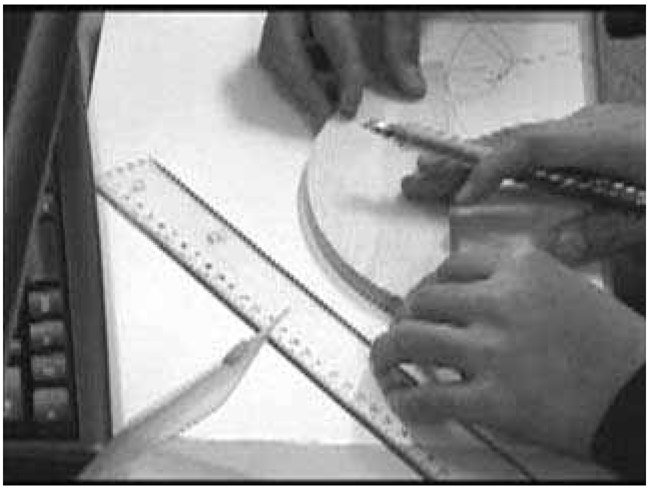
出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.197-208、2005年3月


伸開線の原典解釈


双曲線の伸開線を書く生徒

Christiaan Huygens を原典とし伸開線と縮閉線の定義を理解することから始まり、言葉だけでは、分かりにくいので、Microsoft Power Point や Cabri GeometryⅡを使って図形を取り入れ、動かし、なるべく生徒に分かりやすくゆっくりと進めていった。
そして、生徒が伸開線と縮閉線を理解するために、伸開線を実際に書く。円、放物線、双曲線の伸開線を書き、書くにあたって何か気付いたことを発言する。例えば書き始める場所や糸の長さの違いなどによって伸開線はどのような違いがあるのか聞いてみる。伸開線と縮閉線の性質について原典から命題Ⅰを取り出し証明をしていく。ここでは、幾何学的に証明を進めていくのではじめにどのように証明を進めていくのか、方針を立てて証明をしていく。そして、場合分けをして考えていき、まず証明するべき問題の図の紹介は、生徒と一緒にやっていく。その後は、図を見て生徒に証明を説かせてみる。ヒントとして原典の英訳と日本語訳を載せて置く。その後、答えを聞いていくがなぜそのような答えになるのか答えだけでなく、理由も聞いていくことにする。そうすることによって生徒の理解をより深いものにしていく。時間があった場合は、場合分けのもう一つのほう解く。本研究では、時間があったため生徒にもう一つのほうも問題を解き前問と同じように答え合わせをしていった。
最後に１時間目のまとめをし、では、いったい伸開線と縮閉線はどのようなところで使われているのか２時間目に考えていくことで１時間目は終わる。
＜２時間目＞
【目標】
１時間目に学習した知識を応用していき振子時計について解明していく。その中で振子時計の問題を解決していくにあたって数学が使われて発展していくこと知る。振子時計の完成に大いに数学が役に立っていることを学習する。そして最後には、日常のさまざまな場所にも数学が使われていることを理解する。

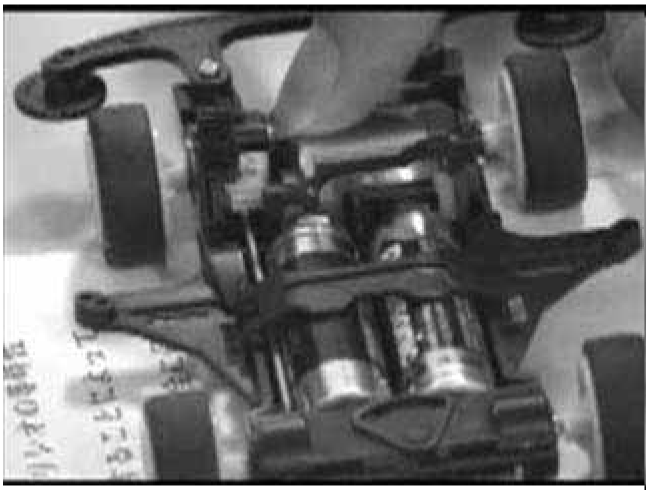
【授業概要】
はじめに１時間目の復習から入り、１時間目に学習したことがどのようなところに使われているか考えていく。
2時間目は、特に振子時計について考えていく。振子時計に等時性が使われていることを紹介し、ガリレオ・ガリレイが等時性について発見したことを学習する。しかし、ガリレオ・ガリレイは等時性の性質に問題が生じしかも失明したため振子時計をうまく作ることができなく、そこでホイヘンスがサイクロイドを使った振子を考えはじめる。
サイクロイドについては、生徒が未既習のためどういうものなのか定義から教える。そしてサイクロイドの性質を調べていく。１時間目に学習した伸開線と縮閉線を利用してサイクロイドの伸開線を書いて調べてみる。次に縮閉線について考えることによって伸開線も理解することができる。よって縮閉線を考える。さらにサイクロイドの性質として
性質１　サイクロイドの１点から接線を引くと生成円の頂点を通る。
ことを証明し、原典から命題Ⅴを理解することにする。これも証明の方針を生徒と一緒に考えていき、命題Ⅰのとき同様考えていく。この証明の中にサイクロイドの性質 1 を使って考える。そして命題Ⅰと命題Ⅴよりサイクロイドの伸開線がサイクロイドになるということが分かる。本当にサイクロイドの伸開線がサイクロイドになるのか生徒自身が書いて確かめる。


サイクロイドの伸開線がサイクロイドになるのを確かめる生徒

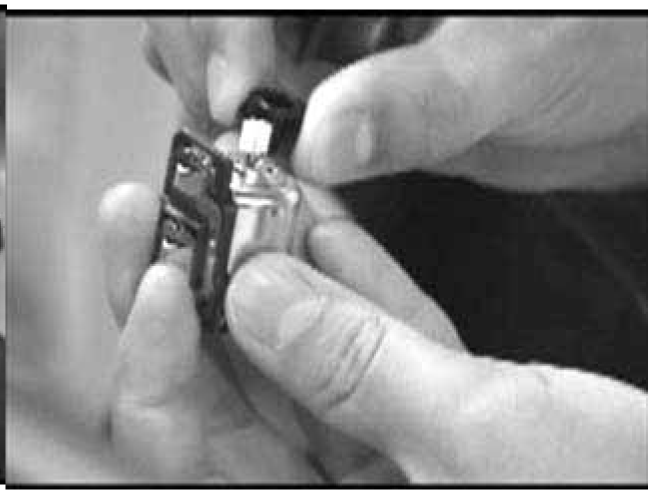
次にサイクロイドの等時性について、考える。ホイヘンスはサイクロイドと円運動のお互いの垂直方向成分を上手く比較、利用してサイクロイドについての等時性を解明していく。ここでは、多少、物理の知識が必要となるので分かりやすく丁寧に教えた。ここでサイクロイドの等時性が証明されたことによってホイヘンスはサイクロイド振子の完成となる。
しかし、ホイヘンスのサイクロイド振子時計は動くには動いたものの、設計のために採用した数理は非常に巧妙だったが、空気抵抗などを無視することはできず、誤差が蓄積するのを防ぐことはできなかった。最終的には、振子の非等時性の問題は、振子そのものを改良するのではなく、脱進機に一定の往復運動を与える動力源を用いることによって解決された。安定した動力源が、振子が一定の振幅で触れるようにすることによって、振動の周期を一定に保つことができた。
そして脱進機のところに歯車が使われていることの紹介をし、歯車の歯もまたサイクロイドや伸開線が使われていること、なぜそれらがそのようなところに使わ

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.197-208、2005年3月

れているのか、伸開線の性質や歯車の性質から説明する。このようにして振子時計は完成し、振子時計の製造過程にはたくさんの科学の研究や数学の発展が知ることができた。



モーターの歯車の説明



実際に確かめる生徒

最後に１時間目の授業のはじめに導入として見せたもの(６．議論の図 1、2、3)をもう一度示しどのようなところにどんな数学があるのか生徒に聞いてみる。そして他にも時計や車の模型を分解してみせることにより、より身近なものに触れさせ数学は身近なところに密接に関係しているということの紹介で授業を終わりとする。

６．議論

（１）課題１に対する議論

課題 1

時代が変わっていくことによりまわりも変化していくが、数学もまた変化・発展していくのか。現代の数学と昔の数学の違いについても原典解釈から定義や命題の証明などを行ってみる。

アンケートの結果より

数学は今まで発展・進歩してきたと思いますか？といいう質問に

事前：そう思わない。

理由：あるものを発見してきただけで発展してきたわけではないと思う。

事後：そう思う。

理由：先人の考えを受けて、さらに新しいものを発見してきたことも一種の発展であると思う。

上の回答のように生徒は、授業を受ける前と受けた後では、変容が見られる。

昔の数学を知ることは、必要だと思いますか？といいう質問に

事前：そう思う。

理由：・今のものを考えるのに昔のものを知っておくのは不可欠だと思う。
・今も昔も本質はそこまで変化してないと思う。

・昔を知れば自然に今のことも分かると思う。

事後：そう思う。

理由：・身近なものが多くの研究を受けて完成してきたのだと知ることができるから。

・ 歯車などの、現在でも使うものにもホイヘンスが考えたことが使われているから。

事前では、昔の数学を知ることの大切さを理解はしてはいるが、事後のほうがさらに具体的に身近なものなどに対する考えの理解が生徒たちに授業を受ける前よりいっそう深まったといえる。

授業に対する生徒の感想

＜事後アンケートより＞

・振子時計はただ振子の性質を使っただけではないと分かったし、とわかったことがおおかった。
・学校の授業ではなかなか知らないようなことも知ることができ、日常生活との関わりもわかる。
・昔の人は、今のように多くの定理がなくても多く工夫をこらして証明していった。
・自分の知らないことに興味が持てた。

アンケートからも分かるように授業を通して生徒自身は、数学が発展しているものだとわかり、さらに数学は昔と今を結びつけて考えることができた。現代のいたるところに数学が使われていることが授業を受ける前より理解していることがわかった。

（２）課題２に対する議論

課題 2

生徒の数学に対する考え方、特に身近なことに関して数学が役に立っているかについて、意識の変化は生まれるか。

授業はじめに右の図見せそれらについて聞いてみる。

【対話】

T：これらの図はどのような数学があるか？
何か共通のものはないかな？

S1：ちょっと分かりません。

T：何か気がついたことでもいいよ。

S2：分かりません。

T：じゃーこれからこれらには、どのような数学があるのか勉強して授業の最後には

図１

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.197-208、2005年3月

どれにどんな数学が関係しているのか分かるようになろう。

授業の最後

【対話】

T：(授業のはじめに見せた図を見せて)
じゃー最後にこれらの数学はどういうところに使われているのかはじめは分からなかったけど…これはなに？(図１)

S1：歯車で歯のところに使われている。

T：これは？(図２)

S2：振子時計の振子

T：これは？(図 3)

S3：円の伸開線

というふうに授業のはじめと終わりでは生徒が持つ身近な数学に対する考え方が変わってきたことがわかる。

図３

図２

７．おわりに

本研究では、「文化や社会生活において数学が果たしている役割」について生徒に十分伝えることができたと思う。文化においては、数学史や原典解釈をすることによって昔の人の考えを共有することができ数学のよさを分かち合い、社会生活においても数学がさまざまなところに関わっていて発展してきたことを生徒は理解した。そして身近なものになるべく興味を持たせることができ、数学をより身近に感じていただけたのではないかと思う。

また数学と振子時計のように他教科を取り入れた数学の授業は生徒に、数学はさまざまなものに関係しているということ認識させることもできた。

しかしながら数学をただ単に教えるのではなくこういった他教科との関わり合いをもっと持って数学だけではなく他教科と連携していくことが今後の課題でもある。

謝辞

研究授業の実施に際して、筑波大学附属高等学校の川崎宣昭先生には、多大なるご協力と御指導をいただきました。ここに厚く御礼申し上げます。

注)
本研究は、平成１６年度科学研究費、特定領域研究(2)課題番号 15020214「数学用機械と.JAVA による移動･変換と関数･微積ハンズオン教材の WEB 化研究」(研究代表者礒田正美)において開発された歴史的道具を前提にして、平成１６年度科学研究費、基盤研究(B)(2)課題番号 14380055「数学の文化的視野覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」(研究代表者礒田正美)の一環として行われた。

引用・参考文献

１） 文部省(1999).*高等学校指導要領解説 数学編 理数編*.東京.実教出版.

２） 礒田正美(2002).解釈学から見た数学的活動の展開ー人間の営みを構想する数学教育学へのパースペクティブー.*筑波数学教育研究.21.pp.1-10*

３） 礒田正美･土田知之(2001).異文化体験を通しての数学の文化的視野の覚醒;数学的活動の新たなパースペクティブ,*第 25 回日本科学教育学会年会論文集.497-498*

４） 齋藤康則(2002).他教科との関連を踏まえた数学史の授業実践ーBrachistochroneProb1em を題材にー.筑波大学数学教育研究室,中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(9),pp262-275

５） Die Pendeluhr Horologium oscillatorium(1913)

６） struik,A source book in mathematics.pp263-269

７） Simon G.Gindikin(1996).ガリレオの１７世紀 ガリレオ、ホイヘンス、パスカルの物語(三浦信夫 訳).pp90-121.シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社

８） 原亨吉(1978).クリスチャン･ホイゲンス 誕生 350 周年に寄せて;科学の実験.第 29 巻,8,9,10 号.共立出版

９） Ernest Zebrowski,jr(1999).円の歴史ー数と自然の不思議な関係ー(松浦俊輔).pp173-194.株式会社河出書房新社

１０） 原亨吉(1989).科学の名著 第Ⅱ期 10(20)ホイヘンス.朝日出版社

１１） マイケル・S・マホーニィ(1982).歴史おける数学(佐々木力訳).pp183-246.株式会社勁草書房

１２） 林憲二(1995).等時性、最速降下線、サイクロイド振り子;数理科学 NO.387,SWPTEMBER1995.pp79-83０