

# 授業資料

クロススタッフによる測量

(3時間目)



授業者：御子柴 俊一

(筑波大学大学院修士課程教育研究科1年)

2年 組 番

氏名

### 3 日目

#### 0 . 前回の復習

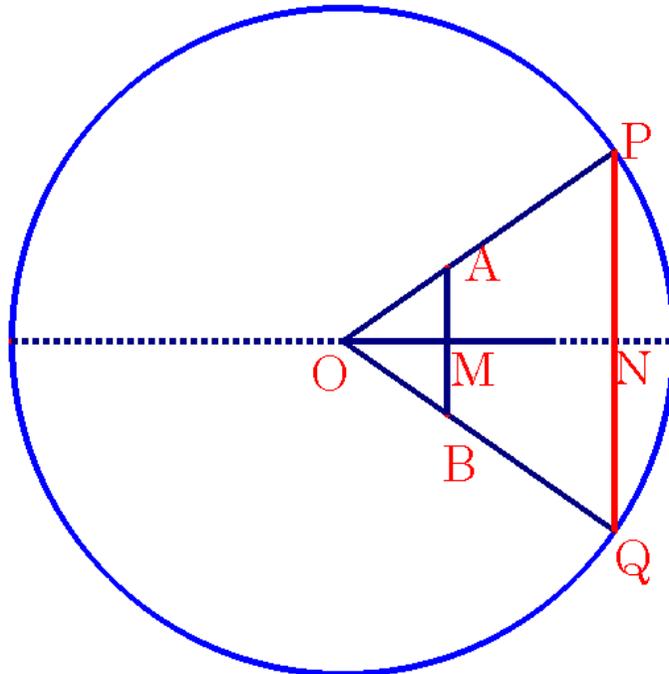
2 時間目で、クロススタッフを使って 2 の星の観測者を中心とした大円上での中心角を測る方法を調べた。

クロススタッフで 2 つの星を見て、2 つの星がプレートの端にちょうどあたるところまで、プレートを動かす。

のときのスタッフの目盛りが、観測者の目から何 unit か (OM の長さ) を記録する。

三平方の定理を使って、目から、プレートの端までの距離 (corrected radius、すなわち OA の長さ) を計算する。

で計算した半径 (corrected radius) での 2 つ星の間の長さ (プレートの幅、AB の長さ) が、同じ中心角で半径  $OP=60\text{unit}$  としたときにはいくらになるか計算する。すなわち PQ の長さを求める。この結果が corrected chord である。



corrected chord の小数点以下を 60 進法で表し、弦の表で近い値を探す。

以上から、2 つの星が通る大円上の中心角、すなわち、観測者と 2 つの星それぞれを結んだ線分のなす角を求めることができる。

### 平方根の計算

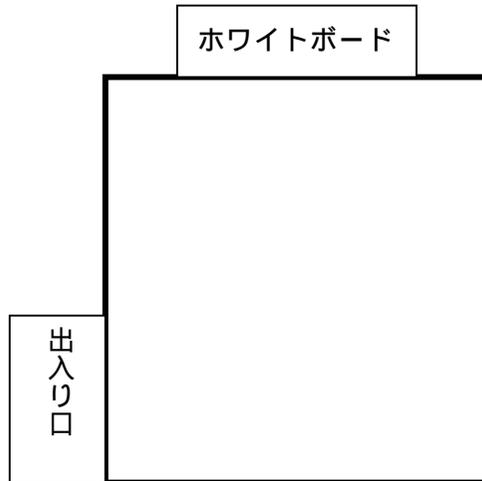
(1)  $\sqrt{13}$

(2)  $\sqrt{88209}$

## 1. クロススタッフによる角度の測定

Levi ben Gerson の方法で角度を測ってみよう。

### (1) 観測者の位置



(2) 観測者の目からプレートまでの距離 \_\_\_\_\_ unit

### (3) corrected radius の計算

プレートの半分の長さ・・・ \_\_\_\_\_ unit

corrected radius を  $R$  とすると、

$$R^2 = ( \quad )^2 + ( \quad )^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

開平法を使って  $R$  を求める。(小数第 3 位まで計算し、四捨五入して小数第 2 位まで求めよう。)

$R$  の計算

$R =$  \_\_\_\_\_ unit

(4)corrected chord の計算

半径( $R =$ ) \_\_\_\_\_ unit のときの弦の長さが 16unit だ  
から、半径を 60unit としたときの弦の長さ(corrected chord)  
を  $C$  とすると(小数第 1 位まで)、

$C =$  \_\_\_\_\_

C の小数点以下を 60 進法で表すと \_\_\_\_\_

(5) C に近い弦を、弦の表から探すと、\_\_\_\_\_ ° ' と、  
\_\_\_\_\_ ° ' の間で、\_\_\_\_\_ ° ' の方が近い。

以上から、測った角度は \_\_\_\_\_ ° '

弦 の 表

弧	弦	差の 1/50	弧	弦	差の 1/50
0° 30'	0° 31' 25"	0° 1' 2" 50"	23° 0'	23° 55' 27"	0° 1' 1" 33"
1 0	1 2 50	0 1 2 50	23 30	24 26 13	0 1 1 30
1 30	1 34 15	0 1 2 50	24 0	24 56 58	0 1 1 26
2 0	2 5 40	0 1 2 50	24 30	25 27 41	0 1 1 22
2 30	2 37 4	0 1 2 48	25 0	25 58 22	0 1 1 19
3 0	3 8 28	0 1 2 48	25 30	26 29 1	0 1 1 15
3 30	3 39 52	0 1 2 48	26 0	26 59 38	0 1 1 11
4 0	4 11 16	0 1 2 47	26 30	27 30 14	0 1 1 8
4 30	4 42 40	0 1 2 47	27 0	28 0 48	0 1 1 4
5 0	5 14 4	0 1 2 46	27 30	28 31 20	0 1 1 0
5 30	5 45 27	0 1 2 45	28 0	29 1 50	0 1 0 56
6 0	6 16 49	0 1 2 44	28 30	29 32 18	0 1 0 52
6 30	6 48 11	0 1 2 43	29 0	30 2 44	0 1 0 48
7 0	7 19 33	0 1 2 42	29 30	30 33 8	0 1 0 44
7 30	7 50 54	0 1 2 41	30 0	31 3 30	0 1 0 40
8 0	8 22 15	0 1 2 40	30 30	31 33 50	0 1 0 35
8 30	8 53 35	0 1 2 39	31 0	32 4 8	0 1 0 31
9 0	9 24 51	0 1 2 38	31 30	32 34 22	0 1 0 27
9 30	9 56 13	0 1 2 37	32 0	33 4 35	0 1 0 22
10 0	10 27 32	0 1 2 35	32 30	33 34 46	0 1 0 17
10 30	10 58 49	0 1 2 33	33 0	34 4 55	0 1 0 12
11 0	11 30 5	0 1 2 32	33 30	34 35 1	0 1 0 8
11 30	12 1 21	0 1 2 30	34 0	35 5 5	0 1 0 3
12 0	12 32 36	0 1 2 28	34 30	35 35 6	0 0 59 57
12 30	13 3 50	0 1 2 27	35 0	36 5 5	0 0 59 52
13 0	13 35 4	0 1 2 25	35 30	36 35 1	0 0 59 48
13 30	14 6 16	0 1 2 23	36 0	37 4 55	0 0 59 43
14 0	14 37 27	0 1 2 21	36 30	37 34 47	0 0 59 38
14 30	15 8 38	0 1 2 19	37 0	38 4 36	0 0 59 32
15 0	15 39 47	0 1 2 17	37 30	38 34 22	0 0 59 27
15 30	16 10 56	0 1 2 15	38 0	39 4 5	0 0 59 22
16 0	16 42 3	0 1 2 13	38 30	39 33 46	0 0 59 16
16 30	17 13 9	0 1 2 10	39 0	40 3 25	0 0 59 11
17 0	17 44 14	0 1 2 7	39 30	40 33 0	0 0 59 5
17 30	18 15 17	0 1 2 5	40 0	41 2 33	0 0 59 0
18 0	18 46 19	0 1 2 2	40 30	41 32 3	0 0 58 54
18 30	19 17 21	0 1 2 0	41 0	42 1 30	0 0 58 48
19 0	19 48 21	0 1 1 57	41 30	42 30 54	0 0 58 42
19 30	20 19 19	0 1 1 54	42 0	43 0 15	0 0 58 36
20 0	20 50 16	0 1 1 51	42 30	43 29 33	0 0 58 31
20 30	21 21 12	0 1 1 48	43 0	43 58 49	0 0 58 25
21 0	21 52 6	0 1 1 45	43 30	44 28 1	0 0 58 18
21 30	22 22 58	0 1 1 42	44 0	44 57 10	0 0 58 12
22 0	22 53 49	0 1 1 39	44 30	45 26 16	0 0 58 6
22 30	23 24 39	0 1 1 36	45 0	45 55 19	0 0 58 0

弦 の 表

弧	弦	差の 1/10	弧	弦	差の 1/10
45° 30'	46 24' 19"	00 0' 57" 54"	68° 0'	67° 6' 12"	00 0' 52" 1"
46 0	46 53 16	0 0 57 47	68 30	67 32 12	0 0 51 52
46 30	47 22 9	0 0 57 41	69 0	67 58 8	0 0 51 43
47 0	47 51 0	0 0 57 34	69 30	68 23 59	0 0 51 33
47 30	48 19 47	0 0 57 27	70 0	68 49 45	0 0 51 23
48 0	48 48 30	0 0 57 21	70 30	69 15 27	0 0 51 14
48 30	49 17 11	0 0 57 14	71 0	69 41 4	0 0 51 4
49 0	49 45 48	0 0 57 7	71 30	70 6 36	0 0 50 55
49 30	50 14 21	0 0 57 0	72 0	70 32 3	0 0 50 45
50 0	50 42 51	0 0 56 53	72 30	70 57 26	0 0 50 35
50 30	51 11 18	0 0 56 46	73 0	71 22 44	0 0 50 26
51 0	51 39 42	0 0 56 39	73 30	71 47 56	0 0 50 16
51 30	52 8 0	0 0 56 32	74 0	72 13 4	0 0 50 6
52 0	52 36 16	0 0 56 25	74 30	72 38 7	0 0 49 56
52 30	53 4 29	0 0 56 18	75 0	73 3 5	0 0 49 46
53 0	53 32 38	0 0 56 10	75 30	73 27 58	0 0 49 36
53 30	54 0 43	0 0 56 3	76 0	73 52 46	0 0 49 26
54 0	54 28 44	0 0 55 55	76 30	74 17 29	0 0 49 16
54 30	54 56 42	0 0 55 48	77 0	74 42 7	0 0 49 6
55 0	55 24 36	0 0 55 40	77 30	75 6 39	0 0 48 55
55 30	55 52 26	0 0 55 33	78 0	75 31 7	0 0 48 45
56 0	56 20 12	0 0 55 25	78 30	75 55 29	0 0 48 34
56 30	56 47 54	0 0 55 17	79 0	76 19 46	0 0 48 24
57 0	57 15 33	0 0 55 9	79 30	76 43 58	0 0 48 13
57 30	57 43 7	0 0 55 1	80 0	77 8 5	0 0 48 3
58 0	58 10 38	0 0 54 53	80 30	77 32 6	0 0 47 52
58 30	58 38 5	0 0 54 45	81 0	77 56 2	0 0 47 41
59 0	59 5 27	0 0 54 37	81 30	78 19 52	0 0 47 31
59 30	59 32 45	0 0 54 29	82 0	78 43 38	0 0 47 20
60 0	60 0 0	0 0 54 21	82 30	79 7 18	0 0 47 9
60 30	60 27 11	0 0 54 12	83 0	79 30 52	0 0 46 58
61 0	60 54 17	0 0 54 4	83 30	79 54 21	0 0 46 47
61 30	61 21 19	0 0 53 56	84 0	80 17 45	0 0 46 36
62 0	61 48 17	0 0 53 47	84 30	80 41 3	0 0 46 25
62 30	62 15 10	0 0 53 39	85 0	81 4 15	0 0 46 14
63 0	62 42 0	0 0 53 30	85 30	81 27 22	0 0 46 3
63 30	63 8 45	0 0 53 22	86 0	81 50 24	0 0 45 52
64 0	63 35 25	0 0 53 13	86 30	82 13 19	0 0 45 40
64 30	64 2 2	0 0 53 4	87 0	82 36 9	0 0 45 29
65 0	64 28 34	0 0 52 55	87 30	82 58 54	0 0 45 18
65 30	64 55 1	0 0 52 46	88 0	83 21 33	0 0 45 6
66 0	65 21 24	0 0 52 37	88 30	83 41 4	0 0 44 55
66 30	65 47 43	0 0 52 28	89 0	84 6 32	0 0 44 43
67 0	66 13 57	0 0 52 19	89 30	84 28 54	0 0 44 31
67 30	66 40 7	0 0 52 10	90 0	84 51 10	0 0 44 20

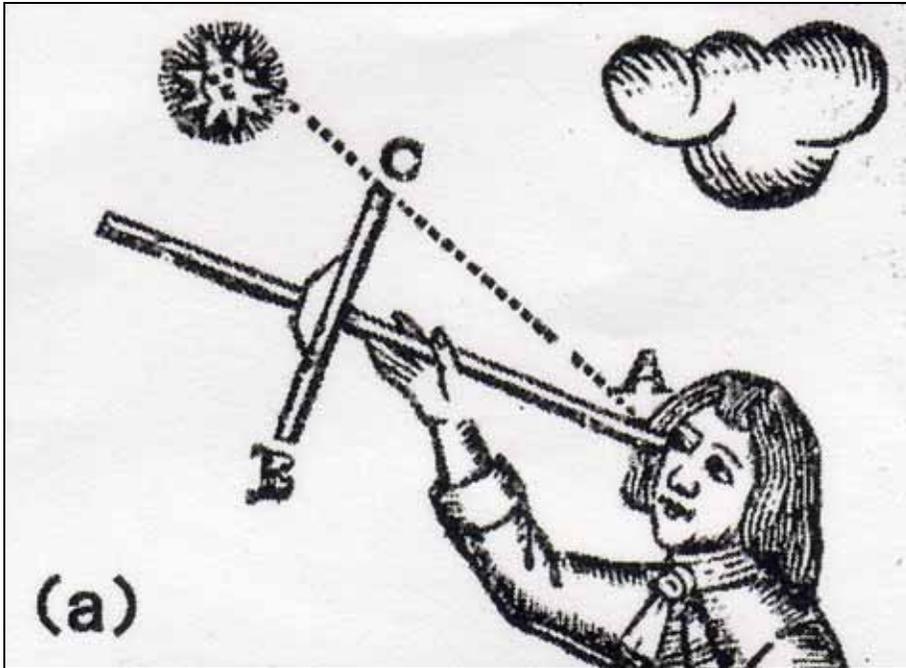
弦 の 表

弧	弦	差の 1/10	弧	弦	差の 1/10
90° 30'	85° 13' 20"	00 0' 44" 8"	111° 0'	100° 3' 59"	00 0' 34" 34"
91 0	85 35 24	0 0 43 57	113 30	100 21 16	0 0 34 20
91 30	85 57 23	0 0 43 45	114 0	100 38 26	0 0 34 6
92 0	86 19 15	0 0 43 33	114 30	100 55 28	0 0 33 52
92 30	86 41 2	0 0 43 21	115 0	101 12 25	0 0 33 39
93 0	87 2 42	0 0 43 9	115 30	101 29 15	0 0 33 25
93 30	87 24 17	0 0 42 57	116 0	101 45 57	0 0 33 11
94 0	87 45 45	0 0 42 45	116 30	102 2 33	0 0 32 57
94 30	88 7 7	0 0 42 33	117 0	102 19 1	0 0 32 43
95 0	88 28 24	0 0 42 21	117 30	102 35 22	0 0 32 29
95 30	88 49 34	0 0 42 9	118 0	102 51 37	0 0 32 15
96 0	89 10 39	0 0 41 57	118 30	103 7 44	0 0 32 0
96 30	89 31 37	0 0 41 45	119 0	103 23 44	0 0 31 46
97 0	89 52 27	0 0 41 33	119 30	103 39 37	0 0 31 32
97 30	90 13 15	0 0 41 21	120 0	103 55 23	0 0 31 18
98 0	90 33 55	0 0 41 8	120 30	104 11 2	0 0 31 4
98 30	90 54 29	0 0 40 55	121 0	104 26 34	0 0 30 49
99 0	91 14 56	0 0 40 42	121 30	104 41 59	0 0 30 35
99 30	91 35 17	0 0 40 30	122 0	104 57 16	0 0 30 21
100 0	91 55 32	0 0 40 17	122 30	105 12 26	0 0 30 7
100 30	92 15 40	0 0 40 4	123 0	105 27 30	0 0 29 52
101 0	92 35 42	0 0 39 52	123 30	105 42 26	0 0 29 37
101 30	92 55 38	0 0 39 39	124 0	105 57 14	0 0 29 23
102 0	93 15 27	0 0 39 26	124 30	106 11 55	0 0 29 8
102 30	93 35 11	0 0 39 13	125 0	106 26 29	0 0 28 54
103 0	93 54 47	0 0 39 0	125 30	106 40 56	0 0 28 39
103 30	94 14 17	0 0 38 47	126 0	106 55 15	0 0 28 24
104 0	94 33 41	0 0 38 34	126 30	107 9 27	0 0 28 10
104 30	94 52 58	0 0 38 21	127 0	107 23 32	0 0 27 56
105 0	95 12 9	0 0 38 8	127 30	107 37 30	0 0 27 40
105 30	95 31 13	0 0 37 55	128 0	107 51 20	0 0 27 25
106 0	95 50 11	0 0 37 42	128 30	108 5 2	0 0 27 10
106 30	96 9 2	0 0 37 29	129 0	108 18 37	0 0 26 56
107 0	96 27 47	0 0 37 16	129 30	108 32 5	0 0 26 41
107 30	96 46 24	0 0 37 3	130 0	108 45 25	0 0 26 26
108 0	97 4 56	0 0 36 50	130 30	108 58 38	0 0 26 11
108 30	97 23 20	0 0 36 36	131 0	109 11 44	0 0 25 56
109 0	97 41 38	0 0 36 23	131 30	109 24 42	0 0 25 41
109 30	97 59 49	0 0 36 9	132 0	109 37 32	0 0 25 26
110 0	98 17 54	0 0 35 56	132 30	109 50 15	0 0 25 11
110 30	98 35 52	0 0 35 42	133 0	110 2 50	0 0 24 56
111 0	98 53 43	0 0 35 29	133 30	110 15 18	0 0 24 41
111 30	99 11 27	0 0 35 15	134 0	110 27 39	0 0 24 26
112 0	99 29 5	0 0 35 1	134 30	110 39 52	0 0 24 10
112 30	99 46 35	0 0 34 48	135 0	110 51 57	0 0 23 55

弦 の 表

弧	弦	差の 1/10	弧	弦	差の 1/10
135° 30'	111° 3' 54"	0° 0' 23" 40"	158° 0'	117° 47' 43"	0° 0' 11" 51"
136 0	111 15 44	0 0 23 25	158 30	117 53 39	0 0 11 35
136 30	111 27 26	0 0 23 9	159 0	117 59 27	0 0 11 19
137 0	111 39 1	0 0 22 54	159 30	118 5 7	0 0 11 3
137 30	111 50 28	0 0 22 39	160 0	118 10 37	0 0 10 47
138 0	112 1 47	0 0 22 24	160 30	118 16 1	0 0 10 31
138 30	112 12 59	0 0 22 8	161 0	118 21 16	0 0 10 14
139 0	112 24 3	0 0 21 53	161 30	118 26 23	0 0 9 58
139 30	112 35 0	0 0 21 37	162 0	118 31 22	0 0 9 42
140 0	112 45 48	0 0 21 22	162 30	118 36 13	0 0 9 25
140 30	112 56 29	0 0 21 7	163 0	118 40 55	0 0 9 9
141 0	113 7 2	0 0 20 51	163 30	118 45 30	0 0 8 53
141 30	113 17 25	0 0 20 36	164 0	118 49 56	0 0 8 37
142 0	113 27 44	0 0 20 20	164 30	118 54 15	0 0 8 20
142 30	113 37 54	0 0 20 4	165 0	118 58 25	0 0 8 4
143 0	113 47 26	0 0 19 49	165 30	119 2 26	0 0 7 48
143 30	113 57 50	0 0 19 33	166 0	119 6 20	0 0 7 31
144 0	114 7 37	0 0 19 17	166 30	119 10 6	0 0 7 15
144 30	114 17 15	0 0 19 2	167 0	119 13 44	0 0 6 59
145 0	114 26 46	0 0 18 46	167 30	119 17 13	0 0 6 42
145 30	114 36 9	0 0 18 30	168 0	119 20 34	0 0 6 26
146 0	114 45 24	0 0 18 14	168 30	119 23 47	0 0 6 10
146 30	114 54 31	0 0 17 59	169 0	119 26 52	0 0 5 53
147 0	115 3 30	0 0 17 43	169 30	119 29 49	0 0 5 37
147 30	115 12 22	0 0 17 27	170 0	119 32 37	0 0 5 20
148 0	115 21 6	0 0 17 11	170 30	119 35 17	0 0 5 4
148 30	115 29 41	0 0 16 55	171 0	119 37 49	0 0 4 48
149 0	115 38 9	0 0 16 40	171 30	119 40 13	0 0 4 31
149 30	115 46 29	0 0 16 24	172 0	119 42 28	0 0 4 14
150 0	115 54 40	0 0 16 8	172 30	119 44 35	0 0 3 58
150 30	116 2 44	0 0 15 52	173 0	119 46 35	0 0 3 42
151 0	116 10 40	0 0 15 36	173 30	119 48 26	0 0 3 26
151 30	116 18 28	0 0 15 20	174 0	119 50 8	0 0 3 9
152 0	116 26 8	0 0 15 4	174 30	119 51 43	0 0 2 53
152 30	116 33 40	0 0 14 48	175 0	119 53 10	0 0 2 36
153 0	116 41 4	0 0 14 32	175 30	119 54 27	0 0 2 20
153 30	116 48 20	0 0 14 16	176 0	119 55 38	0 0 2 3
154 0	116 55 28	0 0 14 0	176 30	119 56 39	0 0 1 47
154 30	117 2 28	0 0 13 44	177 0	119 57 32	0 0 1 30
155 0	117 9 20	0 0 13 28	177 30	119 58 18	0 0 1 14
155 30	117 16 4	0 0 13 12	178 0	119 58 55	0 0 0 57
156 0	117 22 40	0 0 12 56	178 30	119 59 24	0 0 0 41
156 30	117 29 8	0 0 12 40	179 0	119 59 44	0 0 0 25
157 0	117 35 28	0 0 12 24	179 30	119 59 56	0 0 0 9
157 30	117 41 40	0 0 12 7	180 0	120 00 00	0 0 0 0

## 2. 太陽の高度



太陽の高度は、上の絵でいうと、どの角度だろう。

この方法で測ると何か問題はないだろうか？

そこで Levi は…、

[1] You should know that we can use this instrument for accurate observations of the altitude of the Sun, Moon, or any star that is seen on the meridian, and this is very useful for our subsequent investigations. [2] For this we must make fixed legs for the staff to stand on the ground, two legs in the middle and two at the end near the eye.

あなた方は、我々がこの道具を、\*子午線上に見える太陽や月や星の高度の正確な観測のために使えて、これが我々の後の研究に非常に役に立つということを知るべきである。このために、我々はスタッフを地上に立つように固定された脚を作らなければならない。2本の脚を真ん中に置き、2本の脚を目に近い端に置く。

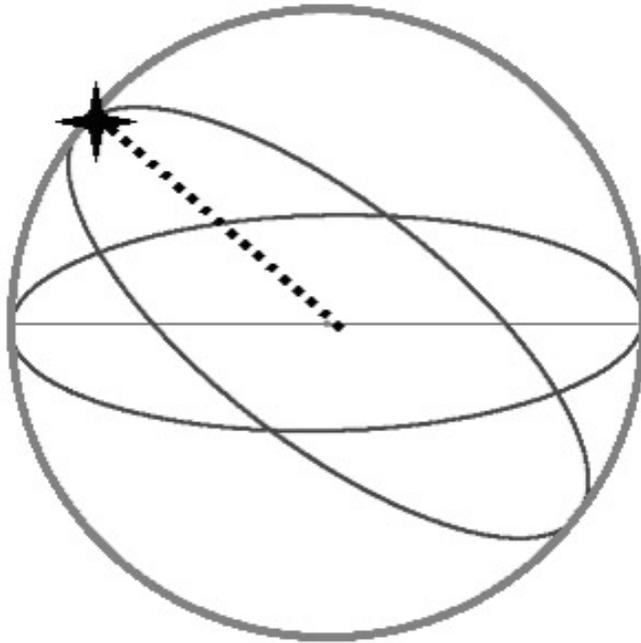
さらに、

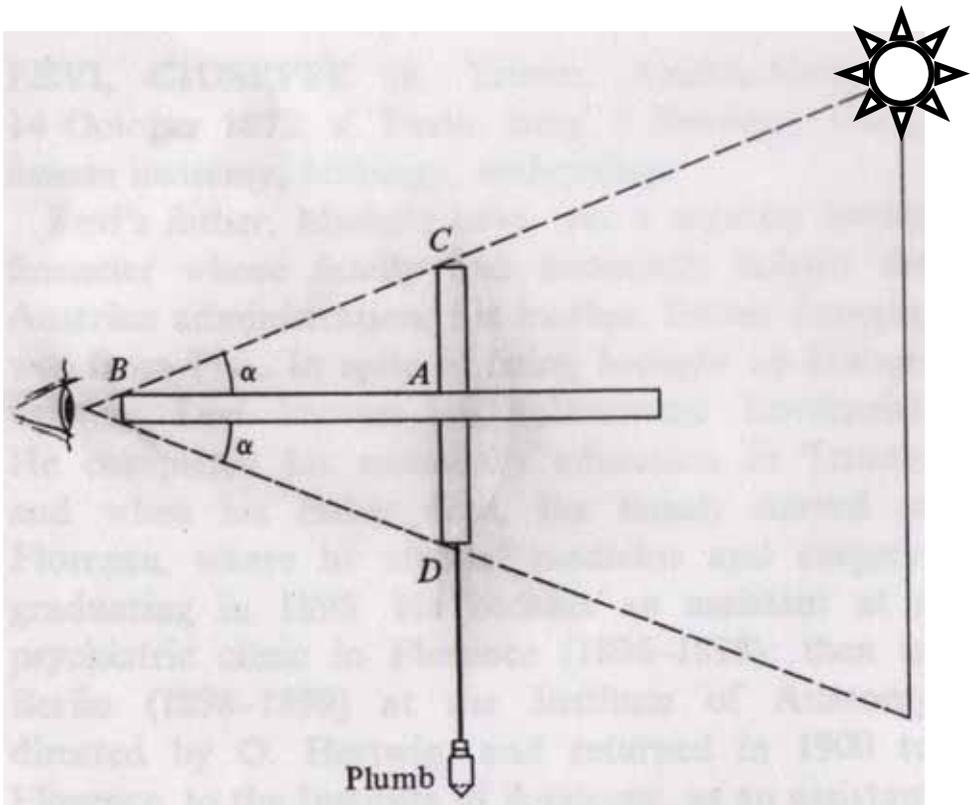
[7] The staff should be parallel to the plane of the horizon when we introduce the staff through the plate, and the plumb-line (*anakh*) is placed at the middle of the top of the plate such that the plumb-bob falls on the middle of the plate.

我々がスタッフをプレートに通すとき、スタッフは地平面に平行であるべきである。そのために、振り子糸を、おもりがプレートの真ん中にくるようにプレートの一番上の真ん中に設置する。

\*子午線...ある地点の天頂と天の北極と南極とを通過する天球上の大円

子午線高度...天体が子午線を通過するときの高度。その天体の極大高度。南中高度。





上の図のように、スタッフを水平に向けて固定する。  
 太陽が BC の延長線上にあるとすると、このとき unit の目盛りから計算して求められる角度  $2\alpha$  の半分が太陽の高度  $\alpha$  となる。

### 3. まとめ

3時間の授業を通して、クロススタッフによる長さや角度の測り方、その中で使われている数学について探究してきた。この道具は、細い棒に目盛りをつけて、板に通しただけの単純な道具だが、John Davis が 1594 年に書いた「船乗りの秘密」の中で、この計器によればいかなる不確かさも含まれないとし、「船乗りにとっては、クロススタッフにかわる他のいかなる計器もありえない」とまで述べている。単純なのに不確かさが無いのは、この道具の中に数学が活かされているからである。

(参考資料)

角度をより正確に知りたいときは、corrected radius、corrected chord を計算する桁数を増やし、2 ページの で弦の表を用いて corrected chord に近い値を探したあと、「差の 1/30」の欄を使う。例えば、弦の長さが、 $15^{\text{p}}20'10''$  と計算されたとすると、角度は  $14^{\circ}30'$  と  $15^{\circ}$  の間であると弦の表から読み取れる。このとき、 $15^{\circ}$  のときの「差の 1/30」は  $0^{\text{p}}1'2''17'''$  となっている。これは、 $14^{\circ}30'$  と  $15^{\circ}$  の間では、平均すると角度が  $1'$  増加すると、弦の長さが  $1'2''17'''$  増加するということを示している。計算結果の  $15^{\text{p}}20'10''$  と  $14^{\circ}30'$  のときの弦の長さ  $15^{\text{p}}8'38''$  の差は、

$$15^{\text{p}}20'10'' - 15^{\text{p}}8'38'' = 11'32''$$

となり、これを差の 1/30 で割る。

$$11'32'' = 11 \times 3600 + 32 \times 60 = 41520'''$$

$$1'2''17''' = 1 \times 3600 + 2 \times 60 + 17 = 3737'''$$

より、 $41520 \div 3737 = 11.11 = 11'6''36'''$  となる。したがって、弦の長さが  $15^{\text{p}}20'10''$  のときの角度は、

$$14^{\circ}30' + 11'6''36''' = 14^{\circ}42'$$

となる。