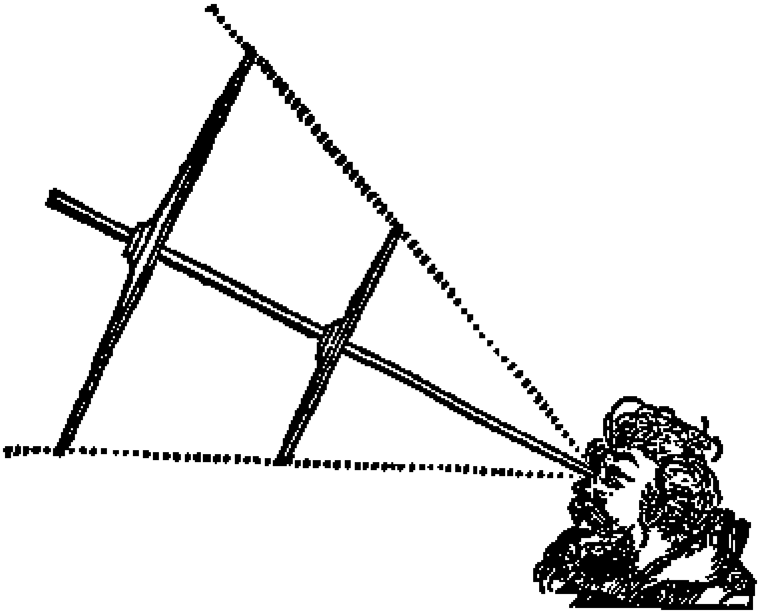
授業資料

クロススタッフによる測量

（2 時間目）

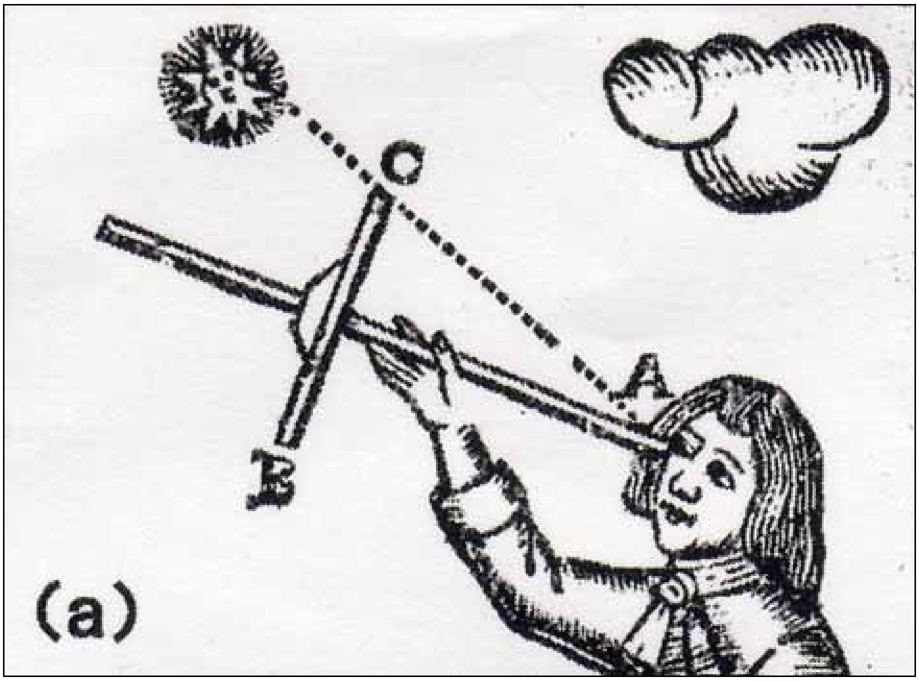


授業者：御子柴　俊一
（筑波大学大学院修士課程教育研究科 1 年）

2 年　　組　　番
氏名

2 日目

０．はじめに



前回の授業でも見た、この絵をもう一度見てみよう。

前回の授業の中では、「太陽の高さを測っているのではないか」、「太陽の高度を測っているのではないか」などの意見が出ていた。

前回の授業では、クロススタッフで長さを測った。

今日は角度について調べていこう！

１．クロススタッフの作り方

クロススタッフについてフランスの天文学者 Levi ben Gerson が 1328 年に初めて記述した。その原典の英語訳を読んで解釈してみよう。

[3] This is the way to make it: we take a straight (*yashar*) staff 6 spans (*zeratot*) in length making sure that its surface is plane (*yashar*), and it should be one digit wide for its entire length. [4] At one end we put a small plate (*luaḥ*) carved (*ḥaquq*) in such a way that there protrude from it two pegs distant from one another by a little more than one digit, such that one peg is placed in one corner (*ma'aq*) of the eye that is observing, and the other peg fall on the other corner of that eye without pressing on the eye. [5] When you follow these instructions, it will happen that the distance from the center of vision inside the head of the observer, to the surface of the plate adjacent to the eye is $\frac{1}{20}$ of a span for most people, as we determined by experiment (*baḥannu*) with much diligence and effort. [6] We divide the staff into large units [*lit.*: degrees] such that there are 8 units in a span, and we mark them on the length [*lit.*: breadth] of the staff from one end to the other. [7] Begin the units on the staff from the place of the center of vision which is beyond the staff by about $\frac{1}{20}$ of a span. [8] Therefore, the first unit that is adjacent to the eye will be such that when it is combined with $\frac{1}{20}$ of a span it will be equal to the other units, and we write them down there in this way.

これからクロススタッフの作る方法を紹介する。表面が平らであり、長さを 6span 分取ったスタッフを使う。その幅は、1digit とする。スタッフの片方の端に 2 本の釘がはみでていて、1 つの釘は、観察している目の目頭に合わせ、もう 1 つの釘は、目に押し付けないように目尻に合わせるので、その釘の間の距離は 1digit より少しだけ長いような方法で、刻まれた小さなプレートを置く。それらの説明に従うと、観察者の頭の中にある視覚の中心から目に近づけているプレートの表面までの距離は、我々の勤勉さと努力を伴った実験結果により、ほとんどの人たちにとって 1/20span である。我々は、スタッフを 1span が 8unit になるような大きな unit で分けていく。そして、端から端までのスタッフ上に、目盛をとっていく。スタッフ上の unit は、スタッフから 1/20span 分越えた視覚の中心から始める。ゆえに、目に近い側の最初の unit は、span の 1/20 分とつなげると他の

unit と等しくなる。このような方法で書いていく。

スタッフの長さは？

スタッフの幅は？

最初の unit が他と比べて 1/20unit 小さいのはなぜ？

[9] Then we divide each unit on one side into 6 equal parts, but on the other side we divide each of them into 12 equal parts. [10] We draw a diagonal line from the beginning of the unit line to the end of the first part of the line that is divided into 12 equal parts. [11] Then we draw a diagonal from the end of that part to the end of the first part of the line on which the unit was divided into 6 equal parts, and from the end of this part to the end of the third part on the line divided into 12 parts, and from the end of the third part to the end of the second part of those equal to a sixth of a unit and from the end of the second part to the end of the fifth part of those divided into twelfths of a unit, and so on for each and every unit on the staff. [12] All these diagonal lines bound $\frac{1}{12}$ of a unit which is 5 minutes.

それから、それぞれのunitの片側は 6 つの等しい部分に分けられ、もう片方の側は 12 の等しい部分に分けられる。我々は、unitの始めから、12 個に分けた最初の部分の端へ対角線を引く。それから、6 個の部分に分けた、最初の部分の端に対角線を引く。そこから、12 個に分けた方の３番目の部分の端に対角線を引き、そこから 6 個に分けた 2 番目の部分へ、そこから、12 個に分けた方の 5 番目へ、などと書いていき、スタッフのそれぞれのunitに同じようにかく。すべての対角線はunitの 12 分の 1 ずつ跳ね返っていき、それは5minuteである。

下線部：5minute

当時は、数値を 60 進法で表していた。1 の 60 分の 1 を minute、その 60 分の 1 を second、さらにその 60 分の 1 を third と読んだ。ここでいう 5minute とは、unit の 60 分の 5、すなわち 12 分の 1 という意味である。

[14] If you divide into five parts the breadth of the staff that is divided into units for its entire length, the diagonal lines will be divided into 5 equal parts that each bound 1 minute of a unit on the staff.

[15] We then make many plates such that each one has a round hole in the middle of it; the staff should go through it with pressure (*doḥaq*), but we should be able to move the plate about it in any desired direction. [16] There should be then a plate whose size is 24 units of the units on the staff such that its upper surface is above the staff by the same amount that the center of vision is above (*govah*) the staff. [17] Similarly, we should have plates of 16 units, 8 units, 4 units, and 2 units,

長さ全体に対し unit に分けられたスタッフの幅を 5 つの部分に分けると、対角線は、それぞれがスタッフ上の 1unit の 1minute を境とする 5 つの等しい部分に分けられる。

我々はそれから、真ん中に穴を空けた、たくさんのプレートを作る。スタッフはその穴に、押し付けられて通るようにする。しかし我々は、あらゆる求められた方向にプレートが動かせるようにすべきである。それから、スタッフ上の unit の 24unit 分の大きさのプレートを、スタッフの表面から、視覚の中心と同じ高さだけ上に出るようにおくべきである。同様に、16unit,8unit,4unit,2unit のプレートがあるべきである。

３．クロススタッフの使い方

[22] We bring the pegs as near to the eye as possible and then we bring the plate nearer to, or farther from, the eye until we see from the top [*lit.*: head of the upper surface] of the plate on one side one star and on the other side the second star such that the two stars touch this plate at its two ends according to the observation.

我々は釘を目にできるだけ近づけ、プレートの上の表面から見て、片方の端が１つの星に、2 番目の星が逆側に、2 つの星が観察者によって、このプレートにさわるように、プレートを目から近づけたり遠ざけたりする。

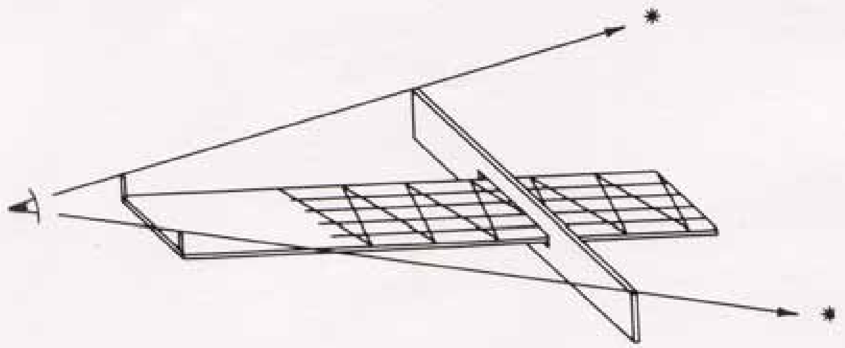
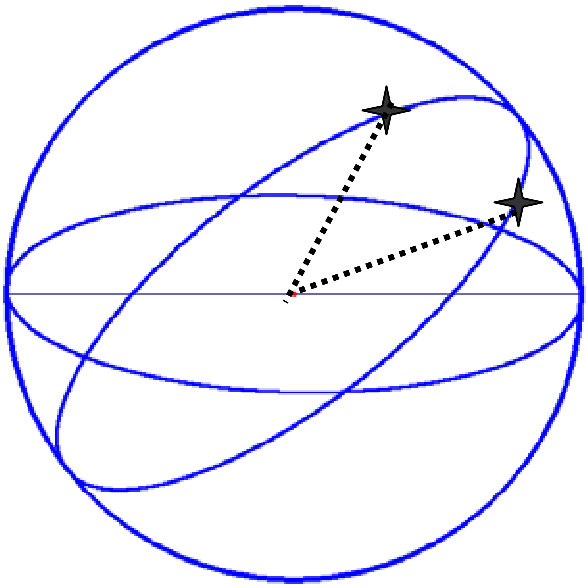


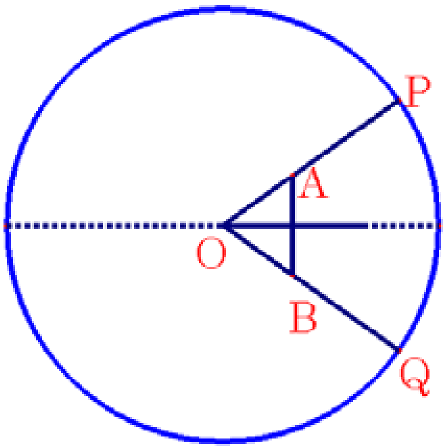
FIGURE 7C-1. The Jacob Staff according to Levi's description.

[26] When you wish to find the distance between these two stars in degrees on the great circle that passes through them from the units recorded in the observation, add (*habber*) the square of the distance to the square of half the plate, and take the square root of the sum, and it is the corrected radius. [27] Multiply the units of the plate by 60 and divide the result by the corrected radius, and the result is the corrected chord (*metar*), for that is what we call it. [28] Find the corresponding arc in the table of arcs and chords, and it is the distance between the two stars on the great circle passing through them.

*great circle:大円…球を、中心を通る平面切ったときの切り口となる円。この場合、球は天球で、中心は観測者の目。



あなたが 2 つの星の､2 つの星を通る大円上での角度における距離を、観測の中で記録されたunitから知りたいときは、プレートまでの距離の平方と、プレートの半分の平方を足し、その和の平方根を取る。それがcorrected radius(訂正された半径)である。プレートのunitに 60 をかけて、corrected radiusで割りなさい。その結果が、我々がcorrected chord(訂正された弦)と呼んでいるものである。弧と弦の表から一致する弧を探せば、それが 2 つの星の、それらが通る大円上での距離である。



角度の測り方

測りたいものがプレートの両端にあたるように、プレートを動かす。距離を測るときはプレートを固定して自分の足を動かしたが、角度の場合は観測者は立ち止まったまま、プレートを動かす。

corrected radius、corrected chord を計算して、弦の表で角度を調べる。

corrected radius、corrected chord とは？

corrected radius の求め方
「プレートまでの距離の平方と、プレートの半分の平方を足し、その和の平方根を取る。それが corrected radius(訂正された半径)である。」

例えば、プレートの幅を 16unit、目からプレートまでの距離を 29unit とすると、三平方の定理から corrected radius を求めることができる。corrected radius を R とすると、

$$R = \sqrt{8^2 + 29^2} = 30.08\cdots$$

となる。

プトレマイオスの弦の表を使うと、半径を 60 p (p というのはプトレマイオスが決めた半径の単位)としたときの、弧の大きさ(角度)に対する弦の大きさを調べることができる。

「プレートの unit に 60 をかけて、corrected radius で割りなさい。それが corrected chord である。」というのはどういう計算をしているのだろう。

半径 R の円のときの弦の長さが 16unit である。これと同じ比で半径 60 unit のときの弦の長さを求める。それが corrected chord である。corrected chord を a とすると、(10 ページのスペースで四捨五入して小数第 2 位まで求めよう)

$$a = 31.17$$

さらに、弦の表は小数点以下を 60 進法で書かれているので、a の小数点以下を 60 進法で表す。

小数点以下 0.17 を 60 進法で表すと、$60 \times 0.17 = 10.2$。さらに、小数点以下 0.2 を 60 進法で表すと、$60 \times 0.2 = 12$ より、

$$a = 31p\ \ 10'\ \ 12''$$

となる。この a に近い数値をプトレマイオスの弦の表で探す。$30°$ のときの弦が $31p\ 3'\ 30''$、$30°30'$ のとき、$31p\ 33'\ 50''$ なので、約 $30°$ であることがわかる。

弧	弦	差の 1/30
23° 0′	23p 55′ 27″	0p 1′ 1″ 33‴
23 30	24 26 13	0 1 1 30
24 0	24 56 58	0 1 1 26
24 30	25 27 41	0 1 1 22
25 0	25 58 22	0 1 1 19
25 30	26 29 1	0 1 1 15
26 0	26 59 38	0 1 1 11
26 30	27 30 14	0 1 1 8
27 0	28 0 48	0 1 1 4
27 30	28 31 20	0 1 1 0
28 0	29 1 50	0 1 0 56
28 30	29 32 18	0 1 0 52
29 0	30 2 44	0 1 0 48
29 30	30 33 8	0 1 0 44
30 0	31 3 30	0 1 0 40
30 30	31 33 50	0 1 0 35
31 0	32 4 8	0 1 0 31
31 30	32 34 22	0 1 0 27
32 0	33 4 35	0 1 0 22
32 30	33 34 46	0 1 0 17
33 0	34 4 55	0 1 0 12
33 30	34 35 1	0 1 0 8
34 0	35 5 5	0 1 0 3
34 30	35 35 6	0 0 59 57
35 0	36 5 5	0 0 59 52
35 30	36 35 1	0 0 59 48
36 0	37 4 55	0 0 59 43
36 30	37 34 47	0 0 59 38
37 0	38 4 36	0 0 59 32
37 30	38 34 22	0 0 59 27

平方根の計算

corrected radius 求める中で、平方根の計算が必要になる。筆算で平方根を計算する方法を紹介する。

・開平法

例として、1234 の平方根を計算してみよう。

	3	5.	1	2	・・・
3	）1 2	3 4.	0 0	0 0	
3	9				
6 5	3	3 4			
5	3	2 5			
7 0 1		9	0 0		
1		7	0 1		
7 0 2 2		1	9 9	0 0	
2		1	4 0	4 4	
7 0 2 4…			4 8	5 6	…

（宿題）

次の数を、四捨五入して少数第 2 位まで計算せよ。

(1) $\sqrt{13}$　　(2) $\sqrt{88209}$

（参考）開平法

$$
\begin{aligned}
(a+b+c+d+\cdots)^2 &= (a+b+c+d+\cdots)(a+b+c+d+\cdots) \\
&= a^2 + 2ab + 2ac + 2ad + \cdots \\
&\qquad\quad b^2 + 2bc + 2bd + \cdots \\
&\qquad\qquad\quad c^2 + 2cd + \cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\quad d^2 + \cdots \\
&= a^2 + b(2a+b) \\
&\quad + c\{2(a+b)+c\} \\
&\quad + d\{2(a+b+c)+d\} \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}
$$

と展開できることを利用して、X に対して、
$\sqrt{X} = a+b+c+d+\cdots$ を計算していく方法である。

6 ページの例では、

	3	5.	1	2	・・・
3	）12	34.	00	00	
3	9				a^2
65	3	34			
5	3	25			$b(2a+b)$
701		9	00		
1		7	01		$c\{2(a+b)+c\}$
7022		1	99	00	
2		1	40	44	$d\{2(a+b+c)+d\}$
7024…			48	56	…

となり、$a = 3\times 10$、$b = 5$、$c = 1\times 10^{-1}$、$d = 2\times 10^{-2}$、…
と、対応させることができる。

次回は実際に角度をはかってみよう！