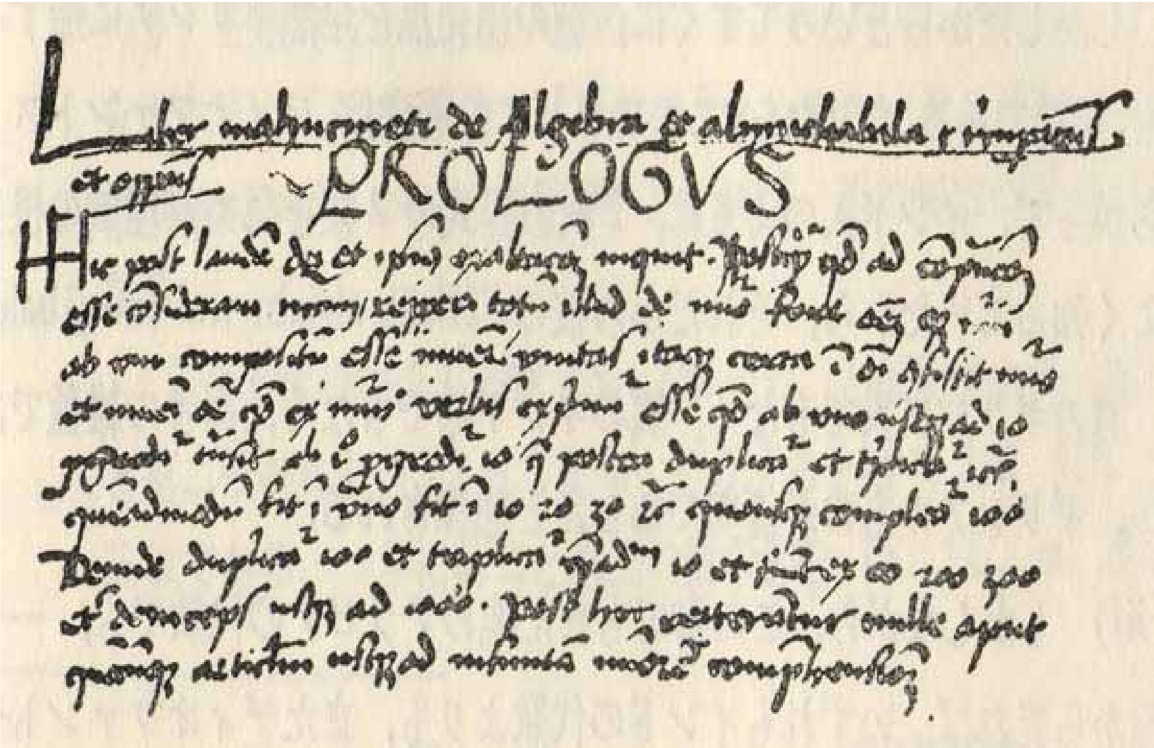
授業資料

１日目


PROLOGVS

３年　　組　　番	
氏名	

授業者　　倉島彩子

（筑波大学修士課程教育研究科数学教育コース１年）

アラビアの数学

代数学＝____________________⇦ al-jabr

‘ilm al-jabr wa’l-muqābala

アラビアの数学の１分野の名称

現存する資料は、数学者 Al-Khwarizmi（アル=フワーリズミ：790－850 年頃）による『‘ilm al-jabr wa’l-muqābala』で、その後 Abu Kamil（アブ・カーミル：850－930 年頃）によってさらに研究され、その後も多くの数学者によって発展した。

ジャブルしたり、ムカーバラしたりして未知数（量）を求める学問

現代の______________________にあたる。

ジャブル

➡____

ムカーバラ

➡____

‘ilm al-jabr wa’l-muqābala で使われている量

Al-Khwarizumi は次のように述べている。

　私はまた、ジャブルとムカーバラの計算で必要とされている数は３つの種類であることを見出した。すなわち‘ジズル’と‘マール’、それにジズルともマールとも（比例）関係がない‘独立数’である。そのうちジズルとは、自分自身に掛けられるもの、すべてであり、‘1’やそれより大きな数、それより小さな分数である。マールとは、ジズルがそれ自身に掛けられて生じるもの、すべてである。独立数とは、数のうち、‘ジズルともマールとも関係をもたない’といわれる、すべてである。

ここからマールとジズルの関係を探ってみよう。

- **マール：2次の量、ジズル：1次の量**
- 独立数は、ディルハムやディナール

例えば、

①　４個のジズルに等しい 1/3 個のマール

②　４８ディルハムに等しい、２個のマールと１０個のジズル

現代表記で表すと・・

①________________________

②________________________

x^2 の係数を１にする

①________________________

②________________________

Al-Khwarizumi はこのように x^2 の係数が１の形で３つの量から６つの相等関係を表しました。

どんな相等関係が考えられるでしょう？

		現代表記
ジズルに等しいマール	→	
(独立)数に等しいマール	→	
(独立)数に等しいジズル	→	
(独立)数に等しい、マールとジズル	→	
ジズルに等しい、マールと(独立)数	→	
マールに等しい、ジズルと(独立)数	→	

実際の問題とその解き方

Ｉ.「数に等しいマールとジズル」のケース

３９ディルハムに等しい、マールとそのジズル１０個

現代表記：

解

Al-Khwarizumi の解法

その意味は“どんなマールに 10 個のジズルを加えたら、全体として 39 になるか？”ということである。すると、その解法は、ジズル（の個数）を半分にすることである。この問題では、それは５である。そして、それを自身に掛ける。すると 25 になる。それをかの 39 に加える。すると、64 になる。そこで、その根をとる。それは８である。そこからジズル（の個数）の半分すなわち５を引く。すると３が残る。それが求めるマールのジズル（根）であり、マールは９である。

計算

この計算から何か気付いたことをあげてみよう。

Al-Khwarizumi はこれを証明するために、図を使った証明をした。以下のようなものである。

①‘３９ディルハムに等しい、マールと１０個のジズル’の理由については、それの図は辺の知られていない四角形の面である。これがマールで、我々はそれと、それのジズルを知ることを望む。それは、面ＡＢである。それの各辺は、そのジズルである。それの各辺がある数にかけられると、その数が到達した結果は、ジズルの個数で、そのジズルの各々はこの面のジズルに等しい。②したがって、‘マールには、そのジズルが１０個ある’といわれたとき、我々は１０の$\frac{1}{4}$、すなわち$2\frac{1}{2}$をとり、それら$\frac{1}{4}$の各々を面の各辺につくる。すると、最初の面、すなわちＡＢに、４つの面ができる。その各々の面の長さは面ＡＢのジズルに等しく、幅は$2\frac{1}{2}$である。これらはＨＴＫＧである。③すると、等辺の、そして未知の面が生じる。この面は四隅で各々$2\frac{1}{2}$かける$2\frac{1}{2}$ずつ欠けている。そこで、この面が四角形になるのに必要なものは、$2\frac{1}{2}$の自乗の４倍となる。その結果は全部で２５である。④最初の面、すなわち、マールの面と、その回りの４つの面、すなわち１０個のジズルは数の３９であることがわかっているから、それに２５、すなわち面ＡＢの四隅にある４つの四角形を加えると、大きな面の四角形化が完成する。それがＤＥである。⑤またそれが、全体で６４であることと、それの１辺はそれのジズルすなわち８であることがわかっている。そこで、その８から１０の$\frac{1}{4}$に等しいものを２つ、５を大きな面、すなわち面ＤＥの辺の両端から引くと、その辺のうち、３が残る。それが求めるマールのジズルである。

Al-Khwarizmi がどのように考え、どのような図を描いたか①～⑤を詳しくみていこう。

①:▸求めようとしているものは何でしょう。 ____________________

▸求めようとしているものはどのように表すことができるでしょう。

▸《各辺がある数にかけられると、その数が到達した結果は、ジズルの個数で、そのジズルの各々はこの面のジズルに等しい》という部分で Al-Khwarizmi は何を言っているのでしょう。

②:▸《$\frac{1}{4}$ の各々を面の各辺につくる》とはどのようにすることでしょう。図に表してみよう。

③：▸《等辺の、そして未知の面》とはどこでしょうか。

▸《この面が四角形になるのに必要なものは、$2\frac{1}{2}$の自乗の４倍となる》のはなぜでしょう。

④：▸《大きな面の四角形化が完成する》といっていますが、その面はどんな四角形でしょう。 ____________

ここで Al-Khwarizmi が用いた図を描いてみましょう。

この問題に関して、Al-Khwarizmi はもう１つの別の図での証明をしました。

①それは面ＡＢで、これがマールである。さて、我々はそれに１０個のジズルに相等するものを加えたい。そこで、その１０を半分にする。それは5となる。それらを面ＡＢの二方に接する２つの面とする。すなわち、面ＧとＤである。②それらの面の各々の長さは５ジラーア、すなわち１０個のジズル（の個数）の半分となり、その幅は面ＡＢの辺に等しくなる。すると、面ＡＢの一角に四角形が１つ残る。それは５掛ける５、すなわち我々が最初の面の二方に加えた１０個のジズル（の個数）の半分（の自乗）である。最初の面がマールであることと、その二方の２つの面が１０個のジズルであることがわかっているいから、その全体は３９である。大きな面が完成するのには5かける５の四角形が残っており、それは２５である。③そこで、大きな面すなわちＺＥを完成させるために、それを３９に加える。すると、それは全体で６４となる。そこでその根をとる。それは8である。それが大きな面の一辺である。そこで、我々が付け加えたもの、すなわち5をそこから引くと、３が残る。それが面ＡＢ、すなわちマールの辺であり、また、そのジズル（根）である。そして、マールは9である。

ここから、わかった数値や文字を書き込みながら Al-Khwarizmi の用いた図を描いてみよう。