出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.209-219、2005年3月

方程式の幾何学的証明を用いた授業研究

—解釈学的営みを通した創造性の育成—

筑波大学大学院修士課程教育研究科
倉島　彩子

章構成

要約

本研究では、アラビア数学から方程式の解法を図を描き幾何学的に証明している文献を用い、原典解釈することにより当時の解法を考察するという解釈学的営みを通し、共感によって自己理解することで、代数学として学習している方程式を幾何学的な証明を通して多面的な数学の考え方として捉えることができるか考察した。

キーワード：方程式、解釈学的営み、共感、多面的な数学、創造性

１．はじめに

高等学校学習指導要領解説数学編では、「高等学校では、数学に興味・関心等をもたない生徒が少なからずいる」（文部省, 1999）という事実を受け、「数学を学習する意義、数学的な見方や考え方のよさ、数学の美しさ、文化や社会生活において数学が果たしている役割などを理解させることにより、数学への興味・関心をもたせ、学習への意欲を高めることを大切に」（文部省, 1999）改訂を行っている。また、中学校学習指導要領解説では「単に出来上がった数学を知るのではなく、（中略）数学を創造し発展させる活動を通して数学を学ぶことを経験させ、その過程の中にみられる工夫、驚き、感動を味わい、数学を学ぶことの面白さ、考えることの楽しさを味わえるようにすることが大切である。」（文部省,1999）と述べられている。ここで今回授業を行う対象生徒が中学生、授業内容が高等学校数学Ⅰの内容であることから筆者は以上の点を踏まえ、数学史を教材とし数学的活動を通した「解釈学的営み」（礒田,2002）、「創造性の基礎」に焦点をあて本研究を行った。

(1).解釈学的営み

「解釈学は、数学する心を、数学的活動を通じて育てる際に必要な方法論を提供」（礒田・土田 2001）し、「解釈学的営みを通じて、生徒は自らその数学内容とそれを生み出した人間との関わりを知る活動に取り組むことになる。」（礒田,2002）また、「解釈学的営みによって記述しうる数学的活動は、対象を表した他者の立場を想定することで話題にしえる対象の生きた理解であり、その解釈を鏡に映し出される自己理解としての教訓」であり、「数学、数学教育にかかわる社会・文化は、他者への共感という人間の営みを通じて主観的に共有される。」（礒田,2002）と述べられているが、このような解釈学的営みを通じて数学的活動を行うことによって数学が発展してきた過程、数学の必要性を知る中で、工夫、驚き、感動を味わい、数学を学ぶことの面白さ、考えるこ

との楽しさを味わうことができると考える。本研究では、当時の考えの解釈と現在の考えを比較により当時の考えに共感しつつ、現在の数学のよさや美しさを実感できることを示す。

(2).創造性の基礎

高等学校指導要領解説に「小学校、中学校及び高等学校を通じて、心身の発達段階に応じ、社会生活を営む上に必要な一般的な教養としての数学的資質・能力などを身に付けさせ、創造性の基礎を培うことが重要である。」(文部省,1999)と述べているが、本研究では、根本(1999)の述べている「気付きや創造の行為など、認知機構の特異な調整は学習者の内的な活動に委ねられている。このような人間（生徒）の知識活動（数学的な知識を獲得していく活動）を言語解釈や記号的説明だけで促そうとしても限界がある」という点と「生徒の創造性を培うため、例えば、多面的にものを見る力や論理的に考える力などを身に付けられるようにすること」が重要であるということと、上述の解釈学的営みを通じた数学的活動による自己理解を受けて、創造へ発展するという筆者の考えをもとに、多面的な考え方に対する生徒の反応を観察・考察する。

２．研究目的・研究方法

(1).研究目的

アラビアの代数学を教材に原典解釈し、当時の数の捉え方や方程式の解法の表現の違いに焦点をあてた授業をすることにより、解釈学的営みを通じた自己理解や多面的な数学の考え方への共感ができるかどうかを考察する。

本研究の目標を達成するために、以下の課題を設定した。

課題１：当時と現在の数学を比べ、数学が発展してきたことに気付き、現在の数学のよさを考えることができるか。

課題２：当時の方程式の解法や幾何学的証明を解釈し、現在の解法と対応させて考え、多面的な数学の考え方に共感できるか。

(2).研究方法

数学史を用いて授業を行い、事前・事後のアンケート、生徒のノート、また授業の様子を録画したビデオをもとに生徒の反応を見て、設定した課題を考察する。

３．方程式の歴史の数学的解釈

本研究では、９世紀頃のアラビアの数学者 Al-Khwarizmi の『ジャブルとムカーバラ』を原典として用いた。この原典を解釈することにより、現在の解法と当時の解法の違いとその理由を探り、数学の発展を感じるとともに「解釈学的営みを通じて、生徒は自らその数学内容とそれを生み出した人間との関わりを知る活動に取り組む」(礒田,2002)ことにより高等学校数学の科目の一つである「数学基礎」の目標の「数学と人間とのかかわりや、社会生活において数学が果たしている役割について理解させ、数学に対する興味・関心を高めるとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し数学を活用する態度を育てる」(1999,p31)ことができるのではないかと考える。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.209-219、2005年3月

また、現在では解の公式、平方完成、因数分解等の手続きを経ての数式による方法で解かれている方程式を、当時の解法の証明として図を使った表し方を考察することで、「生徒の創造性を培うため、例えば、多面的にものを見る力や論理的に考える力などを身に付けられるよう」（根本,1999）にするための活動と捉えることができると考える。さらに、数学の多面的な考え方への共感ができるのではないかと考える。

①現在と当時の違いとその理由・比較

一般形

9世紀アラビア

$x^2 = px$

$x^2 = q$

$q = px$

$x^2 = px + q$

$px = x^2 + q$

$q = x^2 + px$

（p,q>0）

現在

$ax^2 + bx + c = 0$ （$a \neq 0$）

9世紀のアラビアでは上記のように6通りに表されていたが、現在では1通りで表されている。これは解の計算が幾何学的な証明によって示されていることからも判るように負の数が存在しなかったこと、文字で表されていたのではなく相等関係として言葉で表されていたことが理由であると考えられる。

本研究では、9世紀アラビアで6通りに分けられていたものの中から$q = x^2 + px$の形を取りあげて考察する。ここで、9世紀アラビアの解法を解釈する。

9世紀アラビアの解法

＜39ディルハムに等しい、マールとそのジズル10個＞

ここでマールは2次の数、ジズルは1次の数であり、現代表記すると$39 = x^2 + 10x$にあたるものについて考える。

原文

> その意味は“どんなマールに 10 個のジズルを加えたら、全体として 39 になるか？”ということである。すると、その解法は、ジズル（の個数）を半分にすることである。この問題では、それは5である。そして、それを自身に掛ける。すると 25 になる。それをかの 39 に加える。すると、64 になる。そこで、その根をとる。それは8である。そこからジズル（の個数）の半分すなわち5を引く。すると3が残る。それが求めるマールのジズル（根）であり、マールは9である。

9世紀頃のアラビアでは方程式を解く計算過程のみ表記されていた。つまり、解く手順がきまっておりそれにしたがって左のような計算がされていたのである。この計算過程を考察すると、現代の解の公式に値するものであることがわかる。これにより、9世紀の頃に既に現代の解の公式に値するものがあったことが分かるが、ここで、現代との違いに着目して

考えることで、記号と負の数の存在についての考察ができる。このような学習により、数学の発展・数学の美しさに焦点を当てることができると考える。

$$\left.\begin{array}{l} 10 \div 2 = 5 \\ 5^2 = 25 \\ 25 + 39 = 64 \\ \sqrt{64} = 8 \\ 8 - 5 = 3 \end{array}\right\}$$

計算をまとめると $\sqrt{(\frac{10}{2})^2 + 39} - 5 = 3$

②多面的な考え方

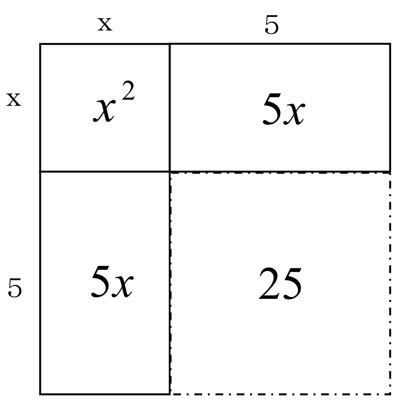
$39 = x^2 + 10x$ について原典における幾何学的証明と現代の平方完成について考える。

“３９ディルハムに等しい、（１個の）マールと１０個のジズル”（の解法）の理由については、それの図は知られていない四角形の面である。これがマールで、我々はそれと、それのジズル（根）を知ることを望む。

－中略－

それは面ＡＢで、これがマールである。さて、我々はそれに１０個のジズルに相等するものを加えたい。そこで、その１０を半分にする。それは５となる。それらを面ＡＢの二方に接する２つの面とする。すなわち、面ＧとＤである。それらの面の各々の長さは５ジラーア、すなわち１０個のジズル（の個数）の半分となり、その幅は面ＡＢの辺に等しくなる。すると、面ＡＢの一角に四角形が１つ残る。それは５掛ける５、すなわち我々が最初の面の二方に加えた１０個のジズル（の個数）の半分（の自乗）である。最初の面がマールであることと、その二方の２つの面が１０個のジズルであることがわかっているから、その全体は３９である。大きな面が完成するのには５掛ける５の四角形が残っており、それは２５である。そこで、大きな面すなわちＺＥを完成させるために、それを３９に加える。すると、それは全体で６４となる。そこでその根をとる。それは８である。それが大きな面の一辺である。そこで、我々が付け加えたもの、すなわち５をそこから引くと、３が残る。それが面ＡＢ、すなわちマールの辺であり、また、そのジズル（根）である。そして、マールは９である。

この原典の解釈により次のような図が描ける。



これを、現代の記号表記と照らし合わせ考察していくと、次のように表現することができる。

$$39 = x^2 + 10x$$
$$39 = x^2 + (5+5)x$$
$$39 + 25 = x^2 + (5+5)x + 25 = (x+5)^2$$
$$64 = (x+5)^2$$
$$8^2 = (x+5)^2$$

このように現在代数的に数式の変形として行っている平方完成が、幾何学的に表現できることを通して多面的な数学の考え方に共感し、創造性を培う場面を提供することができると考える。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.209-219、2005年3月

４．方程式の歴史的証明の授業概要

(1).授業環境

①対象：私立中学校３年生　（2クラス　92名）
　　　　数学Ⅰ「二次方程式」既習

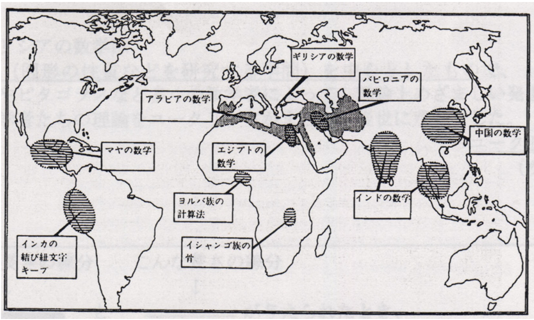
②日時：平成16年12月13，14，16日（45分×3）

③準備：コンピューター（Windows）、Microsoft Power Point、ビデオカメラ、プロジェクター、授業テキスト、事前・事後アンケート

(2).授業展開

〈１〉アラビアの数学について知る、当時の数・表現について考察する

・アラビアの数学について知る



当時のアラビアは大きな文明が栄えた地域の中心の場所に位置していたため、物や文化、学問が多くの地域から入ってきていた。またこの場所に位置したことから商業活動が盛んに行われていたために商業計算が必要とされ研究されるようになった。

さらに方程式を含む代数学「Algebra」の語源となったとされるAl-Khwarizmiの「ジャブルとムカーバラ」を紹介。

この学問は「未知数を求める学問」であるが現在のどの単元にあたるかを考えた。

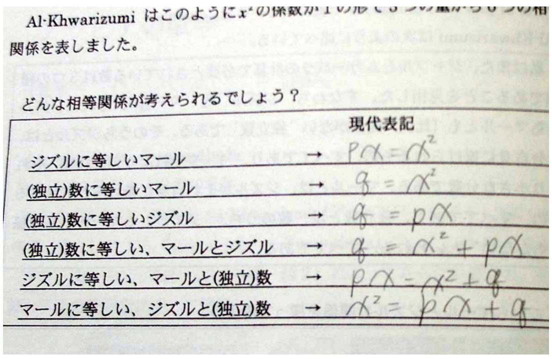
・当時の数、表現についての考察する

原典解釈（図１）により、「ジャブルとムカーバラ」で使われている３つの量「マール」「ジズル」「独立数」の関係を明らかにし、その３つの量の相等関係を当時の６つの場合に分けて表す。「ジズルに等しいマール」「数に等しいマール」「数に等しいジズル」「数に等しい、マールとジズル」「ジズルに等しい、マールと数」「マールに等しい、ジズルと数」を現代表記で表してみる。（写真１）

図１

> 私はまた、ジャブルとムカーバラの計算で必要とされている数は３つの種類であることを見出した。すなわち‘ジズル’と‘マール’、それにジズルともマールとも（比例）関係がない‘独立数’である。そのうちジズルとは、自分自身に掛けられるもの、すべてであり、‘1’やそれより大きな数、それより小さな分数である。マールとは、ジズルがそれ自身に掛けられて生じるもの、すべてである。独立数とは、数のうち、‘ジズルともマールとも関係をもたない’といわれる、すべてである。

写真１


Al-Khwarizumi はこのようにx^2の係数が1の形で3つの量から6つの相
関係を表しました。

どんな相等関係が考えられるでしょう？

		現代表記
ジズルに等しいマール	→	$px = x^2$
(独立)数に等しいマール	→	$q = x^2$
(独立)数に等しいジズル	→	$q = px$
(独立)数に等しい、マールとジズル	→	$q = x^2 + px$
ジズルに等しい、マールと(独立)数	→	$px = x^2 + q$
マールに等しい、ジズルと(独立)数	→	$x^2 = px + q$

現在では$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$と１通りで表すことができるが、当時は$x^2$の係数を１とし６つに分けた。これは負の数がなかったこと、相当関係を言葉で表していたからである。

・当時の解法の考察

６つに分類した相当関係から $q = x^2 + px$ について考察する。

図２

> その意味は“どんなマールに 10 個のジズルを加えたら、全体として 39 になるか？”ということである。すると、その解法は、ジズル（の個数）を半分にすることである。この問題では、それは 5 である。そして、それを自身に掛ける。すると 25 になる。それをかの 39 に加える。すると、64 になる。そこで、その根をとる。それは 8 である。そこからジズル（の個数）の半分すなわち 5 を引く。すると 3 が残る。それが求めるマールのジズル（根）であり、マールは 9 である。

はじめに $39 = x^2 + 10x$ を各自の方法で解いてもらう。

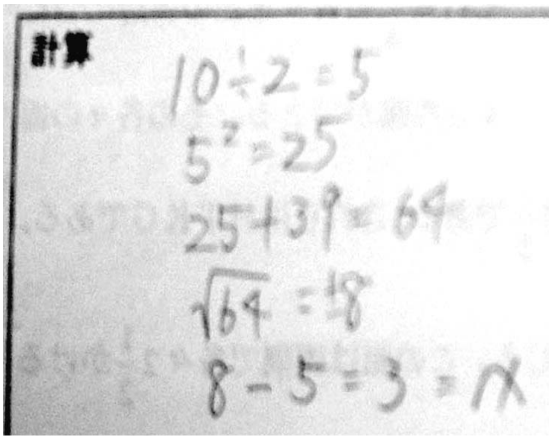
授業者：どのような解き方がありますか？

生徒１：解の公式

生徒２：因数分解

次に原典を読み、書かれていることを式で表し、自分の解と比べてみる。（写真２）

写真２



その後、次のような問いかけをした。

授業者：当時の解法を現代の計算式に表してみましたが、これを見て何か気付くことはありますか？

生徒：・・・

授業者：（板書して）このようにそれぞれの式をつなげてみるとどうでしょう？

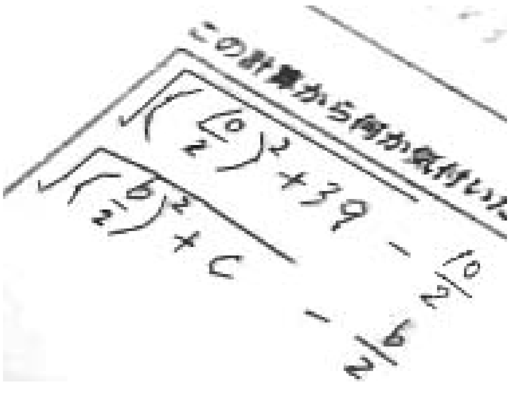
生徒：・・・

授業者：では、ジズルの個数と数をそれぞれｂとｃで置き換えてみるとどうでしょう。

生徒：あぁ…解の公式。

授業者：では、$ax^2 + bx + c = 0$ のときの解の公式は？

写真３



生徒：$2a$ 分の b^2 …あ、$-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ 。

授業者：そうですね、では先ほどの式はこの解の公式に変形できるでしょうか？

（授業終了チャイム）

生徒：だって a がないじゃん。

授業者：今、「a がないじゃん」という意見が出ましたが、このとき係数は１なのでこの場合 a は１なのです。

このようにして、言葉で表されている当時の解法が負の数については考えていないが現代の解の公式に近いものが既に使われていたことを確認した。

〈２〉原典を解釈し方程式を図に表現する

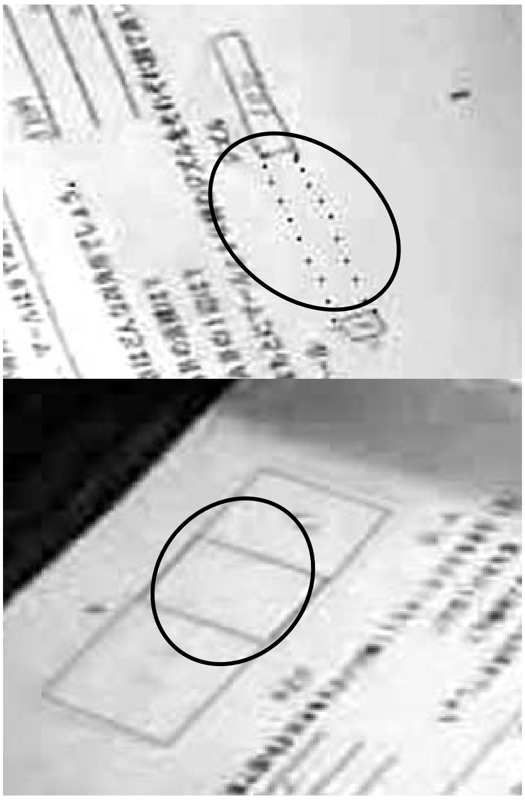
前日の問題について、幾何学的証明つまり図を用いた証明がされていたことより、原典を読み、マールとジズルがそれぞれどのように表せるかについてからはじめた。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.209-219、2005年3月

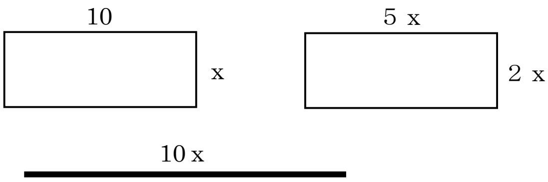
図３

> “３９ディルハムに等しい、（１個の）マールと１０個のジズル”（の解法）の理由については、それの図は知られていない四角形の面である。これがマールで、我々はそれと、それのジズル（根）を知ることを望む。－中略－これは面ＡＢで、これがマールである。さて、我々はそれに１０個のジズルに相等するものを加えたい。

写真４



生徒のノートを見てみると、マールが１辺xの正方形であることがわかる生徒は多いが、10個のジズルを図で表すことができない生徒が多かった。解答には次のようなものがあった。



これに対し、原典の続きを読みどれが適当か考察した。

　一方、10個のジズルが一辺10、ｘの長方形であることが分かっている生徒は、正方形の一辺と長方形の一辺が等しいことを写真４のように表していた。これは、ジズルの２乗がマールであるという１時間目の内容をもとに考えることができていると考える。

〈３〉現在の式との対応を考える

原典の言葉を図で表す〈２〉の活動を経て、最後に図と現在生徒が行っている因数分解（ここでは平方完成）の過程と照らし合わせ、幾何学的証明がどのようにされているかを考察（写真５）し、同形だが異なる数字の式を図に表し対応させ式を書いた。（写真６）。この幾何学的証明から平方完成という言葉が使われている。

写真５

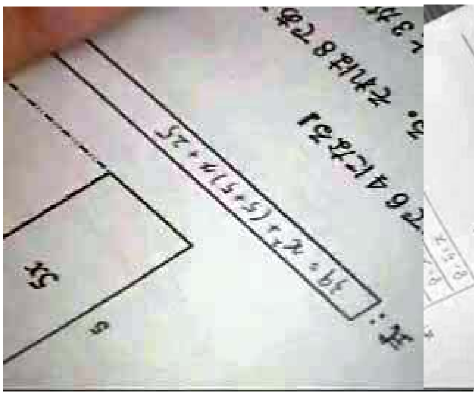


写真６

説明する生徒

５．議論

(1).課題１に関する議論

授業の中で、負の数がなかったことが理由で現在では１通りに表せる一般形も６通りに表さざるを得なかったことを通して数学が発展し、現在のように美しくと便利になったことについて、また、当時の解法の解釈を通し生徒が共感し自己理解できたかについてアンケートから考察する。

【数学は発展してきたと思いますか。（全員「ある」と回答）それはなぜですか？】

・アラビアの数学のやり方よりも今のほうが簡単に解けるから。
・図の証明から式の証明になってたいていの数は表せるようになった。
・アラビアの数学で式ではなく言葉で表してあるやつがあって、それを今でも続いていると思うと、すごくめんどうくさくて、やってられないと思ってしまうから、式ができて、発展してきてよかったと実感した。
・昔は文字などで説明していたし大変だった。しかし、今は、式でかけてしまうので発展してきたと思う。
・やりやすくなっている。
・証明がまわりくどかったから、今のほうが明快で優れている。
・授業をきいてどのくらい変わったかをわかったから。
・昔よりはるかに簡単な記号が世界共通で使えるから。
・昔の人たちの数学の中身を考えるようになったから。

この回答から数学史を学ぶことによって、数学が便利になったこと、明快になったことを感じたと考えられる。また、今の自分たちが昔の考え方を解明できることで数学が発展したと感じた生徒もおり、解釈学的営みによる数学的活動による共感と自己理解の一場面と捉えることができると考える。

【数学の歴史を学ぶことに意味はあると思いますか】

この質問からも、当時の数学者の考えに共感することができるかということと、数学の歴史を知ることで数学のよさを感じることができたと以下のアンケート回答から考察できる。

「ある・少しある」の回答
・どうやってできたのか知っておくと意味が分かってくるから。
・もとがわかれば難しい問題も少しは分かるようになるかもしれないから。
・面白いと思ったから前よりはあると思うようになった。

「ない・あまり無い」の回答
・受験に必要ないから。
・生活に必要ない。
・今の完成されたほうが正確だから。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.209-219、2005年3月

	ある	少しある	あまり無い	ない
事前	１４％	４３％	２３．６％	１９．４％
事後	１７．４％	４７．７％	２１％	１３．９％

【授業の感想】

・最初は「つまらないな」と思ったけど、いつも使う式とつながったので感動した。もっと他の歴史も知りたくなった。
・勉強していくうちに「数学の歴史にこんなのがあったのか」と数学の奥深さと関心をもちました。
・昔の人も方程式を使っていたんだなぁ…。
・数学はあまり好きではなかったから「歴史なんて！」と思っていたけどおもしろかった。

これらから、数学史を学び数学のルーツや、その過程に隠れている数学を知ることで、現在自分たちの学んでいる数学を深め、改めて考えることができると感じ、また今まで興味が無かった生徒が数学に少し興味を持ったことで変容がみられ、数学史の授業が意義あるものであるという結果が得られた。しかし、「ない・あまり無い」の回答では、今の優れた数学を使えばわかるし、歴史を学ぶこと自体には必要性を感じない生徒もいた。これに対しては、授業構成の問題が原因として挙げられるが、当時の数学がどんな必要性から生まれ、日常にどのように使われていたかについて考察する場面を提供しつつ授業を進めていく必要があると考える。

(2).課題２に関する議論

【普段使っている解法以外で方程式を解いてみてどうでしたか】

・めんどうくさい。
・おもしろかった。
・新鮮なかんじがした。いろいろなやり方があるんだなと思った。
・なるほど！とおもった。図には驚いた。
・式が無いのが不思議だった。
・今のほうが楽。
・違うやり方もあるんだなと思った。
・ちょっとだけ面白かったけど、なんかしっくりこない。

このアンケートの対しては、代数学の分野として学習し、式の変形で解くことができる内容を幾何学的に考えることに対し「面倒、現在のほうが楽である」という回答もあったが、多くの生徒が「なるほどと思った」「いろんなやり方があるんだと思った」等と述べていることから、多面的な考え方の面白さ、興味が得られてのではないかと考える。否定的な意見を持った生徒に対しては、数学の発展によって現在の「楽な」考え方が生み出されたことを考えられるような授業展開をすることを課題とする。

【授業の感想】

・数学の新しい方向を知れました。
・こんな問題の解き方もあるんだなーと思った。
・数学にも今自分が知っていると解き方以外にもたくさん解く方法があると知った。
・今まで知らなかった方法が知れてよかった。
・他の数学も知ってみたいと思った。

これらから、公式や計算法さえ覚えればいいという生徒もいる中で、今自分の解いている方法以外を知ってみたい、など多面的な数学の考え方に共感する生徒がいた。これは、アンケートの回答にも見られるように、数学史を学ぶことで、数学を興味を持ち、ただ覚えるだけでない「新しい数学の方向」を感じられるということが明らかになったといえる。しかし、自主的な取り組みや興味関心が創造性に繋がると考えるが、創造性が培えたかという議論に関しては、今後生徒が本研究での数学にする多面的な考え方をどのように活かしていくか、また活かすことができるかによって議論されるべき課題である。

６．おわりに

本研究では、方程式の幾何学的証明を教材に解釈学的営みの数学的活動に関して授業研究を行なった。この研究を通し、生徒の数学の捉え方を明らかにするとともに、当時の数学者に共感、現在の数学の美しさ・よさを認める考えが認められた。しかし、方程式という「単元」を取り上げて行なった授業に対しては「なぜわざわざこんなことをするのか」「つまらない」という意見も出た。生徒にとって、数学を解明するという形になってしまったように思う。よって、本研究での授業を構成する上での課題として１時間の中で重点をおく内容の吟味と、生徒が自主的に考えるまたは生徒自身が課題を見つける場面を設定できるような授業構成をする必要があげられ。これに対し、当時の日常生活への活用場面の追体験までの授業を展開することや、「こんな数学が使われていたんだ」というような隠れた数学の発見ができるような構成・教材を開発することが必要である。

謝辞

授業研究の実施に際し、私立茗溪学園の永田眞裕先生、島一史先生を始め、数学科の先生方に貴重なご助言・ご指導、ならびに多大なるご協力いただきました。厚く御礼申し上げます。

注）

本研究は、平成 16 年度科学研究費、特定領域研究(2)課題番号 15020214「数学用機械とJAVA による移動・変換と関数・微積ハンズオン教材の WEB 化研究」(研究代表者礒田正美)において開発された歴史的道具を前提にして、平成 16 年度科学研究費、基盤研究(B)(2)課題番号 14380055「数学の文化的視野覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」(研究代表者礒田正美)の一環として行なわれた。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(12)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.209-219、2005年3月

〈参考・引用文献〉

【1】 文部省(1999). 高等学校学習指導要領解説数学編理数編. 実教出版株式会社
【2】 礒田 正美(2002). 解釈学からみた数学的活動論の展開 ―人間の営みを構想する数学教育学へのパースペクティブ―. 筑波数学教育研究, 第 21 号, p1-10
【3】 根本 博(1999). 中学校数学科 数学的活動と反省的経験 ―数学を学ぶ楽しさを実現する―. 東洋館出版社
【4】 小倉金之助補訳(1960). カジョリ初等数学史. 上. 共立出版
【5】 コールマン ユシケービッチ(1973)山内一次 井関清志訳. 数学史, 2. 東京書籍
【6】 伊藤俊太郎編著(1987).数学の歴史：現代数学はどのようにつくられたか, 2. 共立出版
【7】 Martin Levey (1966). The algebra of Abu Kamil. University of Wisconsin Press
【8】 ジョージ・G・ジョー(1996). 非ヨーロッパ起源の数学. 講談社
【9】 伊藤賢二郎(2001). 数学感を変容させる数学史の効果～中世代数史を用い、数学を文化として捉えることをねらって～. 中学校・高等学校数学科教育開発に関する研究 (8)世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育ー代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開ー. 筑波大学数学教育学研究室. pp174－184
【10】熊田真一（2001）.文化としての数学学習に関する一考察～方程式の解の公式の歴史的解釈を通して～. 中学校・高等学校数学科教育開発に関する研究（8）世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育ー代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開ー. 筑波大学数学教育学研究室. pp185－194
【11】綾小路尚子（2002）.方程式の歴史原典解釈による文化的営みとしての数学学習. 中学校・高等学校数学科教育開発に関する研究（9）教育評価の転換と歴史文化志向の数学教育ー代数・幾何・微積 For All プロジェクトの新展開ー. 筑波大学数学教育学研究室. pp136－150