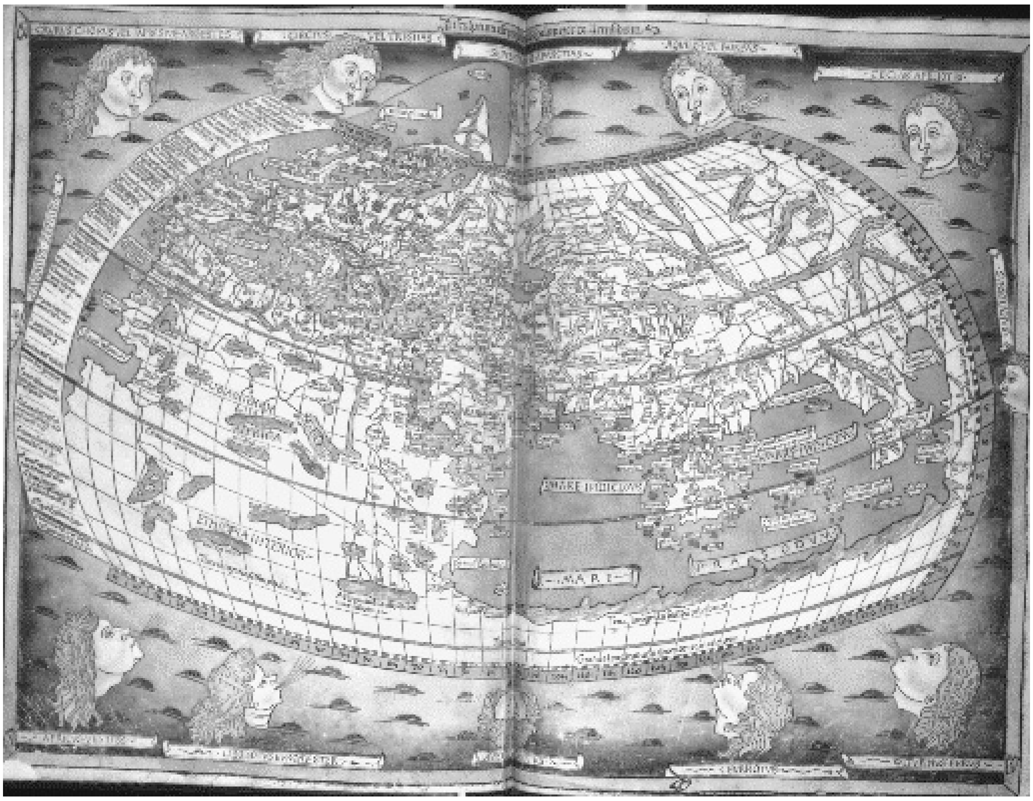
授業資料３時間目

計算器を使おう！



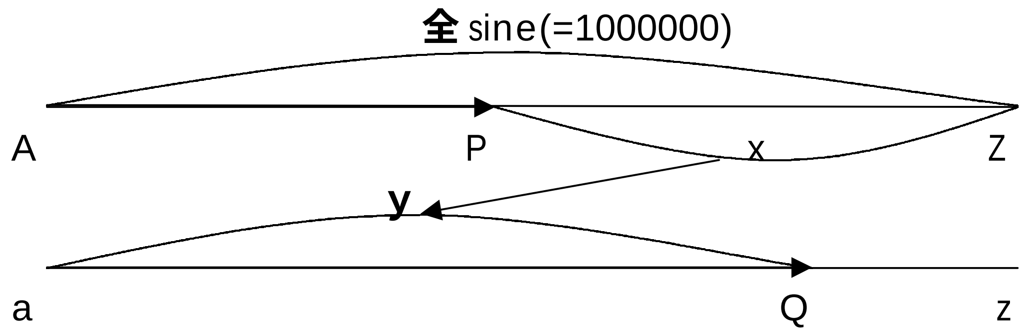
授業者：本福陽一

(筑波大学大学院修士課程教育研究科１年)

１年	A組	番

１．前回の復習

定義１では、各時間において点を表す数の列が等差数列をなす．
定義２では、各時間において点を表す数の列が等比数列をなす．



上の図において、同じ時間が経過したときの動点 P **と動点** Q **の位置に注目しそれぞれを、**

$$PZ = x \quad , \quad aQ = y$$

とおき、ｘにｙを対応させることによりｙをｘの関数と考える．
このとき、

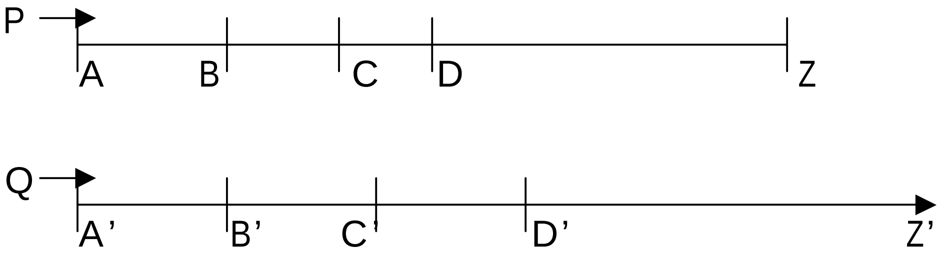
ｙはｘの Logarithme **である**

という．そして、

この“ Logarithme **”を対数と呼ぶ．**

このようにして Napier は、等差数列と等比数列との対比により対数関数を定義した．

《補足》Napier **対数の定義について**



Napier **の対数の定義を現代的な表現で表してみよう．**
まず、線分ＡＺ＝ｒとおく．ただし、ｒは十分大きな数とする．

このとき、Ａにおける点Ｐの速さは点ＡからＺまでの距離として表されるのでｒである．点Ａ,Ａ’を出発して時間１/ｒを経たときにそれぞれ点Ｂ,Ｂ’にいたとすると、点Ｐは速さ×時間(ｒ×１/ｒ)＝１だけ離れた点にいることになる．

また、点Ｂにおけるおける点Ｐの速さは、ＢＺの長さ、すなわち、 $\mathrm{r}-1=\mathrm{r}\left(1-\frac{1}{\mathrm{r}}\right)$ **に等しい．ゆえに、次の時間１/ｒの間に点ＰはＣに達し、点ＱはＣ’に達するとすると、ＢＣ＝**$\frac{1}{\mathrm{r}}\cdot\ \mathrm{r}\left(1-\frac{1}{\mathrm{r}}\right)=1-\frac{1}{\mathrm{r}}$**であり、Ｂ’Ｃ’＝**$\frac{1}{\mathrm{r}}\cdot\ \mathrm{r}$**＝１である．したがって、ＣＺ＝ＡＺ－ＡＢ－ＢＣ＝** $\mathrm{r}\left(1-\frac{1}{\mathrm{r}}\right)^2$ **である．次の時間１/ｒには、点ＱはＣ’から１だけ離れたＤ’に達し、点Ｐはその速さは** $\mathrm{r}\left(1-\frac{1}{\mathrm{r}}\right)^2$ **であるから、Ｃからの距離が** $\frac{1}{\mathrm{r}}\times\mathrm{r}\left(1-\frac{1}{\mathrm{r}}\right)^2=\left(1-\frac{1}{\mathrm{r}}\right)^2$ **のＤに達する．したがって、ＤＺ＝ＡＺ－ＡＢ－ＢＣ－ＣＤ＝**$\mathrm{r}-1-\left(1-\frac{1}{\mathrm{r}}\right)-\left(1-\frac{1}{\mathrm{r}}\right)^2=\mathrm{r}\left(1-\frac{1}{\mathrm{r}}\right)^3$ **となる．ゆえに、Ｄにおける点Ｐの速さは**$\mathrm{r}\left(1-\frac{1}{\mathrm{r}}\right)^3$**である．**

これを続けていくと、点ＰのＡ,Ｂ,Ｃ,Ｄ,…における速さはそれぞれ

(１)　　　$$r, r\left(1-\frac{1}{r}\right), r\left(1-\frac{1}{r}\right)^2, r\left(1-\frac{1}{r}\right)^3, \cdots$$

となり、それに対応する点Ｑに位置Ｂ’,Ｃ’,Ｄ’…はそれぞれ

(２)　　　　０,１,２,３,…

である．(１)は等差数列をなし、(２)は等比数列を構成する．Napier は全 sine を 10000000 としていたので、(１)において r＝10000000 としたものに(２)を対応させることにより、Napier 対数が得られる．

現代数学の記号を用いて表現すれば、

$$x = 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^y$$

とおいたときに、

$$y = \mathrm{Nlog}\, x$$

と表し、$\mathrm{Nlog}\, x$ を x の Napier 対数という．

２．Napier 対数と常用対数

Napier 対数

$$x = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^y$$

とおいたときに、

$$y = \mathrm{Nlog}\, x$$

と表し、これを x の Napier 対数という．

Napier は、天体観測に用いる７桁の正弦計算を簡単にするために正弦の対数を必要としてこのような定義をした．

そしてこの定義においては、10000000 の Napier 対数が０であった．

ところが、Henry Briggs(1561－1630)という人物が１の対数が０となるように Napier による対数の定義を変え、Briggs 対数を定義したのである．

Briggs 対数

$$x = 10^y$$

とおいたときに、

$$y = \log_{10} x$$

と表し、これを Briggs 対数という．

また、この Briggs 対数を現代では常用対数とも呼ぶ．
そして、この定義においては、１の Briggs 対数が０となる．

実は、この常用対数の性質を用いて計算尺の仕組みを説明することができるのである．

３．計算尺と対数

　まず、計算尺の仕組みを説明するために常用対数の性質を挙げておく．

$$①\ \log_{10}(A\times B)=\log_{10}A+\log_{10}B$$

$\boxed{\text{証明}}$

$$r=\log_{10}A \qquad s=\log_{10}B$$

とおくと、 $A=10^r \qquad B=10^s$

となる．また、 $A\times B=10^r\times 10^s=10^{r+s}$

より、 $\log_{10}A+\log_{10}B=r+s=\log_{10}(A\times B)$ （証明終）

同様にして、 $\dfrac{10^r}{10^s}=10^{r-s}$ を用いて

$$②\ \log_{10}(A\div B)=\log_{10}A-\log_{10}B$$

となることを示すことができる．

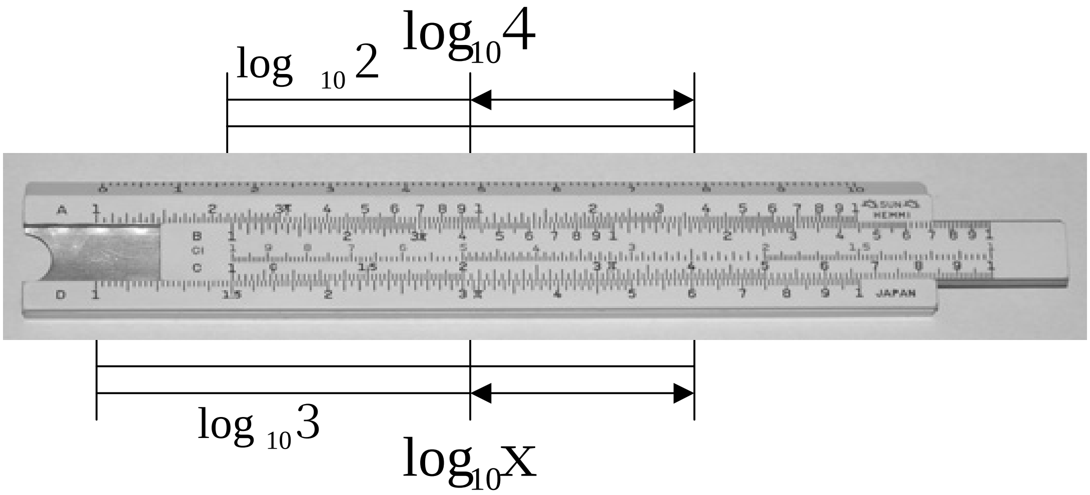
②の証明を考えてみよう．

この性質を踏まえて、計算尺を用いて比例式を解くことができる仕組みを探っていこう．

◎比例式が解けることを常用対数の性質を用いて説明しよう．

比例式は、C 尺と D 尺を用いて解くのであった．

実は、C 尺と D 尺は尺全体を１としたときの常用対数そのものの値が目盛られているのである！



C 尺と D 尺を見ると・・・

$$\log_{10}x-\log_{10}3=\log_{10}4-\log_{10}2$$

$$\log_{10}\frac{x}{3}=\log_{10}\frac{4}{2}$$

$$\log_{10}\frac{x}{3}-\log_{10}2=0$$

$$\log_{10}\frac{x}{3}\times\frac{1}{2}=0$$ **よって** $$\frac{x}{6}=1$$

したがって、 $$x=6$$

このようにして、計算尺による比例式の解き方を対数の性質を用いて説明することができた．

４．まとめ

15 世紀から 17 世紀前半にかけての大航海時代において、ヨーロッパ各国は、新航路や新大陸を探し求めて航海に出ることが頻繁になっていた．

航海をするには天文航法と呼ばれる航海術をとり、天体観測により自分の船の位置を確認しながらあらかじめ決められた航路にしたがって船を進めていった．航路に従うには、天体観測による観測値をすばやく計算することが必要とされていた．

すばやく計算するためにはどのような工夫が必要なのかという問題の解決に大きく貢献したのが John Napier(1550ー1617）であった．彼は等差数列と等比数列との対比により、乗法や除法を加法や減法に変換する法則として、対数を発見した．

こうして大航海時代の航海上の必要性とその需要から生まれた対数の発見によって William Oughtred(1574ー1660)が計算尺を発明したのであった．

現在は電卓やコンピュータなどの精密な計算機によって 1970 年代まで保ち続けた計算器の代表格としての座は明け渡されたものの、歴史的に価値のあるものとして語り続けられている．