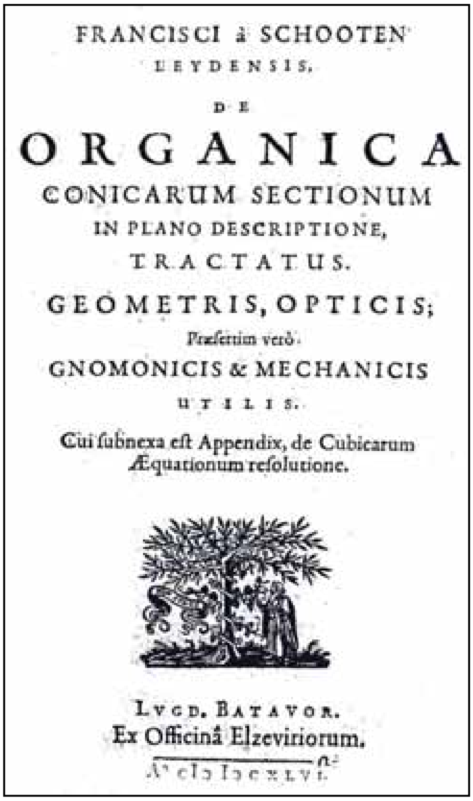
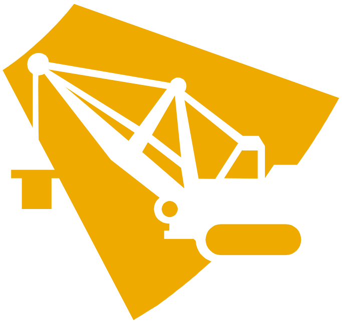
2003 年 11 月 14 日（金）3 日目

授業資料

～機構を使って描ける図形その②～


FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS,
DE
ORGANICA
CONICARUM SECTIONUM
IN PLANO DESCRIPTIONE,
TRACTATUS.
GEOMETRIS, OPTICIS;
Præſertim verò
GNOMONICIS & MECHANICIS
UTILIS.
Cui ſubnexa eſt Appendix, de Cubicarum
Æquationum reſolutione.

LVGD. BATAVOR.
Ex Officinâ Elzeviriorum,
A° CIƆ IƆ CXLVI.

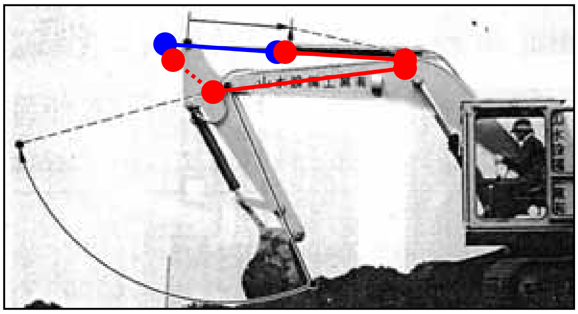


氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

授業者：筑波大学修士課程１年　教育研究科教科教育専攻数学教育コース
石川智史

１　前回までの授業の復習

機構―機械にある運動をさせる一組の物体の組み合わせ

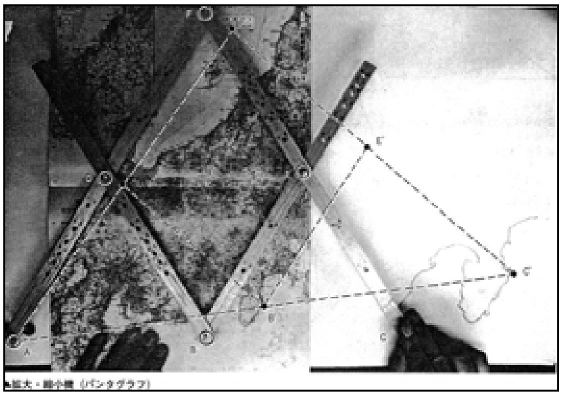


身近な機構の例①

パワーショベル

直線運動を回転運動へ

爪型の機構―倍速回転

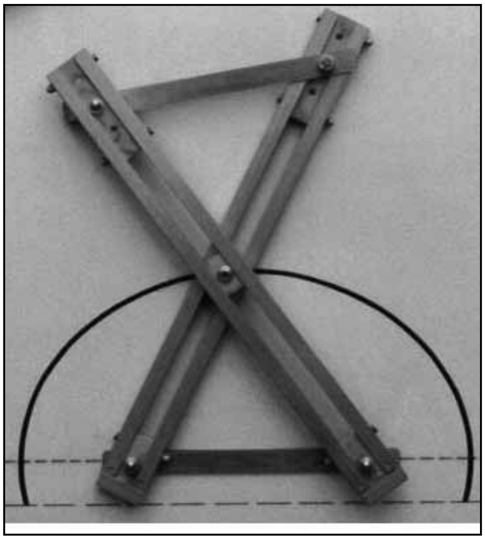


身近な機構の例②

パンタグラフ（製図器）

相似な図形の作図

点対称な図形の作図



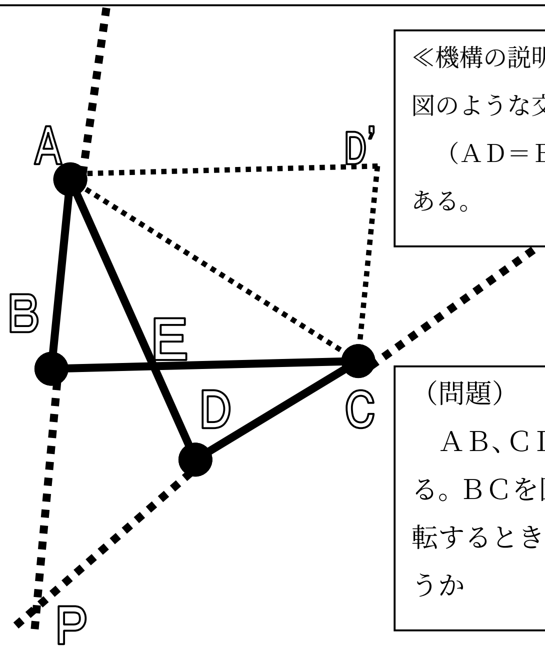
「交叉平行四辺形」型の機構

楕円の作図

2　機構によって描ける図形

「交叉平行四辺形」型の機構

交叉平行四辺形―平行四辺形をその対角線で折り返して、できる図形。



≪機構の説明≫

図のような交叉平行四辺形型の機構ＡＢＣＤ（ＡＤ＝ＢＣ、ＡＢ＝ＣＤ、ＡＢ＜ＢＣ）がある。

（問題）

ＡＢ、ＣＤを延長してその交点をＰとする。ＢＣを固定し、点Aが点Ｂの周りを回転するとき、点Ｐはどんな軌跡を描くだろうか

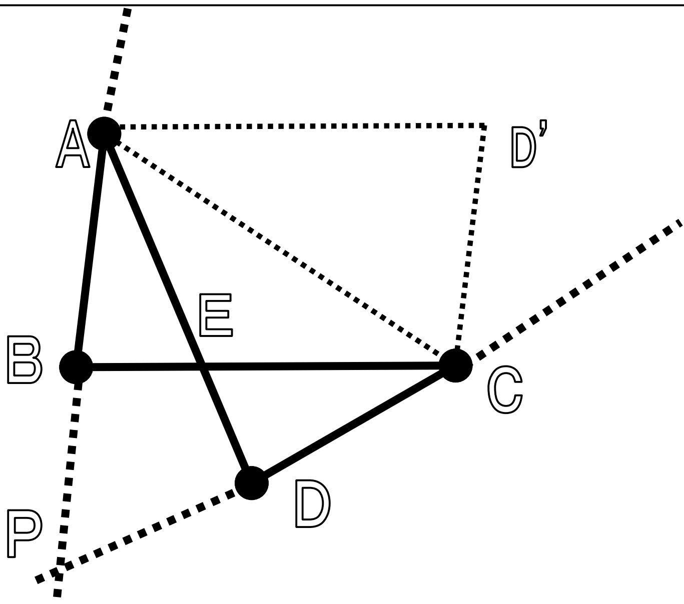
配られた厚紙製の交叉平行四辺形を動かして、交点Ｐの軌跡を調べる

<u>条件　AD=ＢＣ＝２０cm、ＡＢ=ＣＤ＝１０cm</u>

２直線の交点Ｐの軌跡はどんな図形になるのだろうか？

点Ｐはどんな点なのだろうか？

次のページで詳しく述べるが、実は双曲線の定義は「２定点からの距離の差が一定である点全体の集まり」ということになっている。
点Ｐの軌跡が双曲線になるのか確かめてみよう！



（証明）

交叉平行四辺形の性質より、

AD＝CB　―①

△ABE≡△CDE　―②（前回の講義で証明）

②より、∠PAD=∠PCB　―③

∠ADP＝１８０°－∠CDE

＝１８０°－∠ABE＝∠CBP　―④

①③④より１辺と両端の角が等しいので、

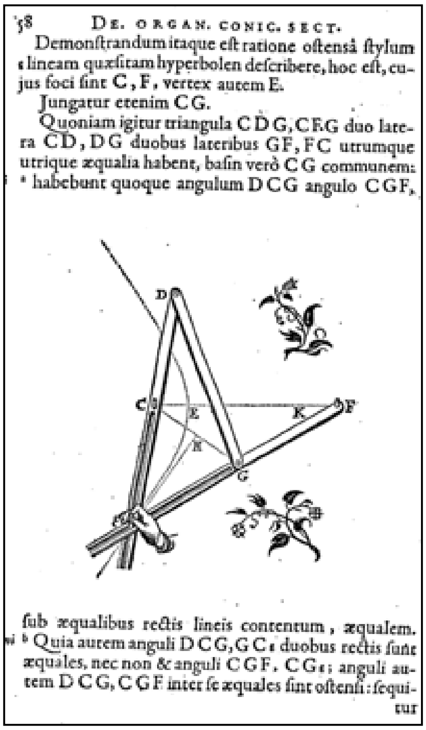
（　　　　　　　　　）

よってCP－BP＝CP－（　　　）＝（　　　）（一定）

つまり、点ＰはB、Ｃからの距離の差が常に一定となる。

3　「双曲線」の定義

　この時間で機構を使って描いた図形は「双曲線」というものである。F.VAN SCHOOTEN は、このテキストの表紙にもなっている『ORGANICA』という本の中で、今日の授業で使った道具と同じ方法で双曲線を描いている（下記の絵）。



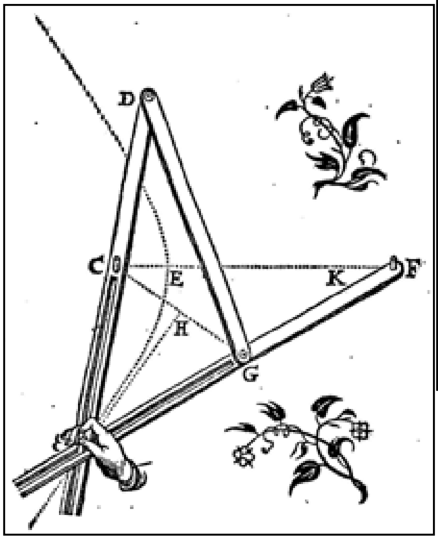
58　DE. ORGAN. CONIC. SECT.

Demonſtrandum itaque eſt ratione oſtenſâ ſtylum ε lineam quæſitam hyperbolen deſcribere, hoc eſt, cujus foci ſint C, F, vertex autem E.

Jungatur etenim CG.

Quoniam igitur triangula CDG, CFG duo latera CD, DG duobus lateribus GF, FC utrumque utrique æqualia habent, baſin verò CG communem: habebunt quoque angulum DCG angulo CGF,

sub æqualibus rectis lineis contentum, æqualem. Quia autem anguli DCG, GCε duobus rectis ſunt æquales, nec non & anguli CGF, CGε; anguli autem DCG, CGF inter ſe æquales ſint oſtenſi: ſequitur



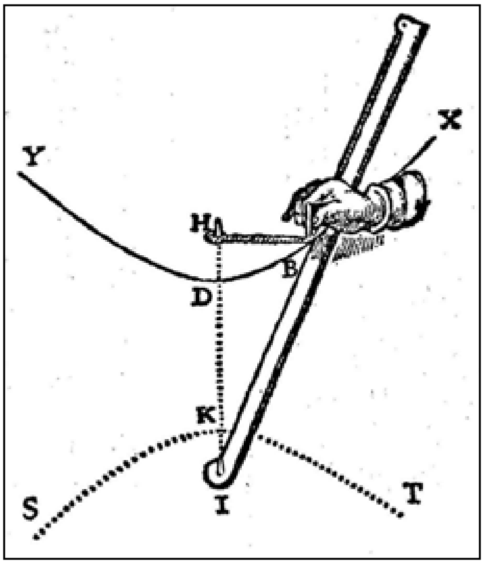
スコーテン『ORGANICA（機構学）』

　KF と CE を同じ長さとし、直線 EK と重ねる；準備として、金属、木、あるいは丈夫な材料から、3 つの定木（まっすぐな棒）CD,DG,GF をとる；次に、CD と GF を直線 EK につなぐ；DG は CF と同じ長さにする。定木 CD,GF を C,G の方向に延長する。その定木の中には溝があり、溝の幅と合う丸い円柱状のピンでつながれていて、双曲線はその連結点で描かれる。C と F をつなぐ定木は動かないので省き、C と F は固定し、一方 D と G は定木 DG でつながれる。これらがどのように動くのかを注意深く見る。ピンを溝に沿って動かすと、確かに定木 CD と GF の交点は E を通り、CD,GF は C,F を中心にして回転し、E から ε へ線が描かれる：平面上に描かれる曲線 E ε は双曲線の一部である。ところで、CF を固定したままで、同様にしてもう一つ導ける。前述の定木 CD,GF を D,F の方向に伸ばすと、交点によって向かい合う位置に双曲線が描ける。

（和訳）発表者

（注）ε：CD と FG を延長した線の交点

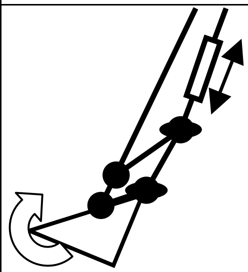
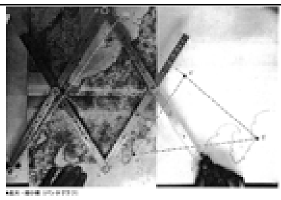
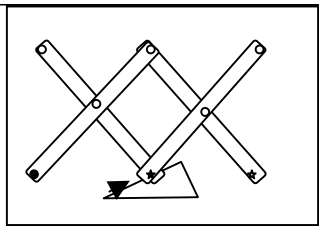
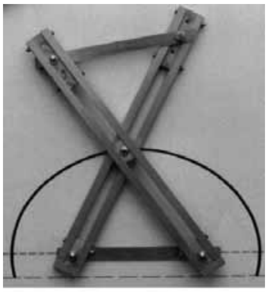
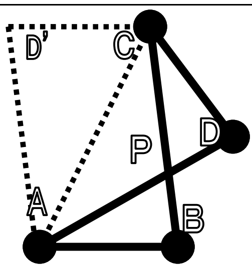
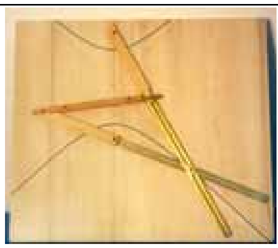
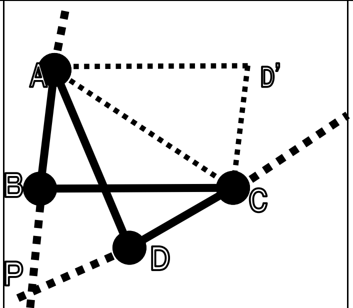
デカルトは著書『屈折光学』において、双曲線を次のように定義している（右側の絵参照）。



「花壇の装飾を規則正しく配列するために双曲線を使っている一人の庭師を紹介しょう。彼は二本の杭を点H、I に立てる。長い定規の一端にもう少し短い紐を結びつけ、その定規の他端に穴を開け、I にはめる。その紐の他端に環をつけ、これを H にはめる。次に指を定規と紐のくっついている点Ｘにおき、そして庭師は指をそこから D まで滑らせる。ただし常に点Ｘから指が紐に触れる箇所まで張りついたように紐を定規にくっつけ、しかもぴんと張っているようにする。このようにして、指を下げるにつれてこの定規を杭 I のまわりに回らせると、庭師は地面の上に曲線ＸBD を画く。これが双曲線の一部である。そののち、その定規をもう一つの側、Y の方に回し、同じようにして双曲線の残りの部分 YD を画く。さらに紐の環を杭 I にはめ、定規の端を杭 H にはめるならば、もう一つのまったく相似形でさきのに反対向きの双曲線 SKT が画かれるであろう。」

（引用　デカルト著作集Ｉ　屈折光学　青木靖三・水野和久共訳　白水社）

４　授業で扱った機構

時間	写真	機構	特徴
1			直線運動を円運動へ変換 倍速回転
1			拡大・縮小 点対称移動
2			楕円の作図
3			双曲線の作図

５　まとめ

機構―機械にある運動をさせる一組の物体の組み合わせ

<u>機構の多様性</u>

機構は、棒を用いて作られた機構の他にも、チェーン・ベルト・歯車・ねじ・てこ・カム・ワイヤー・滑車などを用いたものが数多く存在する。

今回の授業では棒を用いた機構の中から、棒を４本接続した場合で、しかも２組の棒の長さがそれぞれ等しいという特別な場合を考えた。

それらは、棒を接続する順番や、交叉の有無によって凧型の機構（１時間目)、交叉平行四辺形型の機構（２・３時間目）を作り出した。

また、同じ交叉平行四辺形型の機構も固定する棒によって違う動きをすることがわかった。

↓

『機構は構成する部品・組み合わせ等によって多様な働きをする』

<u>機構によって描ける図形～楕円と双曲線～</u>

２・３時間目で機構を使って描ける図形として楕円・双曲線を扱った。そこでは次のようなことがわかった。

「機構の短い棒を固定した場合、
長い棒の交点の軌跡は楕円を描く（２時間目)。
機構の長い棒を固定した場合、
短い棒を延長するとその交点の軌跡は双曲線を描く（３時間目)」

このことは、次のようにまとめることができる。

「交叉平行四辺形型の機構のある棒を固定し、その棒と異なる長さの２本の棒を延長し、その交点の軌跡を考える。すると固定した棒が短いほうの棒であれば交点の軌跡は楕円となり、固定した棒が長いほうの棒であれば交点の軌跡は双曲線を描く。」