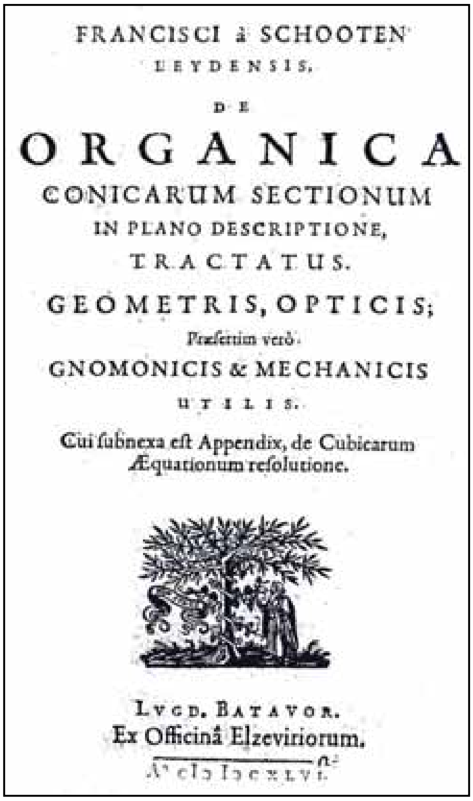
2003 年 11 月 10 日（月）研究授業 2 日目

授業資料

～機構を使って描ける図形その①～



FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS,
DE
ORGANICA
CONICARUM SECTIONUM
IN PLANO DESCRIPTIONE,
TRACTATUS.
GEOMETRIS, OPTICIS;
Præfertim verò
GNOMONICIS & MECHANICIS
UTILIS.
Cui fubnexa eft Appendix, de Cubicarum
Æquationum refolutione.

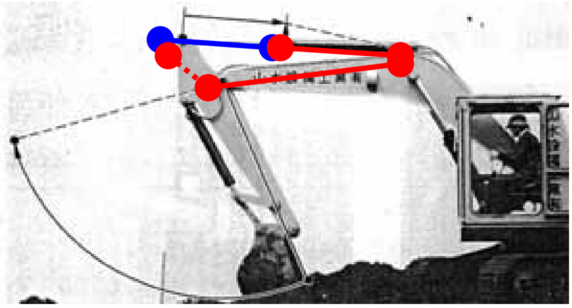
LVGD. BATAVOR.
Ex Officinâ Elzeviriorum.
Aº cIɔ Iɔ cxLVI.

氏名＿＿＿＿＿＿＿

授業者：筑波大学修士課程１年　教育研究科教科教育専攻数学教育コース
石川智史

1　前回の授業の復習

機構ー機械にある運動をさせる一組の物体の組み合わせ



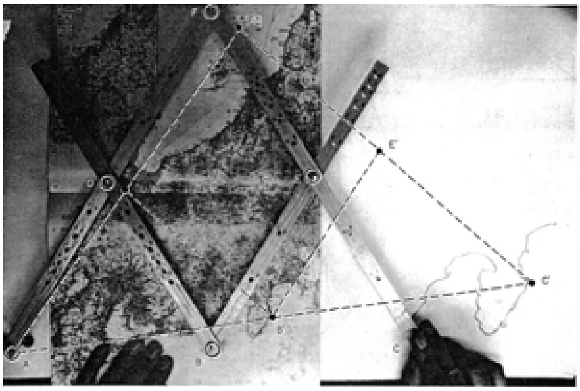
身近な機構の例

爪型の機構

パワーショベル

直線運動を回転運動へ

倍速回転



▲拡大・縮小機（パンタグラフ）

パンタグラフ

製図器

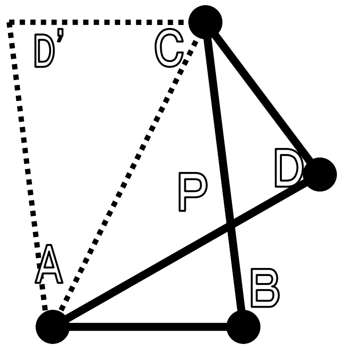
相似な図形の作図

点対称な図形の作図

２　機構によって描ける図形

「交叉平行四辺形」型の機構

交叉平行四辺形―平行四辺形をその対角線で折り返して、できる図形。コントラパラレログラムともいう。



≪機構の説明≫

図のような交叉平行四辺形型の機構ＡＢＣＤ（ＡＤ＝ＢＣ、ＡＢ＝ＣＤ、ＡＢ＜ＢＣ）がある。点ＰはＡＤとＢＣの交点である。

（問題）

ＡＢを固定し、点Ｄが点Ａの周りを回転するとき、点Ｐはどんな軌跡を描くだろうか

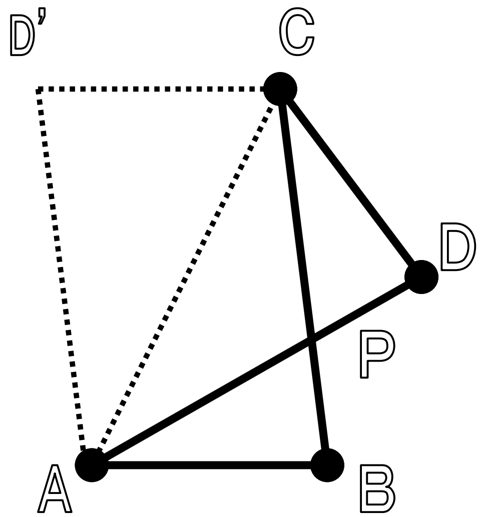
配られた厚紙製の交叉平行四辺形を動かして、交点Ｐの軌跡を調べる

条件　AD=ＢＣ＝２０cm、ＡＢ=ＣＤ＝１０cm

点Ｐの軌跡はどんな図形になるのだろうか？

点Ｐはどんな点なのだろうか？

この機構において、点Ｐの軌跡は円をつぶしたような図形を描くことがわかっている。なぜなのだろうか？
次のページで詳しく述べるが、実は楕円の定義は「ある２点からの距離の和が等しい」ということになっている。はたして、点Ｐの軌跡は楕円なのだろうか？



（証明）
平行四辺形ＡＢＣＤ'の対角線ＡＣに対してＤ'を線対称移動したものがＤであるから、△ＡＣＤは△ＡＣＤ'を折り返した図形となる。よって、

ＣＤ＝ＣＤ'=ＡＢ　―①
∠ＣＰＤ＝∠ＡＰＢ　―②
∠ＣＤＡ＝∠ＣＤ'Ａ＝∠ＡＢＣ　―③
②③より∠ＰＣＤ＝∠ＰＡＢ　―④
よって①③④より１辺とその両端の角が等しいので、
（　　　　　　　　）―⑤
従って、⑤よりＡＰ＋ＢＰ＝ＡＰ＋（　　　）＝（　　　）
つまり、点ＰはＡ、Ｂからの距離の和が常に一定となる。

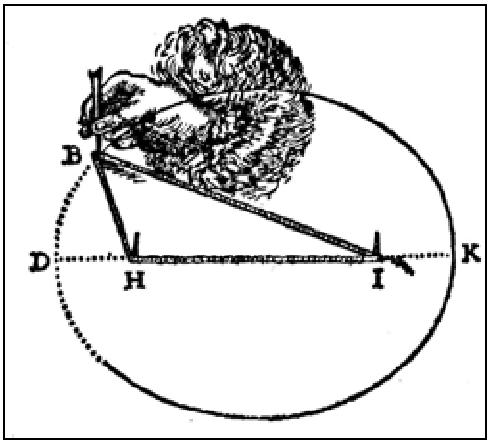
3　「楕円」の定義

　この時間で機構を使って描いた図形は「楕円」というものである。F.VAN SCHOOTEN は、このテキストの表紙にもなっている「ORGANICA」という本の中で、今日の授業で使った道具と同じ方法で楕円を描いている（下記の右側の絵）。

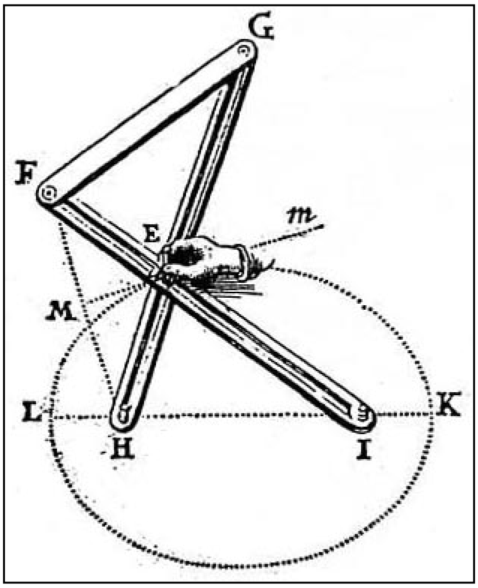
　デカルトは著書「屈折光学」において、楕円を次のように定義している（下記の左側の絵）。

「地面の２本の杭、たとえば１本を点Hに、もう１本をＩに立てる。１本の紐の両端を結び合わせ、ここのＢＨＩに見るように２本の杭の回りにかける。次に指先をこの紐にかけ、紐が同じように張るよう、いつも紐から同じ力で引っ張って、指を２本の杭の周りに回す。すると、地面に曲線ＤＢＫが画かれ、これが楕円である」

（引用　デカルト著作集Ｉ　屈折光学　青木靖三・水野和久共訳　白水社）

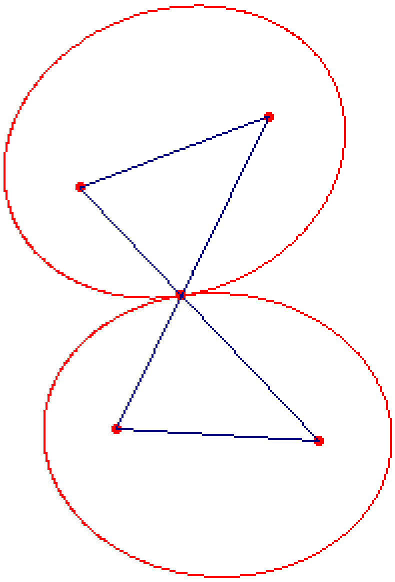


デカルト　「屈折光学」



スコーテン ORGANICA

４　楕円歯車



コントラパラレログラムの交点は楕円を描くことがわかったが、この時、描かれた楕円と交点Ｐで接している楕円が存在する。すなわち、楕円の周りをもう１つの楕円が接触しながら滑らずに回転する。

５　まとめ

機構について

前回の授業で凧型の機構であるルーローの倍速回転器なるものを紹介した。それは、長さの等しい２組の棒を連続に接続して作ったものだった。そして、今日の講義では同じ部品である、長さの等しい２組の棒を交互に接続し、交叉させることで楕円の作図器を作った。

このように機構では、棒を４本接続したものに限定したとしても、その４本の長さだけでなく、その接続する順番や、交叉の有無によって性質の異なる機構を作り出すことができる

楕円の定義－２定点からの距離の和が一定である点の軌跡を楕円という。ただし、２定点からの距離の和は、２定点の距離よりも大きいものとする。