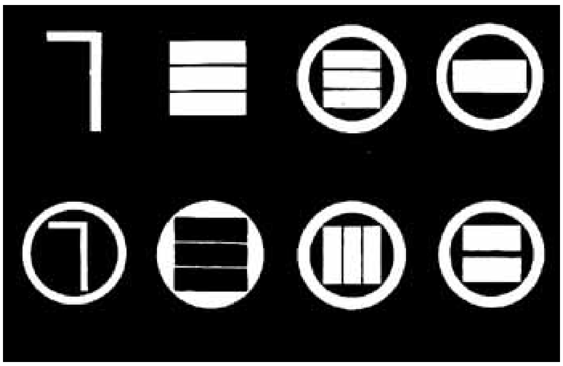
和算入門

最終章　天元術解決編

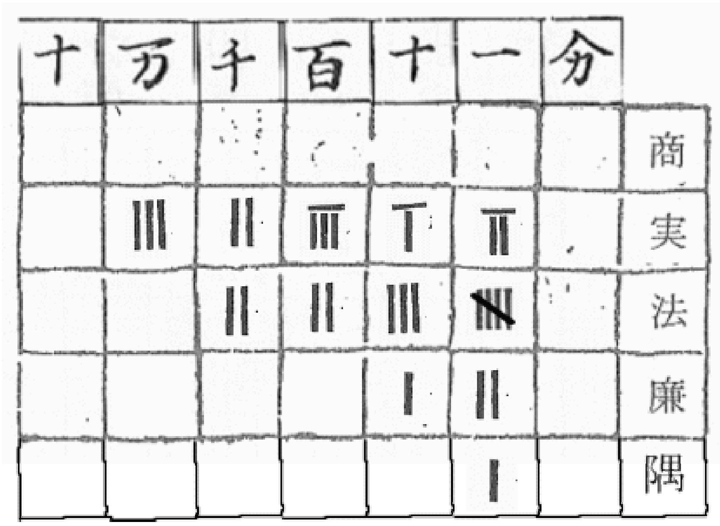


0. 前回の復習

前回の授業では、未知数 x を表す「天元の一」を用いて、算木と算盤で方程式を表す方法を学んだ。『算法天元指南』によると、現在の書き方で

$$x^3+12x^2-2234x+32867=0$$

と表される方程式は、次のように表す。



このことから、次のようにまとめることができる。

・・・・・・＝0 の方程式に対して
　「実」には定数項
　「法」には x の係数
　「廉」には x^2 の係数
　「隅」には x^3 の係数
　　　・・・・・・
を置く。

では、このように方程式を算木で表したら、どのように解いていったらいいのだろうか？？

1. 天元術の方法

方程式 $x^2+4x-221=0$ を『算法天元指南』に従って解いてみる。

万	千	百	十	一	分	
						商
	―	2	2	1		実
				4		法
				1		廉

「廉」に x^2 の係数 1、
「法」に x の係数 4、
「実」に定数項－221
を置く

万	千	百	十	一	分	
						商
	―	2	2	1		実
			4			法
		1				廉

【手順 0】
(次の手順 2 の操作から概算して)解は 2 桁。よって「廉」が 2 桁、「法」が 1 桁左に動く。

万	千	百	十	一	分	
			1			商
	―	2	2	1		実
			4			法
		1				廉

【手順 1】
(次の手順 2 の操作から概算して)解の十の位を 1 と推定し、商に立てる。

万	千	百	十	一	分	
			1			商
	―	2	2	1		実
		1	4			法
		1				廉

【手順 2 Step1】
「商」を「廉」にかけて、1×1＝1。この 1 を「法」に加える。

万	千	百	十	一	分	
			1			商
		―	8	1		実
		1	4			法
		1				廉

【手順 2 Step2】
「商」を「法」にかけて、1×14＝14。この 14 を「実」に加える。

万	千	百	十	一	分	
			1			商
		―	8	1		実
		2	4			法
		1				廉

【手順 2 Step3】
「商」を「実」にかけて、1×1＝1。この 1 を「法」に加える。

万	千	百	十	一	分	
			1			商
		―	8	1		実
			2	4		法
				1		廉

【手順 3】
「廉」と「法」を右に 1 回動かす。

万	千	百	十	一	分	
			1	3		商
		−	8	1		実
			2	4		法
				1		廉

【手順 1】
(次の手順 2 の操作から概算して)解の一の位を 3 と推定し、商に立てる。

万	千	百	十	一	分	
			1	3		商
		−	8	1		実
			2	7		法
				1		廉

【手順 2 Step1】
「商」を「廉」にかけて、3×1＝3。この 3 を「法」に加える。

万	千	百	十	一	分	
			1	3		商
						実
			2	7		法
				1		廉

【手順 2 Step2】
「商」を「法」にかけて、3×27＝81。この 81 を「実」に加える。

このようにして、解 13 を求めている。「開平方」と同じように規則性をまとめてみよう。

1.1 天元術の規則性

天元術の方法は、次のようにまとめられる。

・ 天元術による方程式の解法も、開平方と同じように、次のような手順を繰り返して 1 桁ずつ答えを求めていく。

(手順 0)答えの桁数の見当をつけて、
「廉」**「法」を**何回か左に移動させる。
この時、「廉」は 2 桁、「法」は 1 桁ずつ移動。

(手順 1)答えの 1 桁目を推測して、「商」に立てる。
この時、「商」に立てる数は、次の手順 2 を行ったとき、「実」が **0 をまたがないような最大の数**を選ぶ。

(手順 2)「商」に立てた数を使って、次のような操作を行う。

[Step1]「商」に立てた数を「廉」にかけて、「法」に加える。

[Step2]「商」に立てた数を「法」にかけて、「実」に**加える。**
★この時に、「実」がピタリ 0 になったらおしまい。

[Step3]「商」に立てた数を「廉」にかけて、「法」に加える。
★この手順では、**全て足し算で**進められる!!

(手順 3)「隅」「廉」「法」を 1 回右に移動させる。
この作業が終わったら、手順 1 に戻る。

天元術と開平方がほとんど同じやり方であることに気づいただろうか？この 2 つを比較してみよう。

1.2 天元術と開平方

2 日目に「6241 の平方根」を、開平方で求めた。
今度は、「方程式$x^2-6241=0$ の解」を天元術で求めてみよう。
解は当然、2 日目と同じ 79 が出てくるはずである。

万	千	百	十	一	分	
						商
ー	6	2	4	1		実
						法
				1		廉

「廉」に x^2 の係数 1、
「実」に定数項－6241、
を置く

万	千	百	十	一	分	
						商
ー	6	2	4	1		実
						法
		1				廉

【手順 0】
(次の手順 2 の操作から概算して)解は 2 桁。よって「廉」と「法」が左に 1 回動く。

万	千	百	十	一	分	
			7			商
ー	6	2	4	1		実
						法
		1				廉

【手順 1】
(次の手順 2 の操作から概算して)解の十の位を 7 と推定し、商に立てる。

万	千	百	十	一	分	
			7			商
ー	6	2	4	1		実
		7				法
		1				廉

【手順 2 Step1】
「商」を「廉」にかけて、7×1＝7。この 7 を「法」に加える。

万	千	百	十	一	分	
			7			商
ー	1	3	4	1		実
		7				法
		1				廉

【手順 2 Step2】
「商」を「法」にかけて、7×7＝49。この 49 を「実」に加える。

万	千	百	十	一	分	
			7			商
ー	1	3	4	1		実
	1	4				法
		1				廉

【手順 2 Step3】
「商」を「廉」にかけて、7×1＝7。この 7 を「実」に加える。

万	千	百	十	一	分	
			7			商
ー	1	3	4	1		実
		1	4			法
				1		廉

【手順 3】
「廉」と「法」を右に 1 回動かす。

万	千	百	十	一	分	
			7	9		商
−	1	3	4	1		実
		1	4			法
				1		廉

【手順 1】
(次の手順 2 の操作から概算して)解の一の位を 9 と推定し、商に立てる。

万	千	百	十	一	分	
			7	9		商
−	1	3	4	1		実
		1	4	9		法
				1		廉

【手順 2 Step1】
「商」を「廉」にかけて、
9×1＝9。この 7 を「法」に加える。

万	千	百	十	一	分	
			7	9		商
						実
		1	4	9		法
				1		廉

【手順 2 Step2】
「商」を「法」にかけて、
9×149＝1341。この 1341 を「実」に加える。

「天元術」と「開平方」を比較することによって、次のことが分かる。

開平方で平方根を求めることと、

天元術で方程式 $x^2 - a = 0$ を解くことは同じ。

開平方を一般化したものが天元術である。

ここまでで、今まで残してきた謎の一部を解明することができた。

《謎 1》最初に「廉」に置いた 1 は何を意味するのだろうか？
――――(答え)平方根を求める代わりに、
方程式 $x^2 - a = 0$ を解くと考えたときの、
x^2 の係数、「１」を意味する。
《謎 3》「廉」「法」「実」に現れる数は何を意味するのだろうか？
――――(答え)方程式の定数項が「実」、x の係数が「法」、
x^2 の係数が「廉」、x^3 の係数が「隅」、……。
だが、計算途中で出てくる数はまだ分からない。

残っている謎はあと３つ。

《謎 2》手順 2 で行った作業は、何を意味するのだろうか？
《謎 3 改》計算途中に「廉」「法」に現れる数は何か？
《謎 4》手順 0 と手順 3 で行った、「廉」と「法」の移動は
何を意味するのだろうか？
また、何故「廉」は 2 桁、「法」は 1 桁ずつ移動するのだろうか？

2. 天元術解決編

例によって、和算書には理屈も証明も書いておらず、問題とその解き方しか載せられていなかった。ここはひとまず、理屈と証明を重視する西洋数学の助けを借りて、天元術を分析していこう。

2.1 手順 2 の分析

解が 2(1 桁)になる 2 次方程式 $x^2+11x-26=0$ で考えてみよう。

万	千	百	十	一	分	
						商
		－	2	6		実
			1	1		法
				1		廉

「廉」に x^2 の係数 1、
「方」に x の係数 11、
「実」に定数項－26、
を置く

万	千	百	十	一	分	
				2		商
		－	2	6		実
			1	1		法
				1		廉

【手順 0&1】
(次の手順 2 の操作から概算して)解は 2。よって「廉」と「法」は動かない。商に 2 を立てる。

万	千	百	十	一	分	
				2		商
		－	2	6		実
			1	3		法
				1		廉

【手順 2 Step1】
「商」を「廉」にかけて、2×1＝2。この 2 を「法」に加える。

万	千	百	十	一	分	
				2		商
						実
			1	3		法
				1		廉

【手順 2 Step2】
「商」を「法」にかけて、
2×13＝26。この 26 を「実」に加える。

手順 2 をする前と後で、「廉」「法」「実」に現れる数を比較してみよう。

	廉	法	実
手順 2 の前	1	11	－26
↓	2 倍	＋2 2 倍	＋2 6
手順 2 の後	1	13	0

手順 2 は・・・
組立除法をやっている！

組立除法によって、

$$x^2+11x-26=(x-2)(x+13)$$

と変形したことになる。

2.2 天元術と組立除法

比較のため、もう 1 度 $x^2+4x-221=0$ を解いてみよう。解は 13 になるはずである。

万	千	百	十	一	分	
						商
	−	2	2	1		実
				4		法
				1		廉

「廉」に x^2 の係数 1、
「方」に x の係数 4、
「実」に定数項−221、
を置く

万	千	百	十	一	分	
			1	(0)		商
	−	2	2	1		実
			4			法
		1				廉

【手順 0&1】
解は 2 桁で、十の位は 1 である。「法」は 1 桁、「廉」は 2 桁左に動かす。

万	千	百	十	一	分	
			1	(0)		商
	−	2	2	1		実
		1	4			法
		1				廉

【手順 2 Step1】

万	千	百	十	一	分	
			1	(0)		商
		ー	8	1		実
		1	4			法
		1				廉

【手順 2 Step2】
ここまでで、

$x^2+4x-211$

を、10 で組立除法して

$(x-10)(x+14)-81$

とした。

万	千	百	十	一	分	
			1	(0)		商
		ー	8	1		実
		2	4			法
		1				廉

【手順 2 Step3】
ここまでで、

$x+14$

を 10 で組立除法して、

$(x-10)+24$

よって

$x^2+4x-211$
$=(x-10)\{(x-10)+24\}-81$

万	千	百	十	一	分	
			1	(0)		商
		ー	8	1		実
			2	4		法
				1		廉

【手順 3】
$x-10=y$ と置き換えて、
もとの方程式を

$y^2+24y-81$

とする。

万	千	百	十	一	分	
			1	3		商
		ー	8	1		実
			2	4		法
				1		廉

【手順 1】

万	千	百	十	一	分	
			1	3		商
		−	8	1		実
			2	7		法
				1		廉

万	千	百	十	一	分	
			1	3		商
						実
			2	7		法
				1		廉

【手順 2 Step1&2】

$y^2+24y-81$

を 3 で組立除法している。

$y^2+24y-81$

$=(y-3)(y+27)$

この頃、負の解は考えていなかったので、 $y=3$

よって、

$x=y+10=3+10=13$

解が 13 となる方程式 $x^2+4x-221=0$ を、10 で組立除法して

$(x-10)\{(x-10)+24\}-81=0$ と変形する。

これに対して、 $x-10=y$ と置きかえることによって、

解が 3 となる方程式 $y^2+24y-81=0$ とした。

これを 3 で組立除法して、 $(y-3)(y+27)=0$ とした。

⇩

天元術は、組立除法を用いて、

解が 1 桁減った方程式を作る方法である。

2.3 謎は全て解けた??

残っていた《謎 2》《謎 3'》《謎 4》をまとめる。

《謎 2》手順 2 の作業の意味は??
——————**組立除法をやっていた**。
《謎 3'》「実」・「法」・「廉」・・・の数の意味は？
——————組立除法の結果として現れる数。
《謎 4》手順 0 と手順 3 での、
「法」・「廉」・・・の移動の意味は??
——————組立除法をしやすくする一工夫。

今回は時間の都合で 2 次方程式までしか扱わなかったが、暗算力に大きく左右される面はあるが、理論的には何次方程式でも扱えるやり方である。しかし、何次方程式でも扱える反面、算盤の構造上、使える未知数は 1 個だけであった。

これを解決したのが関孝和であった。彼は「傍書法」という全く新しい記数法を考え出し、未知数を 2 つ以上含む方程式までも扱えるようにした。彼は、久田玄哲と土師道雲が『算学啓蒙』を復刻して、日本に文字式・方程式を伝えてから 20 年そこそこで、今の数学Ⅱ・Ⅲで扱う「微分積分」や、数学 C で扱う「行列」の考えにまで、その天才的な直観力を及ばせていた。

天元術までは中国からの輸入品であったが、「傍書法」以後の日本の数学は、完全に独自の発展を遂げていったのである。

3. まとめ

江戸時代前期の日本に、未知数の x を表す「天元の一」が伝わり、日本でも文字式・方程式を扱えるようになった。劇的な変化が起こったこの時代の数学を眺めてみたのだが、どうだっただろうか？

今回の授業で、私が言いたかったことは次の 4 点である。

(1) 江戸時代の日本の数学も、なかなか高度なものだった。現代の方法では解きづらいような、係数が莫大な数になる方程式も、1 桁ずつ順番に進んで解を求めることができた。

(2) しかし和算書には、証明も理屈も書かれず、問題と答えしか書かれていなかった。当時の日本では、数学において証明や理屈はあまり重視されていなかったのかもしれない。

(3) とはいえ、現代の我々にとっては、やり方だけでなく証明や理屈が分からないと、何となくすっきりしない気もする。

(4) 当時の数学者達は、「教科書」でなく「問題集」とも言える数学書で学習し、理屈を理解していった。これは、この三日間でやったように、大変な苦労だっただろう。

これで、三日分のテキストは全て終了。御協力ありがとうございました。