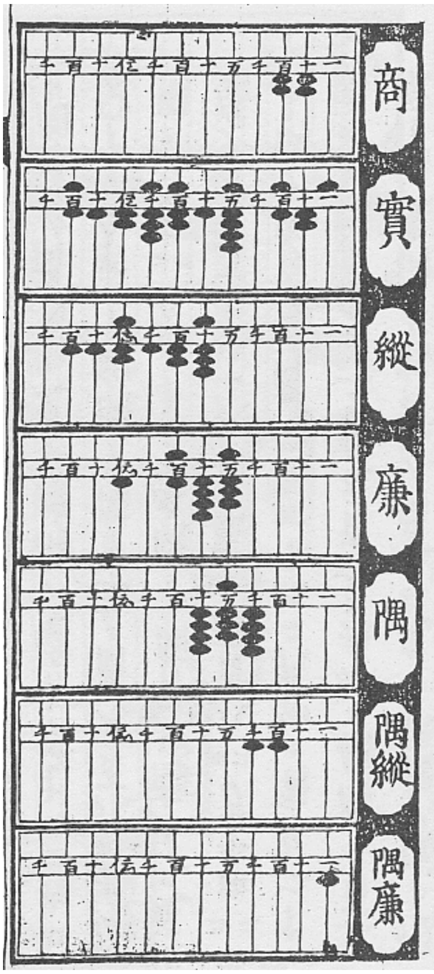
和算入門

第弐章　天元術



0. **前回の復習**

前回の授業では、平方根を求める「開平方」という方法を説明した。しかし、一体何をやっているのか分からなかったのではないだろうか？

前回の授業で分かったことは、**規則性**に注目するとこの開平方は次のように行われているということであった。

(手順 0)**まず、「廉」に 1 を置いてから、**
答えの桁数の見当をつけて、「廉」を何回か左に移動させる。
この時、「廉」は 2 桁ずつ移動し、
答えが 2 桁なら 1 回、3 桁なら 2 回･･･と移動していく

↓

(手順 1)**答えの 1 桁目を推測して、「商」に立てる。**
この時、「商」に立てる数は、次の手順 2 を行ったとき、「実」がマイナスにならないような最大の数を選ぶ。

↓

(手順 2)**「商」に立てた数を使って、次のような操作を行う。**
[Step1]　「商」に立てた数を「廉」に掛けて、「法」に足す。
[Step2]　「商」に立てた数を「法」に掛けて、「実」から引く。
★この時に、「実」がピタリ 0 になったらおしまい。
[Step3]再び「商」に立てた数を「廉」に掛けて「法」に足す。

↓

(手順 3)**「廉」と「法」を 1 回右に移動させる。**
この時、「廉」は 2 桁ずつ、「法」は 1 桁ずつ移動していく。
この作業が終わったら、手順 1 に戻る。

この(手順 1)～(手順 3)を、「**セット**」と呼ぼう。

規則性に注目すると、(手順 0)を行ってから、(手順 1)〜(手順 3)からなる「**セット**」を繰り返すことによって、1 桁ずつ平方根を求めていることになる。これで、多少見通しがよくなったのではないだろうか？

しかし、まだ謎は多く残っている。

《謎 1》最初に「廉」に置いた 1 は何を意味するのだろうか？

《謎 2》手順 2 で行った作業は、何を意味するのだろうか？

《謎 3「廉」「法」「実」に現れる数は何を意味するのだろうか？

「実」に最初に表れる数は、平方根を求める数なのだが･

《謎 4》手順 0 と手順 3 で行った、「廉」と「法」の移動は
何を意味するのだろうか？

また、何故「廉」は 2 桁、「法」は 1 桁ずつ移動するのだろうか？

残り 2 日の授業で、この 4 つの謎を解き明かしていこう。とりあえず今日の授業で、《謎 1》は解明できる予定である。

その前に、前回の復習もかねて、6331 の平方根を求めてみよう。

Column. **開平方で平方根を求めるメリット**

現代では、素因数分解をすることによって平方根を求めていく。この方法に比べると、算木を使って開平方で平方根を求める方法は、かなり面倒臭く感じられるのだが、次のようなメリットもある。

1) 22801 の平方根である 151 を求めようとする場合、151 は素数なので素因数分解するのはすごく大変。しかし開平方なら求められる。
2) 平方根が整数にならない(√が残る)場合でも、小数で何桁でも値を求められる。一の位まで求めても余りが出る場合、もう一度「廉」を 2 桁、「法」を 1 桁右に動かして、同じ操作を続ければよい。

1. 天元術

　中国の朱世傑が日本の鎌倉時代後期にまとめた『算学啓蒙(さんがくけいもう)』に、「天元」という言葉が出てくる。この「天元」というものは、当時の数学を一新する画期的な考え方であったのだが、この頃の日本ではこの考え方を理解できた人は少なかったらしく、日本では普及しなかった。

　江戸時代になって、当時の数学者達は再び『算学啓蒙』に注目し、1658年に土師(はじ)道雲と久田玄哲により『算学啓蒙』の復刻版が刊行された。　しかし、当時の日本の数学者にとっても「天元」は難しかったらしく、これを初めて理解したのは橋本伝兵衛正数という人であり、また橋本の弟子である沢口一之(さわぐちかずゆき)の著書『古今算法記』によって初めて、「天元」を使って問題を解く方法が公表された。ただ、『古今算法記』では、例によって問題と答えが書いてあるだけで、理由も説明も書いていない。ということで、「天元」の解説書である『算法天元指南』(佐藤茂春著)を読んでみよう。

何の所にても求め得んと思う所の物に天元の一を立て其とすれば、則其を得るなり。意の如くこれを求むるなり(『算法天元指南』巻之四)

《現代語訳》

どのような時にも、求めようとしているものに対して、「天元の一」を立て、それ(求めようとしているもの)とすれば、すぐにそれを得ることができる。思うままにこれを求めることができる。

→「天元の一」とは、現在の何にあたるだろうか？

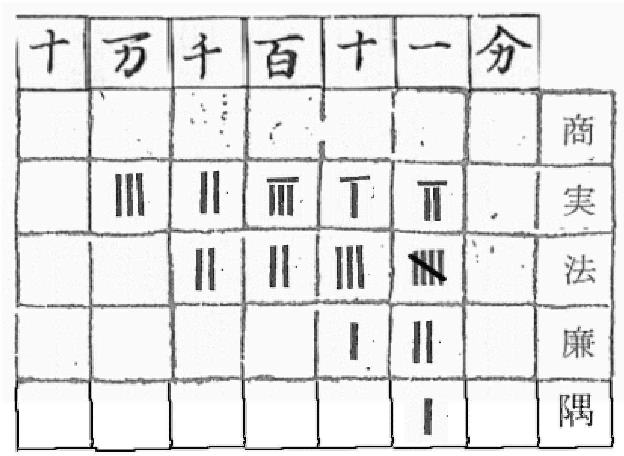
1.1 **天元術による方程式の解法**

「天元の一」とは、今でいう未知数の x を表す。これが中国より伝わったことによって、**文字式・方程式を扱える**ようになり、日本の数学は飛躍的に発展するようになった。

『算法天元指南』によると、現在

$$x^3+12x^2-2234x+32867=0$$

と書き表される方程式は次のように表す。



ここで、算木の上に乗っている「＼」は、負の数を表す。つまり、実際には「実」「廉」「隅」は正の数なので赤い算木、「法」だけ負の数なので黒い算木で表す。(白黒で紙に書く場合、このようにすることが多い。)

つまり、「・・・・・・=0」という形の方程式に対して、

「実」に定数項、「法」に x の係数、
「廉」に x^2 の係数、「隅」に x^3 の係数、・・・

と置いていくのである。

では、この方程式をどのように解くのだろうか？因数定理によって解を見つけるのは難しそうだが・・・

Column. **遺題継承**

13 世紀に中国で開発された「天元」が、何故 17 世紀の日本で受け入れられたのだろうか？13 世紀当時の日本人には理解できなかったというのもあるのだが、「天元」を必要とする環境があったからでもある。

この当時の日本の数学で一番の問題であったのは、佐藤正興の『算法根源記』の巻末に載せられた解答なしの問題をどう解くかということであった。この問題は、文字式・方程式を使わなければ解けない問題であったため、「天元」が伝わるまで多くの数学者を悩ませてきたのだった。

このように、文字式・方程式を必要とする状況があって、当時の数学者は「天元」に注目することができた。沢口一之は「天元術」を正しく理解して、『算法根源記』の問題を解いて『古今算法記』にまとめたのである。

この『古今算法記』の巻末にも、「天元術」でも解けない解答なしの問題が載せられていた。この問題を解こうとして苦労した結果、従来と大きく違う記数法を編み出して、新しい数学を構築することによって解いたのが関孝和であった。

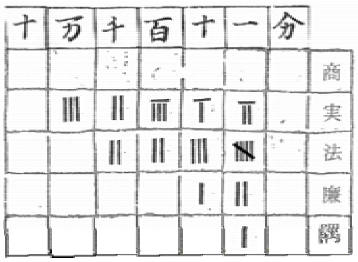
以上のように、当時の数学は、「その当時では解くのが難しい問題を巻末に載せる。その問題を解くことができた人は、また別の難しい問題を付け加えて本を出版する。それをまた別の人が解く」ということを繰り返して発展していった。これを**遺題継承**という。

遺題継承の最初となったのは、実は吉田光由の『塵劫記』であった(初日の Column 参照)。この意味においても、吉田光由は和算の歴史に欠かせない重要人物である。

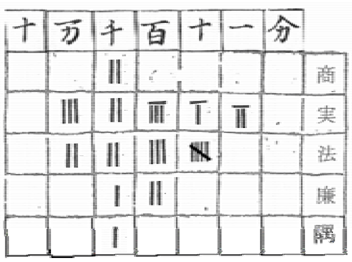
英雄伝 No.3 沢口一之

天元術を初めて正しく理解したとされる橋本正数の弟子であり、『古今算法記』において初めて天元術の解説をした。関西に住んでいた材木商であったといわれる。彼の活躍によって、日本に文字式・方程式が広まり、日本の数学は飛躍的に発展した。

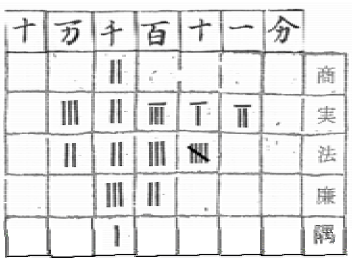
『算法天元指南』の原典	矢代の現代語訳
図の如く開方の式を置いて立方に之を開くとき、まず図の如く一十百と位を見上るに、(法は一階ずつ進み、廉は二階ずつ進み、隅は三階ずつ進むべし)	図のように方程式を置いて、この 3 次方程式を解くとき、まず図のように一の位、十の位、百の位と上がっていくと、(「法」は 1 桁ずつ、「廉」は 2 桁ずつ、「隅」は 3 桁ずつ進む)
百の位はなし、十の位なる故法廉隅各々一位進んで、商に廿(にじゅう)と立るなり	解の百の位はなく、十の位(から始まる)であるので、「法」「廉」「隅」はそれぞれ一回進んで、「商」に 2 と立てる。
扨　隅の千と商の廿(にじゅう)と掛け合い二一の二千を廉に加へ(隅も正算　廉も正算にて同名なる故加ふるなり)廉三千二百となるなり	さて、「隅」の 1 と「商」の 2 をかけて、2×1=2 を「廉」に加え、(「隅」も正、「廉」も正で同符合なので加える)「廉」は 32 となる
又　此の廉の三千二百と商の廿(にじゅう)と掛け合い六千四百法を減じ(廉は正算　法は負算にて異名なる故減ずるなり)法一万五千九百四拾となるなり	また、この「廉」の 32 と「商」の 2 を掛けて、32×2=64 を「法」から引き、(「廉」は正、「法」は負で異符号なので引く)「法」は 1594 となる。
扨　法の一万五千九百四拾と商の廿と掛け合い三万千八百八拾実を減じ(法は負算　実は正算にて異名なる故減ずるなり)実に九百八十七余るなり	さて、「法」の 1594 と「商」の 2 を掛けて、1594×2=3188 を実から引き(「法」は負、「実」は正で異符号なので引く)



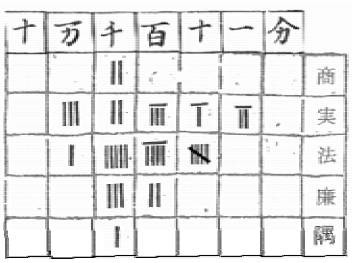
図のように、係数を縦に並べる



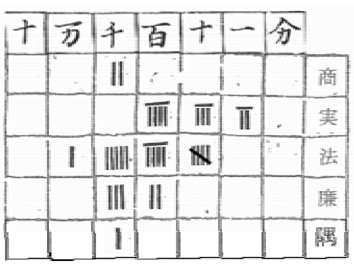
解は 2 桁だと推定される。「法」は 1 桁、「廉」は 2 桁、「隅」は 3 桁左へずれる。
先の操作を見越して、解の十の位が 2 であると推定する。



「商」に立てた 2 と「隅」の数を掛けて 2、これを真上の「廉」に加える。

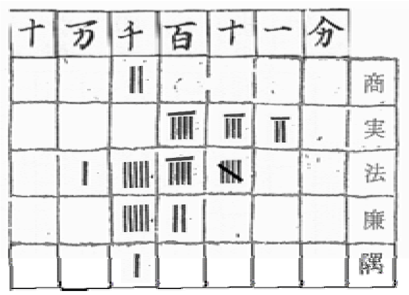


「商」に立てた 2 と「廉」の数を掛けて 64、これを真上の「法」に加える。

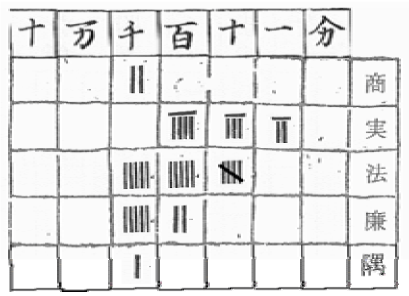


「商」に立てた 2 と「法」の数を掛けて－3188、これを真上の「実」に加える。

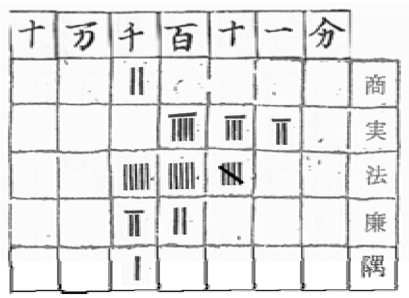
又　隅の千と商の廿を掛け合い、ニ一の二千を廉に加へ(隅も正算　廉も正算にて同名なる故加るなり)廉五千二百となるなり	また、「隅」の 1 と「商」の 2 を掛けて、2×1＝2 を「廉」に加え(「隅」も正、「廉」も正で同符号なので加える)「廉」は 52 になる
又　此の廉の五千二百と商の廿と掛け合い、一万四百を減じ(廉は正算　法は負算にて異名なる故減ずるなり)法五千五百四拾となるなり	また、この「廉」の 52 と「商」の 2 を掛けて、2×52=104 を引き(「廉」は正　「法」は負で異符号なので引く)「法」は 554 となる
又　隅の千と商の廿と掛け合いニ一のニ先を廉に加へ(隅も正算廉も正算にて同名なる故加るなり)廉七千二百となるなり	また　「隅」の 1 と「商」の 2 を掛けて、2×1=2 を「廉」に加え(「隅」も正、「廉」も正で同符号なので加える)「廉」は 72 となる
扨　法廉隅各々一位づつ退て(法は一階ずつ退き　廉は二階ずつ退き　隅は三階ずつ退くなり)	さて、「法」「廉」「隅」それぞれ 1 回ずつ右に移動し(「法」は 1 桁ずつ、「廉」は 2 桁ずつ、「隅」は 3 桁ずつ移動する)



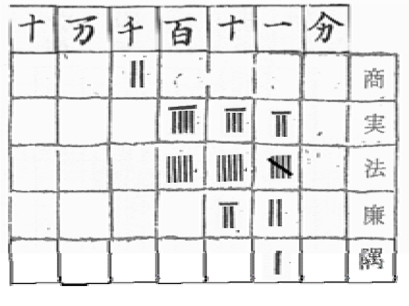
「商」に立てた 2 と「隅」の数を掛けて 2、これを真上の「廉」に加える。



「商」に立てた 2 と「廉」の数を掛けて 104、これを真上の「法」に加える。

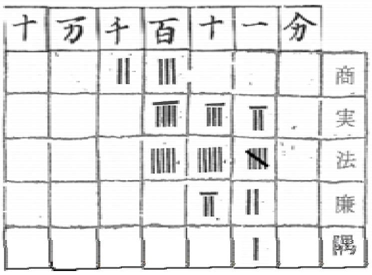


「商」に立てた 2 と「隅」の数を掛けて 2、これを真上の「廉」に加える。

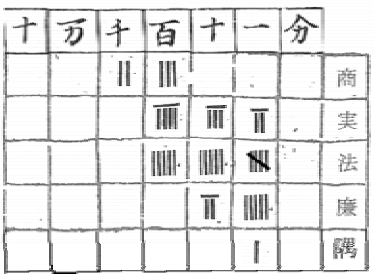


「法」は 1 桁、「廉」は 2 桁、「隅」は 3 桁右に動かす。

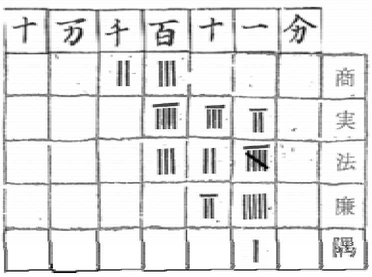
商に三と立るなり 扨　隅の一と商の三と掛け合い、三一の三を廉に加へ(隅も正算　廉も正算にて同名なる故加るなり)廉七拾五となるなり	商に 3 と立てる さて、「隅」の 1 と「商」の 3 を掛けて、3×1=3 を「廉」に加えて(「隅」も正、「廉」も正で同符合なので加える)「廉」は 75 となる
又　此の廉の七拾五と商の三と掛け合い、二百二拾五法を減じ(廉は正算　法は負算にて異名なる故減ずるなり)法三百廿九となるなり	また、この「廉」の 75 と「商」の 3 を掛けて、75×3=225 を「法」から引き、(「廉」は正、「法」は負で異符号なので引く)「法」は 329 となる
扨　法の三百二拾九と商の三と掛け合い九百八拾七実を減じ(法は負算　実は正算にて異名なるゆえ減ずるなり)払うなり	さて、「法」の 329 と「商」の 3 を掛けて、329×3=987 を「実」から引き(「法」は負、「実」は正で異符号なので引く)0 にする
此の如く実尽きて　商に廿三を得るなり	このように実はなくなって、商に 23 を得る。



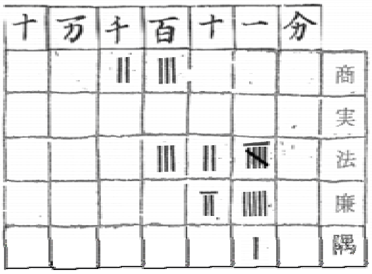
「商」に 3 を立てる。
「商」に立てた 3 と「隅」の数を掛けて 3、これを真上の「廉」に加える。



「商」に立てた 3 と「廉」の数を掛けて 225、これを真上の「法」に加える。



「商」に立てた 3 と「法」の数を掛けて－987、これを真上の「実」に加える。



実が 0 になったのでこれでおしまい。解は 23 である。

1.2 考察

　この『算法天元指南』も解法が記されているだけで、何故このようにすれば解が求められるのかということについては記述されていない。当時数学を学んでいた人達は、ここから各自で理由を考えていったのだろう。

　ところで、方程式の解法も、開平方と同じく、解を大きい方から 1 桁ずつ見つけていく方法のようだということが分かっただろうか？

　解を 1 桁決めるのに必要な操作はどのようなものだろうか？前回と同じように、下の空欄に書いてみよう。

Column. **3 次方程式の残りの解は??**

$x^3+12x^2-2234x+32867=0$ の解が $x=23$ であることが分かった。方程式にはあと 2 つ解があるはずであるのだが、この時代の数学は、長さ・面積や金額などを求める問題が主だったため、負の解は考えていなかったらしい。またその解が正であっても、解が複数になる場合には、

「翻狂の(=できの悪い)問題である」(『古今算法記』より)

と言って、答えが 1 つだけになるように問題の数値を代えることまでした。文字式・方程式が伝来してきたばかりの時期で、まだまだ発展途上だったと言うことができる。

英雄伝 No.4 佐藤茂春

1698 年に『算法天元指南』を著す。この本は、天元術の当時の解説書の中ではトップクラスの丁寧さであった。今回の授業では省略してしまったが、未知数 x を意味する「天元の一」を定義してから、文字式の作り方、計算法を示し、そこから方程式(『開方の式』といった)の作り方まで書いてある。『古今算法記』を書いた沢口一之の弟子。

1.3 考察のまとめ

・　天元術による方程式の解法も、開平方と同じように、次のような手順を繰り返して 1 桁ずつ答えを求めていく。

(手順 0)答えの桁数の見当をつけて、
「隅」「廉」「法」を何回か左に移動させる。
この時、「隅」は 3 桁、「廉」は 2 桁、「法」は 1 桁ずつ移動。

(手順 1)答えの 1 桁目を推測して、「商」に立てる。
この時、「商」に立てる数は、次の手順 2 を行ったとき、
「実」が 0 をまたがないような最大の数を選ぶ。

(手順 2)「商」に立てた数を使って、次のような操作を行う。
[Step1]「商」に立てた数を「隅」にかけて、
順番に「実」まで加えていく。
★この時に、「実」がピタリ 0 になったらおしまい。
[Step2]「商」に立てた数を「隅」にかけて、
順番に「法」まで加えていく。
[Step3]「商」に立てた数を「隅」にかけて、
「廉」に加える。
★この手順では、全て足し算で進められる!!

(手順 3)「隅」「廉」「法」を 1 回右に移動させる。
この作業が終わったら、手順 1 に戻る。

2. まとめ＆次回予告

今日の内容は次の４つだった。

(1) 開平方の練習

(2) 天元術

(3) 天元術による方程式の解法

(4)(3)の練習

　天元術による方程式の解法は、開平方の方法を拡張したものだということが分かっただろうか？これで、《謎 1》と《謎 3》が少し解けたことになる。

《謎 1》最初に「廉」に置いた 1 は何を意味するのだろうか？
――――(答え)平方根を求める代わりに、
方程式 $x^2 - a = 0$ を解くと考えたときの、
x^2 の係数、「１」を意味する。
《謎 3》「廉」「法」「実」に現れる数は何を意味するのだろうか？
――――(答え)方程式の定数項が「実」、x の係数が「法」、
x^2 の係数が「廉」、x^3 の係数が「隅」、・・・・・・。
だが、計算途中で出てくる数はまだ分からない。

残っている謎はあと２つ。

《謎 2》手順 2 で行った作業は、何を意味するのだろうか？

《謎 3 改》計算途中に「隅」「廉」「法」に現れる数は何か？

《謎 4》手順 0 と手順 3 で行った、「廉」と「法」の移動は
何を意味するのだろうか？
また、何故「廉」は 2 桁、「法」は 1 桁ずつ移動するのだろうか？

最終日に、残り 2 つの謎を解いていこう。

次回、和算入門最終章**『天元術解決編』**。和算の歴史が、また一ページ・・・