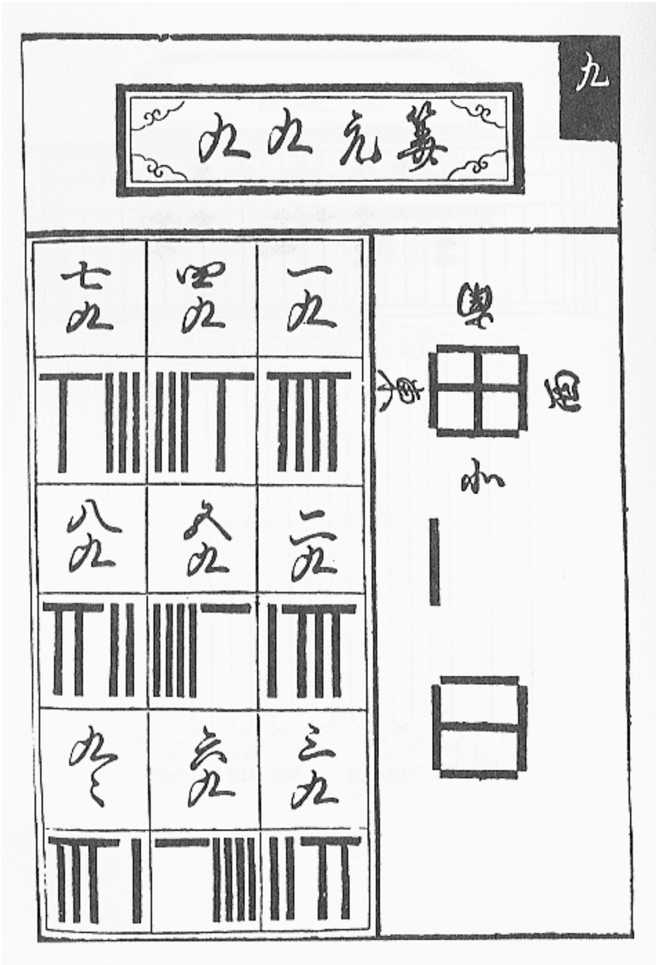
# 和算入門




## 第壹章　算木

## 0. Introduction

### 0.1 歴史的背景

1615 年(慶長 20 年)の大阪夏の陣で豊臣家が滅亡したことにより、応仁の乱から150年続いた戦乱の時代は終わり、徳川家による統治が確立した。由比正雪の乱・島原の乱などの例外があったものの、基本的には平和な時代となり、江戸・京都・大坂などの都市での経済活動が活発になってきた。この影響から、貨幣経済が地方へも浸透してきた。この頃の貨幣は金貨・銀貨・銭貨といった数種類の貨幣が、複雑な換算法で入り混じっていたため、一般庶民も計算ができないと仕事や生活に支障をきたすようになった。

今日から３時間の授業の舞台は、江戸時代前期、17 世紀半ば頃のお話である・・・

### 0.2 その頃の数学

日本の数学は、中国から輸入されたものを基にして発達した。江戸期には、古代に伝来した「算木(さんぎ)」(中国では「算籌(サンチュウ)」または「籌(チュウ)」と言っていた。) と、室町時代に伝来した**「ソロバン」**という２つの計算器具があった。しかし、現在我々が使っているアラビア数字は伝わっておらず、全て漢数字によって数字を書き表していた。筆算は知らないし、もちろん「$x$」などの記号を使った方程式もなかった。このような状況であっても、この頃の数学はなかなか高度なものであった。

### Column. この頃ヨーロッパでは･･･?

この頃、ヨーロッパでも数学において大きな転換期を迎えていた。詳しく書き始めると、テキストの分量が倍増するので書かないが、この時期に有名な数学者が多く活躍している。

Ex)　ルネ=デカルト(1596 年生まれ)
　　ピエル=ド=フェルマ(1601 年生まれ)
　　ブレーズ=パスカル(1623 年生まれ)
　　アイザック=ニュートン(1642 年生まれ)

Column. 吉田光由と塵劫記について

　『塵劫記』とは、吉田光由(1598-1672)が書いた数学書で、寺小屋での教科書(「往来物」という)として使われた。今で言う海賊版が出版されるくらいの大ベストセラーとなり、江戸時代の数学の流れに大きな影響を与えた。大きな数の呼称、少数の呼称、度量衡、九九などから始まり、当時の生活で必要とされた米・金・銀などの換算、利息、面積・体積、測量、平方根・立方根(3 乗してある数になるような数)などが示されている。これらは大抵、問題とその解き方を並べることによって説明されている。筆算による計算も方程式もない時代であったということを意識しながら、問題を考えてみよう。

[問題]油を量り分ける事。

　桶に油が 1 斗ある。7 升の桝と 3 升の桝の 2 つがある。この 2 つを使って、1 斗の油を 5 升ずつに分けなさい。(『塵劫記』巻の四、第 12 問)

[問題]大工に給料を払う事。

　上手な大工 540 人、そこそこの大工 1100 人、下手な大工 860 人の計 2500 人がいる。彼らに米を 100 石払うのだが、そこそこの大工には上手な大工より 7 合少なく、下手な大工にはそこそこの大工より 8 合少なく支払う。それぞれ 1 人にどれくらい払えばよいか？ (『塵劫記』巻の三、第 3 問)

注)「石」「斗」「升」などは体積の単位。
1 石=10 斗=100 升=1000 合=10000 勺=100000 才=だいたい 180 リットル

英雄伝 No.1 吉田光由(1578-1672)

貿易・医療・土木の多方面で活躍した京都屈指の豪商角倉一族(もともと吉田姓だったが、嵯峨角倉の地に住んだため角倉と呼ばれた)の人。京都の河川工事や朱印船貿易で有名な角倉了以の甥。了以や、その息子素庵から数学を学び、当時の社会に適合した内容の数学書を編集する。彼がいなければ、その後の和算の発展はなかっただろう。

## 1. 算木とは？

算木八（は）あかき木百八十本とくろき木百八十本　長さおの〱弐寸　あつさ二分五厘四方　算盤八きぬ（絹）にてつくる　長さ五尺にする　四角にかうし（格子）をひく　ひだりの図にく八しく（詳しく）しらするなり　算木は下よりかぞへてあがるゆへに下より一二三四五六七八九としらするよこにをく（置くを）お五と名つくるなり　拾にミつる（満つる）とき八一まひだりへあげて　一のごとくをくなり

よく〱図にて見へし（べし）

右のとをり（通りに）に算木ををくなり　拾になれば一のごとくになをして（直して）一くらいのほり（上り）てひたり（左）のかこミ（囲み）へいくなり　百より千万ミなおなし（皆同じ）事也

さんきばんきぬ（算木盤絹）にてかくのごとく（ごとく）つくりて　上にかやうに一十百のかきつけをして　ひだりに商実法のかきつけをするなり　（『数学乗除往来』より）

注)1 尺=10 寸=100 分=1000 厘=だいたい今の 30cm くらい。

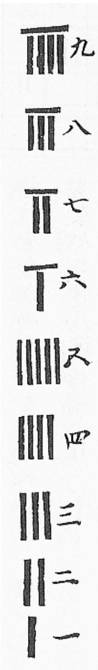
　ただ、この時代は長さの単位をはじめ、重さ・量・お金の単位も地域と時代によってバラバラであった。このため、単位の換算のためにも数学は必要であった。

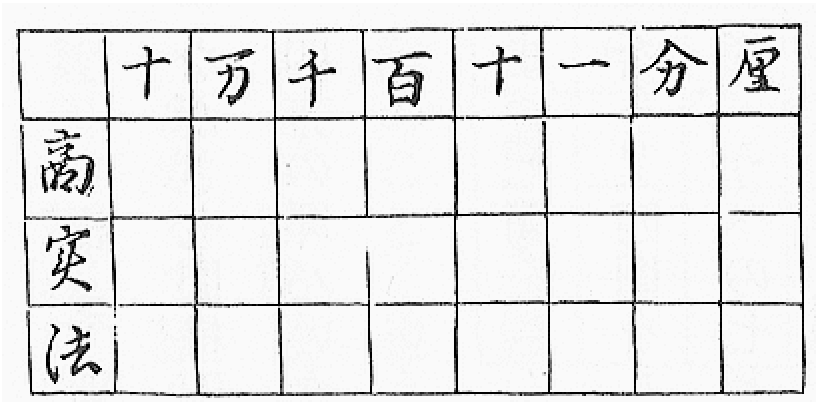
《現代語訳》

算木は、赤い木 180 本と、黒い木 180 本で、長さがそれぞれ 2 寸、太さが 2 分 5 厘四方である。算盤は絹で作り、長さを 5 尺にし、四角く格子に(なるように線を)引く。左の図に詳しく記す。算木は下から数えて上に上がるので、下から 1,2,3,4,5,6,7,8,9 と書く。横に置くのを 5 と名づける。10 になるときは、一つ真左へ上げて 1 と同じように置く。図でよく見なさい。

右のように算木を置く。10 になったら 1 のように直して 1 つ位を上がって左の四角へ行く。百から千万まで(もっと先も)みな同じである。

算盤は絹でこのように作って、上のように一十百と書き込みをして、左に商実法と書き込みをする。




図左･算木　図上･算盤　(ともに『数学乗除往来』より)

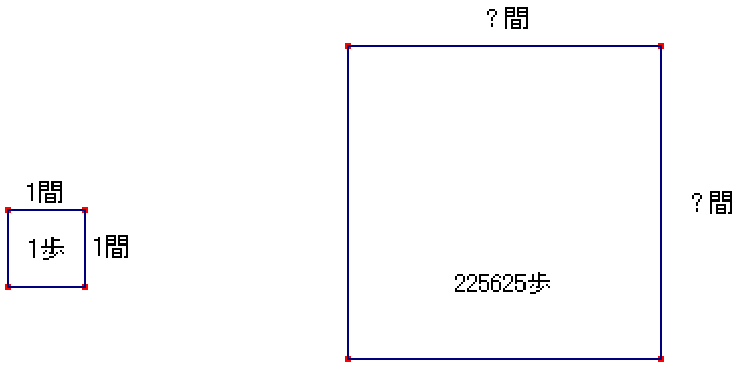
## 2. 算木による開平方〈今日のメイン!!〉

[問題] 平坪弐十弐万五千六百弐十五歩有　是を四角にしてハ何間四方になるそととふ(『古今算法記』開平方の次第より、一部改変)

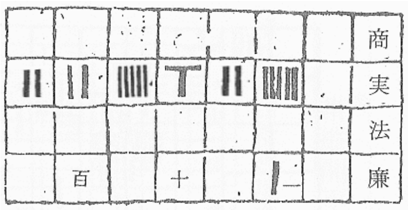
注)　平坪･･･面積のこと。

歩(ぶ)･･･面積の単位。1 間四方の面積を 1 歩(=1.8m くらい)とする。

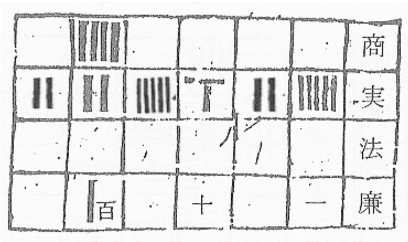
《現代語訳》面積が 225625 歩ある。これを正方形にすると、何間四方になるかと問う。



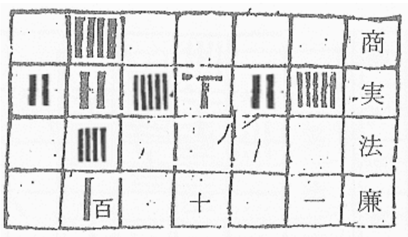
| 『古今算法記』の記述 | 矢代の現代語訳 |
| --- | --- |
| 歩数(ぶすう)弐拾弐万五千六百弐拾五歩を実に置　一算を借りて廉に置 | 面積 225625 歩を実に置き、算木を一本借りてきて廉に置く。(図１) |
| 位を見ル時千の位ハなし百の位也　先五百間四方と見て五五弐拾五万歩ハなきゆへ四百間四方と見て廉を二位上りて商に四百間と立ル | 位を見ると、(答えに)千の位はなく、百の位(から)である。まず 500 間四方と考えて、5×5=25 万歩はないので、400 間四方とみて、廉を二位上って、商に 400 間と立てる。(図２) |
| 廉ハ二行ツヽ上ル法ハ一行ツヽ上ル又さかるも如此(かくのごとし) | 廉は 2 行ずつ上る。法は 1 行ずつ上る。また下がるも同様。(だから廉は 2×2 で 4 位上がる) |
| 扨(さて)商と廉を見合九九によひ四一ノ四を法にくわへ法四と成ル | さて、商と廉を見合って、九九によって 4×1=4 を法に加え、法は 4 となる。(図３) |
| 此(この)法と商と見合九九によひ四四十六万歩実を引也(なり) | この法と商を見合って、九九により 4×4=16 万歩を実から引く。(図４) |
| 又商と廉と見合せ九九によひ四一ノ四を法にくわへ法八と成なり | また商と廉を見合って、九九により 4×1=4 を法に加え、法は 8 となり、(図５) |



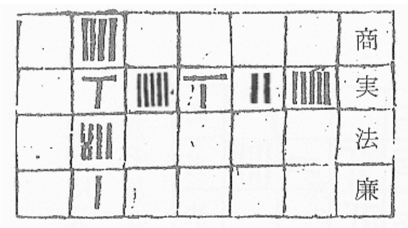

(図１)開平するためには、廉に１を置く。(何故かは、次回)



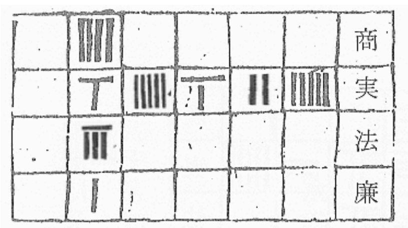

(図２)答えの最大の桁の数値を４と推測する。その最大の桁が十の位なら１回、百の位なら２回、･･･と法と廉を移動する。ただし、法は１桁ずつ、廉は２桁ずつ動く。(何故かは、これも次回)




(図３)商に立てた数と廉の数を掛けて、真上(法)に加える

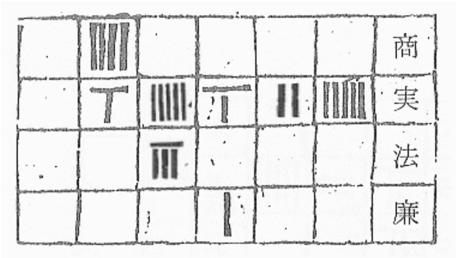



(図４)商に立てた数と法の数を掛けて、真上(実)から引く

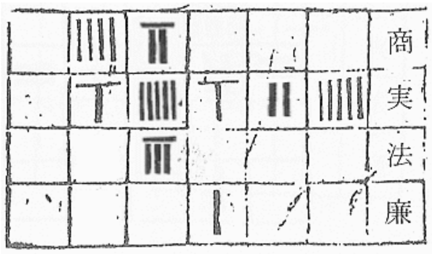



(図５)もう１度商に立てた数と廉の数を掛けて、真上(法)に加える

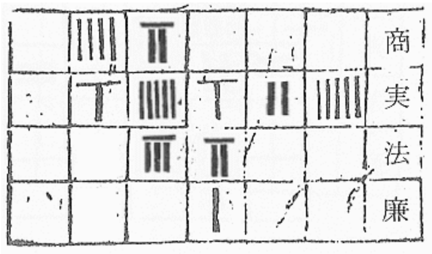
| | |
|---|---|
| 法廉各々(おのおの)一位下ル也 | 法と廉それぞれ一位下がる。(つまり廉は 1×2 で 2 位下がる) (図６) |
| 扨商に又七十間を立 | さて、商にまた 70 間を立て、(図７) |
| 其(その)七十間と廉と見合九九によひ七一ノ七を法にくわへて法八七と成ル | その 70 間と廉と見合って、九九により 7×1=7 を法に加えて、法は 87 となる。(図８) |
| 此法と又立ツ商七十間と見合九九によひ実を引時七八五万六千歩引七七四千九百歩引と実を引也 | この法とまた立てた商 70 間と見合って、九九により実から引く。7×8=56 を引き、7×7=49 と引く。(図９) |
| 扨又立商七十間と廉と見合九九によひ七一ノ七を法にくわへて法九四と成ル也 | さてまた、立てた商 70 間と廉を見合って、九九により 7×1=7 を法に加えて、法は 94 となる。(図 10) |



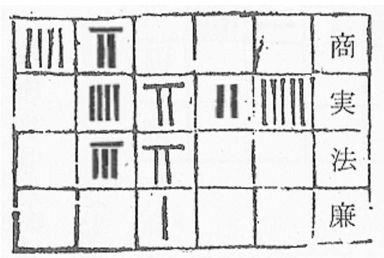

(図６)　これで商の百の位についての処理はおしまい。法と廉を１回ずつ(法は１桁、廉は２桁動かす)



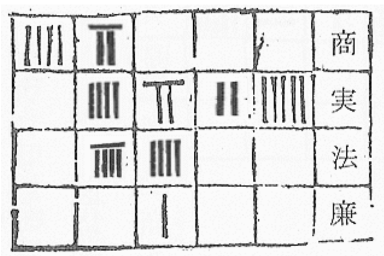

(図７)商の次の位(十の位)の数を７だと推定する。




(図８)商に立てた数と廉の数を掛けて、真上(法)に加える。

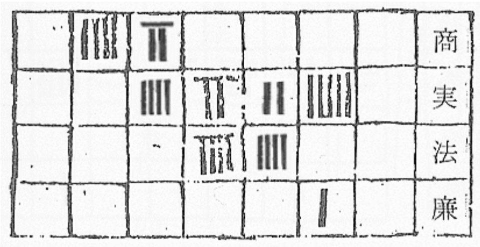



(図９)商に立てた数と法の数を掛けて、真上(実)から引く。

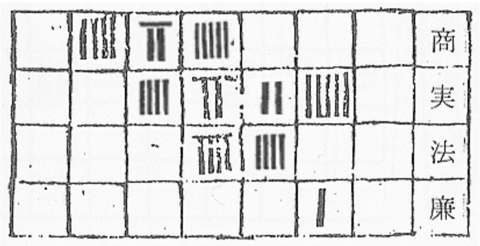



(図　10)もう１度商に立てた数と廉の数を掛けて、真上(法)に加える

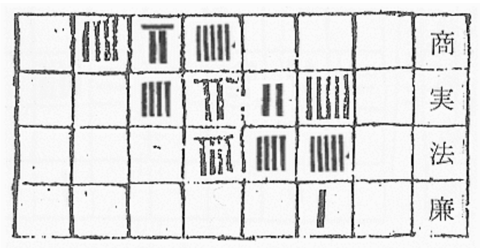
| | |
|---|---|
| 法廉各々一位下ル也 | 法と廉をそれぞれ一位下げる。(図 11) |
| 扨商に今又五間を立ル | さて、商に今また 5 間を立てる。(図 12) |
| 此商と廉と見合九九によひ五一ノ五を法にくわへて法九四五と成ル | の商と廉とを見合って、九九により 5×1=5 を法に加えて、法は 945 となる。(図 13) |
| 此法と今立商五間と見合九九によひ実を引時九五四千五百歩引五四ノ二百歩引き五五ノ弐十五歩引と実を皆引はらへは商に四百七十五間四方と知ルなり　法廉ハのちに不用なり | この法と今立てた商 5 間を見合って、九九により実を引く。9×5=45 を引き、5×4=20 を引き、5×5=25 を引くと、実を全て払うことができるので、商は 475 間と分かる。法と廉は、その後は不用である。(図 14) |



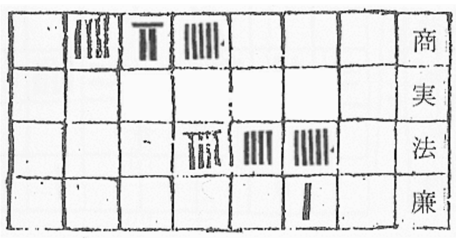

(図 11)これで商の十の位についての処理はおしまい。法と廉を 1 回ずつ(法は 1 桁、廉は 2 桁動かす)




(図 12)商の次の位(一の位)の数を 5 だと推定する。




(図 13) 商に立てた数と廉の数を掛けて、真上(法)に加える。




(図 14) 商に立てた数と法の数を掛けて、真上(実)から引くと、実は 0 になるので、答えは 475 となる。

2.1 考察

･･･と、『古今算法記』には、このように書いてある。確かに、

$$475^2=225625$$

であり、商に現れた 475 は 225625 の平方根になっている。

ただ、『古今算法記』に限らず、当時の数学書全般に言えることなのだが、

《謎 1》最初に「廉」に置いた 1 は何を意味するのだろうか？

《謎 2》手順 2 で行った作業は、何を意味するのだろうか？

《謎 3「廉」「法」「実」に現れる数は何を意味するのだろうか？

「実」に最初に表れる数は、平方根を求める数なのだが･

《謎 4》手順 0 と手順 3 で行った、「廉」と「法」の移動は

何を意味するのだろうか？

また、何故「廉」は 2 桁、「法」は 1 桁ずつ移動するのだろうか？

《謎 5》どのように商を推定するのか？

といったことは、特に触れられていない。

この頃の数学の本は、「教科書」というよりは「問題集」であった。当時数学を学んでいた人達は、「問題集」を見て、上の謎１～４のような疑問を自分で解決していきながら、学習を進めていったのだろう。

ということで。

『古今算法記』の開平方の解き方を分析してみよう。キーワードは、「繰り返し」。

★この方法には、決まった手順の繰り返しがあることに気づいただろうか？どのような手順なのか、まとめてみよう。

2.2 考察のまとめ

『古今算法記』での開平方の方法はこのようにまとめられる。

(手順 0)

答えが何桁になるのか見当をつけて、その分だけ法・廉を移動させる。

この時、法は 1 桁ずつ、廉は 2 桁ずつ左に動かす。

(手順 1)

答えを 1 桁目が大体いくつくらいか見当をつけて、商に立てる。

この時、(手順 2)をある程度概算して、実がマイナスにならないような、最大の数をうまく見つけなければならない。〈←謎 5 の答え!!〉

(手順 2)

商に立てた数値を使って、ガチャガチャと算木を動かす。

(手順 3)

実が 0 になっていたらここでおしまい。

なっていなかったら、法を 1 桁、廉を 2 桁右に動かして、次の桁について同じことを続ける。

開平方は、このようにして、大きい桁から 1 桁ずつ数値を定めていくことによって、平方根を求めている。

繰り返されている(手順 1)から(手順 3)を「セット」と呼ぼう。

(つまり、225625 の平方根は、3 セットで求められる。)

この「手順 2」は、次のようなことの繰り返しになっている。

(Step1)商を廉に掛けて、法に加える

↓

(Step2)商を法に掛けて、実から引く

↓

(Step3)もう 1 度、商を廉に掛けて、法に加える。

これらを上から、「**<u>Step1</u>**」「**<u>Step2</u>**」「**<u>Step3</u>**」と名前をつけよう。

ここまでをまとめると、開平方の解き方は、次のようにまとめられる。

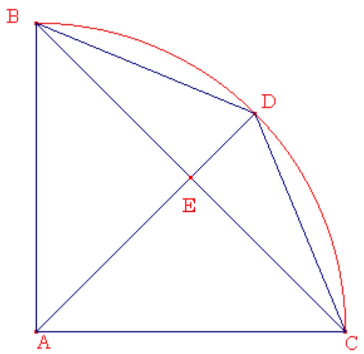
> 開平方は、
>
> 　Step1～3 を含む手順のセットを繰り返し、
>
> 　平方根を 1 桁ずつ求めていく
>
> 方法である。

　では、この「セット」と「Step」は、それぞれどのような意味があるのだろうか？ 2 日目以降に、残った謎 1, 2, 3, 4 を少しずつ解消していこう。

## Column. 円率について

当時の日本では､何故か 3.2 と 3.16 の 2 つの値が円周率として用いられていた。村松茂清(1608-1695) はこの値に疑問を持ち、1663 年に著した『算俎』で、開平方を用いて円率(円周率)を求めようとした。彼が用いた方法は次のようなものであった。

まず、直径 1 尺=10 寸の円に内接する正八角形を作り、その周の長さを求める。それを用いて、今度は正 16 角形を作る。以下同様にして、正 32 角形、正 64 角形、･･･の周の長さを求めていき、最後は正 32768 角形の周の長さまで求めた。




$$AC = 5\text{なので}, AE = CE = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$DE = 5 - AE = 5 - \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$CD = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(5 - \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

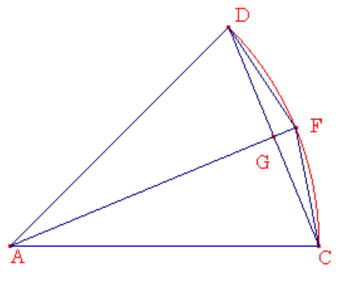
ただし、この頃には√を使った表し方は使われていなかった。

そのため、村松茂清は、

$$\text{正八角形の周の長さ} = 8 \times CD = 3.06146745892071817384$$

と、開平方を用いて小数で近似した。

続いて､この CD を用いて正 16 角形の周の長さを次のように計算した。




CD の長さから CG を求めて､正八角形の図の△CDE と同じように△CGF について三平方の定理(当時は「勾股弦の術」と言った。)を用いて、

CF=3.121445152258052370213

　以下、同じことを繰り返して、何と正 32768 角形の周の長さまで計算してしまった。次の表は、『算俎』に書いてある、各正多角形の周の長さを書き取ったものである。

| n | 正 n 角形の周の長さ(尺) |
|---|---|
| $8=2^{3}$ | 3.06146745892071817384 |
| $16=2^{4}$ | 3.121445152258052370213 |
| $32=2^{5}$ | 3.136548490545939349853 |
| $64=2^{6}$ | 3.140331156954753 |
| $128=2^{7}$ | 3.1412772509327729134016 |
| $256=2^{8}$ | 3.141513801144301128448 |
| $512=2^{9}$ | 3.141572940367091435162 |
| $1024=2^{10}$ | 3.14158772527715976659 |
| $2048=2^{11}$ | 3.141591421511186733296 |
| $4096=2^{12}$ | 3.1415923455701046761471 |
| $8192=2^{13}$ | 3.1415925765848605168681 |
| $16384=2^{14}$ | 3.14159263433855298 |
| $32768=2^{15}$ | 3.141592648777698869248 |

(参考)円周率π=3. 14159265358979323846264338327･･･

村松茂清は、『算俎』の中で、当時の慣例に反してπ=3.1416 と定め、実際に使う場合には 0.0016 は切り捨てて 3.14 として用いるべきだと主張した。

英雄伝 No.2 村松茂清(1608-1695)

　彼についての情報はあまり残っていないのだが、円周率はいくつかという当時の論争にピリオドを打ったことで知られる。忠臣蔵で有名な播州赤穂(ばんしゅうあこう)の浅野内匠頭長矩(たくみのかみながのり)に仕えていたとされ、養子の喜兵衛秀直、その子三太夫高直は四十七士の一人である。

## 4. まとめ＆次回予告

今日やった内容は次の４つである。

・算木と算盤の説明
・算木による四則演算
・算木による開平方
・江戸時代の円周率

しかし、実は四則演算と開平方は、ソロバンでもすることができ、むしろソロバンの方が簡単に計算できる。ならば、算木を使うメリットは何なのか？実際、何度か引用した『数学乗除往来』にはこう書かれている

> 此算木の断ハ商人なと売買のわさにハおそくしてためにならぬなり。それもものことに工夫のこゝろさしある人はしつかふしてたゝしくかんかへあきらかにみるをこのむ人は用へし。そろばんの断は商人職人百姓用てよろしかるべし。此算木ハ静に正しきを好む人の工夫のためなり。しかしなから人によるへし。(『数学乗除往来』より。読みやすいように句点を入れたが原文にはない)

《現代語訳》この算木の理屈は、商人などが売買の(時に使う)技術としては遅いのでためにならない。だが、物事を工夫しようという意思がある人は、静かに正しく考えて(物事を)明らかに見るのを好む人は、利用するべきである。そろばんの理屈は、商人･職人･百姓が利用するのにいいだろう。この算木は、静にして正しいものを好む人が工夫するためのものである。しかし、人によるだろう。

また、何故今回説明した方法で平方根の値を求めることができるのか？それ以前に、今日は予定の内容を全部説明し切れたのか？

次回、和算入門第弐章『天元術』。和算の歴史が、また一ページ・・・