出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.191-202、2004年3月

算木と天元術を用いた実践研究

―証明のない数学による証明観の変容―

筑波大学大学院修士課程教育研究科
矢代　淳

章構成

要約

本研究では，物事の原因・理由を探求するという数学的な見方，考え方のよさを再認識することを目的にして，江戸時代初期の和算を題材とした実践を行った．その結果，和算の原典解釈と追体験による異文化体験によって，生徒たちの数学観，特に証明観の変容を見ることができた．

キーワード：和算，算木，天元術，異文化体験，証明観

１．はじめに

近年，豊かな心の育成，確かな学力の育成の必要から，数学教育においてよさ・美しさの感得，学び方，発展の仕方などの，関心・意欲・態度の育成が注目されている．高等学校学習指導要領解説数学編理数編においても，高等学校数学科の目標は,「数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め，事象を数学的に考察し処理する能力を高め，数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに，数学的な見方や考え方のよさを認識し，それらを積極的に活用する態度を育てる(p.9)」とされ，心の教育は数学教育における重要な課題となっている．しかし現状に目を向けると，数学に関する信念(ここでは，Peter Op‘teyde, Erik de Core, Lieven Vershaffel(2003)に従い，「意識的，もしくは無意識に抱かれる，生徒たちが正しいと思っている主観的な考え」とする)として，「数学は暗記である」「数学は機械的な作業である」といった信念を持つ生徒は少なくない. これは,物事の原因・理由を探求するという数学的な見方，考え方が身についていないことによると考えられる．

物事の原因・理由を探求し、命題を証明することのよさを再認識するために，筆者は和算による授業が有効ではないかと考えた．日本に限らず非ヨーロッパ圏ではしばしば見られるのだが，当時の数学書には，解き方の手順は記されているのだが，何故その方法で解くことができるのかには触れられていない場合が多く，ましてや証明はほとんど見られない．礒田(2001)によると,「それまでにないであろう異文化体験をもたらす課題設定をし，自文化の過般化が通用しない体験によるカルチャーショックを前提に，他者の身になって考えてみる，他者の世界において考えてみるという解釈学的営み」(p.47)

によって,「数学を人の営みとして自覚する意味での数学の文化的視野の覚醒契機を提供しえる」(p.43)とされる．文化的視野の覚醒によって,「異文化体験で顕在化した他文化とそこで自覚された自文化から, 自文化の自覚ある進展」(p.46)を期待することができる．本研究では，証明・理由のない数学としての和算を「他文化」と捉え，原典解釈と追体験による異文化体験によって自文化を自覚し，物事の原因・理由を探求し、命題を証明することのよさを再認識することを期待して，授業実践を行う．ただし本研究においては，原典は現代語への翻訳文献も含めるものとする．

２．研究目的・研究方法

(1)研究目的

『数学乗除往来』『古今算法記』『算法天元指南』などの原典解釈と，当時数学を学んでいた人々の営みの追体験を通して，数学観，特に証明観の変容を図ることを考察する．

目的達成のため，以下の課題を設定する．

課題１：江戸時代の日本における数学の原典解釈と追体験を通して，生徒が学んできた数学との関わりや違い，共通点を認識することができるか.

課題２：課題１を通して，数学が歴史的に発展してきたものであり，しかもギリシャをはじめとしたヨーロッパ圏だけでなく，他の地域でも発展してきたものであることを認識し，数学への興味・関心を高めることができるか.

課題３：課題１，課題２を通して，物事の原因や理由を探究し，命題を証明することの価値を再認識することができるか.

(2)研究方法

数学史原典を利用したオリジナルの教材を作り，授業を行う．ビデオによる授業記録と，事前・事後アンケートをもとに考察する．

３．算木と天元術の教材化

今回，算木と天元術を教材化するにあたって，宋の朱世傑が著した『算学啓蒙』が日本において復刻され，天元術が理解されるようになった江戸時代初期に焦点を当てた．それまでの和算においては，古代に中国から伝来した算木を計算器具として用いていたが，未知数を用いて方程式を立てるという考えはなかった．対して天元術とは,「天元の一」を立てて求める数として，与えられた条件を用いて，現代の方程式に相当するように算木を算盤上に配置することである．決められた手順に従うと，正の解のみであるがこの方程式を解くことができる．天元術の伝来は後に関孝和の傍書法に繋がり，ここから和算独自の数学を形作るに至る．江戸時代初期は和算にとって一大転機であり，この時代に焦点を当てることによって，数学が歴史的に発展してきたもので，しかもヨーロッパ圏だけでなく，アジアにおいても発展してきたものだと認識し，数学への興味・関心を高めることができるのではないかと考えた.

また,「１．はじめに」で記した通り,『算学啓蒙』を含め当時の数学書には，解き方

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.191-202、2004年3月

の手順は記されているのだが，手順の理由や証明についてはほとんど触れられていない．本研究において原典として取り上げた『数学乗除往来』『古今算法記』『算法天元指南』も同様であった．何らかの理由で純粋に解き方のみを知りたいという場合には事足りるのであろうが，この理論をよりよく理解し，他に応用し，また発展させようと考えた人々は，相当苦労したのではないだろうか．今回は，この「苦労」を追体験できることを目指して教材化した．

４．算木の解説

算木とは，古代に中国より伝来した，棒状の計算器具のことである．中国では「算籌」もしくは「籌」と呼ばれ，計算器具としてだけでなく，数表記のためにも使われていた．秦代の資料では長さが 14cm 程であったとされるが，時代を経るにつれてだんだん小さくなっていき，本研究で用いた『数学乗除往来』においては，2 寸=約 6cm と記されている．

中国では，算木による数表記は図のようになされていた．一位・百位・万位…は縦式で，十位・千位・十万位…は横式で表し，現代の数表記のように横に並べることによって，任意の大きさの数を混同することなく表すことができる．全て縦式で並べたとすると，“３”なのか“12”なのか“111”なのかが分からなくなってしまうのである．これに対し，図のような「算盤」が考案されたことによって，この混同の懼れから解放された．各桁の数を，それぞれ 1 つずつ枠内に入れていけばいいのである．これにより，縦横と使い分ける必要はなくなり，縦式だけで数表記している資料も見られるようになった．なお，算盤は江戸時代頃の日本で考案されたといわれているが，諸説あり定かではない．本研究で用いる原典の中には，縦式と横式を併用しているものもあるが，本研究では算盤の使用を前提としており，また混乱を避けるため，全て縦式で表記し直している．

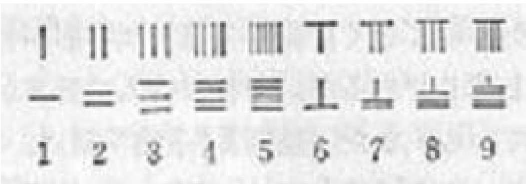
縦式
横式


図 1. 算木による数表記.『中国数学史』p.9 より抜粋.

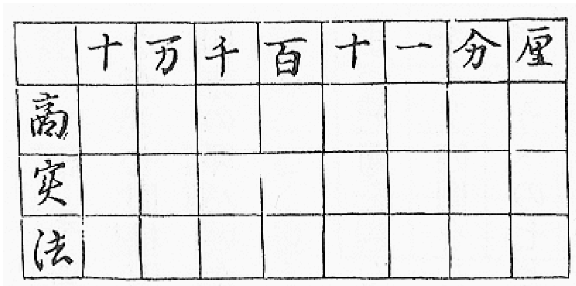


図 2. 算盤.『数学乗除往来』より抜粋.

算木に算盤の発明によって，算木の計算器具としての能力も向上したといえるだろう．四則演算は，現代における筆算とほぼ同様に計算できる(尤も，簡単な四則演算は，同じく中国から伝来したソロバンで計算していたようだが)うえに，平方根を求めたり，方程式の解を求めたりということもできる．算木・算盤を用いた計算に関しては，様々な研究がなされており，本稿では割愛する．

５．算木と天元術を題材とした授業の概要

(1)授業環境

日時：平成 15 年 12 月 5 日，8 日，9 日(計 50 分×3 回)

対象：筑波大学附属高等学校第 1 学年(40 名)

準備：コンピュータ(Windows)，ビデオプロジェクタ，Microsoft Power Point，生徒用の算木(マッチ棒を赤と黒に染めたもの)，黒板用の算木(厚紙に赤と黒のガムテープを巻き，マグネットをつけたもの)，算盤(A3 用紙に印刷したもの)，事前・事後アンケート，授業テキスト

(2)授業展開

[1 時間目]

目標：算木によって，四則演算が現代の筆算と同様にできることに気付く．また，原典解釈を通して和算における開平の手順を，規則性に注目してまとめる．その間に，敢えて証明や説明をしないことによって，「何故だろう？」という気持ちになるようにする．

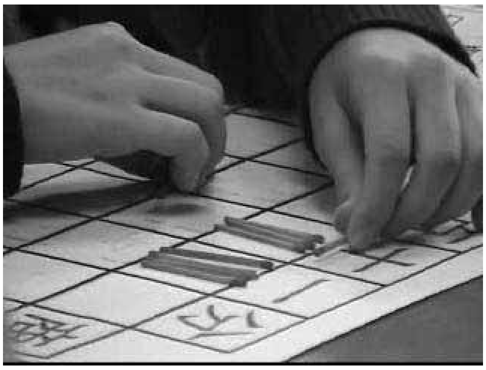


図 3. 34+83 を，算木で実際に計算しようとしている生徒

局面１：算木による数表記と四則演算

まず，原典『数学乗除往来』に従って算木・算盤を紹介し，数の表記法を示した．

次に，算木を用いた四則演算を示した．加法の例として 35+213 と 34+83 を，減法の例として 984-373 と 105-74 を，乗法の例として 56×37 を挙げ，黒板で算木による計算を実演した．

算木ハあかき木百八十本とくろき木百八十本
長さおの〱弐寸
あつさ二分五厘四方
算盤ハきぬにてつくる
長さ五尺にする
四方にかうしをひく

図 4. 『数学乗除往来』より，算木・算盤の説明を抜粋.

局面２：算木による開平

原典『古今算法記』に従って，225625 の平方根を求める過程を追っていく．原典の現代語訳と，プロジェクタで投影した Power Point の画像を平行して提示し，「『古今算法記』での平方根の求め方は，規則性に注目するとどのようにまとめられるだろうか？」と発問した．この間，何故このような方法で平方根を求めるか，何故この方法で平方根を求められるかといったことには触れない．

図 5. どのように平方根を求めているのだろう？

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.191-202、2004年3月

> [対話 1: どのような規則性があるのかを問う場面]
> 生徒：商を予測して，その商を廉に掛けて法にたす．それから，法を商倍して実から引く．
> 教師：うんうん．もう 1 回何かやってるでしょ．
> 生徒：もう 1 回，(指差しながら)法にたす．

最後に，開平の手順を次のように整理した．

手順 0. 平方根の桁数を予測して，「法」「廉」を左に移動させる．
手順 1. 平方根の最大の桁がいくつか見当をつけて，「商」に立てる．
手順 2-Step1.「商」を「廉」にかけて，「法」に加える．
手順 2-Step2.「商」を「法」にかけて，「実」から引く．
手順 2-Step3.「商」を「廉」にかけて，「法」に加える．
手順 3.「廉」と「法」を右に移動させる．

手順 3.の後，「実」に数が残っている場合は手順 1.に戻り，同じ手順を繰り返すことによって，平方根を 1 桁ずつ求めていく方法であるとまとめた．この時，『古今算法記』に限らず当時の数学書は，「教科書」というより「問題集」であり，解法は示してあるが，証明・理屈や，他の問題への応用などは示されていないということにも触れた．

[2 時間目]

目標：開平の手順の規則性を確認する．また，「天元」とは何かを考察し，3 時間目に繋げる．

局面１：開平の復習

開平の手順を確認するために，前回の復習をし，ここまでの授業で分かっていないことを整理した．

- 初めに「廉」に立てる 1 は何なのか？
- 「廉」「法」が左右に移動するのは何を意味するのか？
- 手順 2.は何を意味するのか？

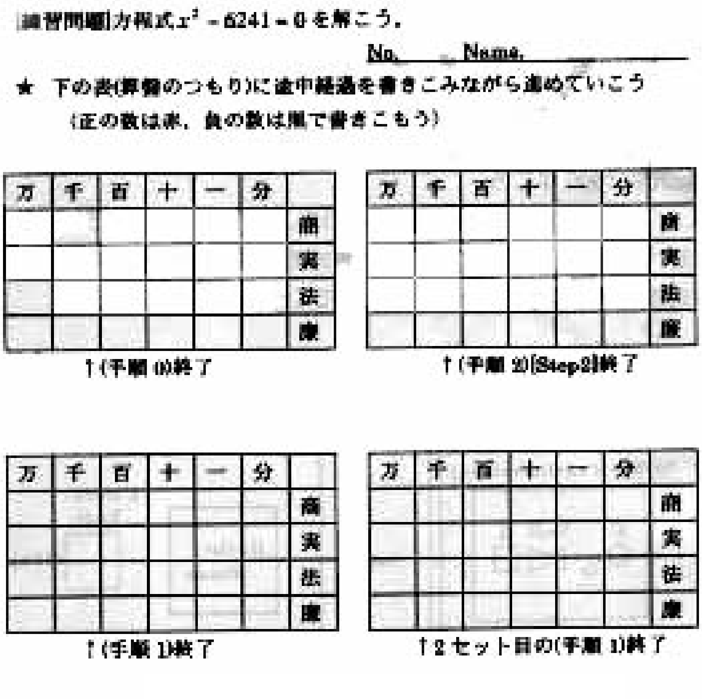


図 6. 2 時間目に配布したワークシート

次に，改めて 6241 の平方根を求めた．この際，実際に算木・算盤を用いて，途

中経過をワークシートに書き込みながら進めていった.

そして，実が 0 にならずいくらか余るとき(授業では余り 17，つまり 6258 の平方根を求める場合とした)，同じ作業を繰り返すことによって，小数点以下何桁でも求められることを紹介した.

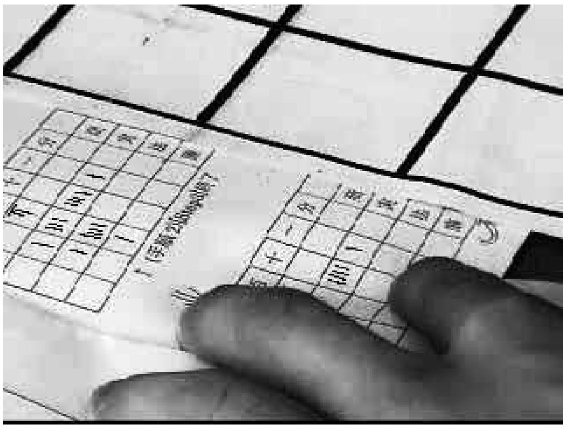


図 7. ワークシートに書き込みながら計算.

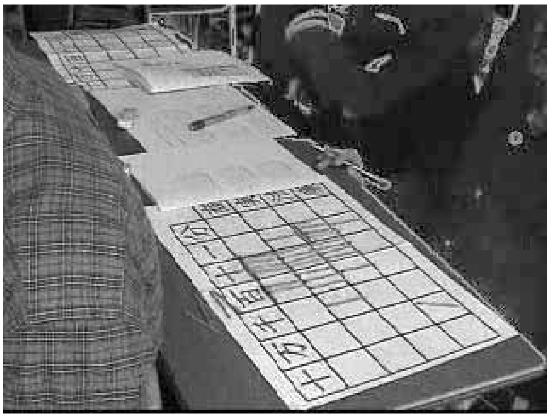


図 8. 算木で計算．もう少しで解ける！

局面２：天元術と方程式

まず，未知数・方程式がまだ普及していなかった江戸時代初期に，土師道雲と久田玄鉄が『算学啓蒙』を復刻することによって日本に「天元」というものを伝え，これによって日本の数学が大きな転機を迎えたということを紹介した.

次に，原典『算法天元指南』を解釈し，「『天元』は現代数学で何にあたるか？」と発問し，未知数 x に当たることを説明した.

最後に，同じく『算法天元指南』を用いて，現代における方程式(授業では $x^3+12x^2-2234x+32867=0$)の表記と，算木・算盤を用いた方程式の表記(図 10)を比較し，各項の係数が「実」「法」「廉」「隅」･･･に現れることを説明した.

何の所にても求め得んと思う所の物に天元の一を立て其とすれば、則其を得るなり。

意の如くこれを求むるなり。

←現代語訳

どのような時にも、求めようとしているものに対して、「天元の一」を立て、それ(求めようとしているもの)とすれば、すぐにそれを得ることができる。思うままにこれを求めることができる。

図 9.『算法天元指南』より抜粋．訳は筆者.

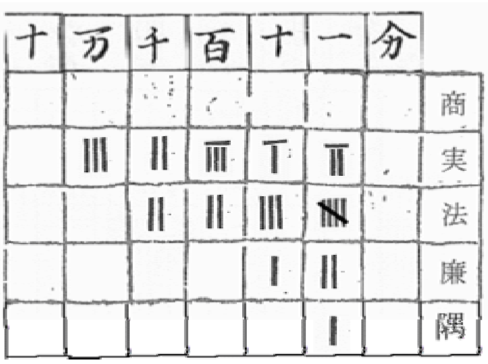


図 10. 方程式を算木で表した図.

[3 時間目]

目標：開平の方法と方程式の解法を比較し，関連性をつかむ. 開平の方法を一般化したものとしての方程式の解法を分析し，何故この方法で方程式を解くことができるのかを考察する. 理由と証明に敢えて触れなかった 1 時間目・2 時間目を受け

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.191-202、2004年3月

て，理由や証明の重要性を再認識する．

局面１：方程式の解法

2 時間目と同様に，方程式 $x^2+4x-221=0$ の解を求める過程を追った．ここでも，何故このような方法で解を求めるか，何故この方法で解を求められるかといったことには触れない．テキストと，プロジェクタで投影した Power Point の画像を平行して提示し，解き方の規則性を見つけ，開平の方法と比較した．方程式の解法は次のようにまとめられる

手順 0.方程式の定数項を「実」に，1 次の係数を「法」に，2 次の係数を「廉」に置く．そして，解を概算し，解の桁数に応じて「法」と「廉」を左に移動させる．

手順 1.解の 1 桁目を概算し，「商」に立てる．

手順 2-Step1.「商」を「廉」にかけて，「法」に加える．

手順 2-Step2.「商」を「法」にかけて，「実」に加える．

手順 2-Step3.「商」を「廉」にかけて，「法」に加える．

手順 3.「廉」と「法」を右に移動させる．

手順 3.の後，「実」に数が残っている場合は手順 1.に戻り，同じ手順を繰り返すとした．

ここから，6241 を開平するかわりに， $x^2-6241=0$ の解を求めるとすると，ほぼ同じ方法で解いていて，開平の方法を一般化したものが方程式の解法であるということを導いた．(これで，開平方において，はじめに「廉」に置いた 1 が， x^2 の係数 1 であることが分かる．)

局面２：方程式の解法の説明

局面１で整理した解法を用いて，解が 1 桁になる方程式 $x^2+11x-26=0$ を解くことによって，この方法で何故方程式を解くことができるのかを，用語は出さなかったものの，Horner 法として説明した(ただし，当時の和算家が Horner 法として理解していたわけではもちろんない．)．下の表のように，解く前，解いた後に「実」「法」「廉」に現れる数を比較することによって，組立除法を用いて方程式 $x^2+11x-26=0$ を $(x-2)(x+13)=0$ と変形していることを導いた．

	廉	法	実
手順 2-1 の前	1	11	−26
↓	2 倍	+2 2 倍	+26
手順 2-3 の後	1	13	0

図 11. 手順 2 における，「実」「法」「廉」の値の変化

次に，より一般的な議論のため，再び方程式$x^2+4x-221=0$を用いて考察した．解が 13 となる方程式$x^2+4x-221=0$は，解の十の位を 1 と推定して 10 で 2 回組立除法することによって，$(x-10)(x+14)-81=(x-10)\{(x-10)+24\}-81=0$と変形する．これに対して，$x-10=y$と置きかえることによって，解が 3 となる方程式$y(y+24)-81=y^2+24y-81=0$とした．これを 3 で組立除法して，$(y-3)(y+27)=0$とした．このように天元術による方程式の解法は，解を大きい方から 1 桁定め，組立除法を用いて解が 1 桁減った方程式を作り出し，この作業を繰り返すことによって 1 桁ずつ解を求めていく方法であることを説明した．

ここまでで，手順 2.は組立除法を行っていて，「廉」「法」が左右に移動するのは，組立除法をしやすくするための一工夫であり，これで後回しにしていた謎が全て解けたことになる．

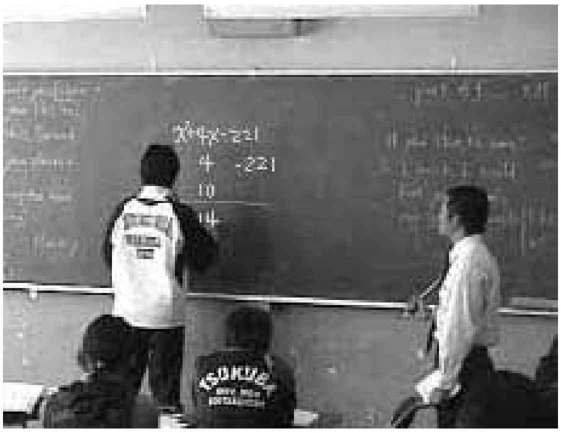


図 12. 組立除法と比べてみよう．

６．考察

主に事後アンケートをもとに考察を進める．

(1) 課題１について

課題１：江戸時代の日本における数学の原典解釈と追体験を通して，生徒が学んできた数学との関わりや違い，共通点を認識することができるか．

① 関連性の高さにびっくり．
② 今と全く違うと見せかけて，実は同じようなことをやっていた．
③ 数学と和算のどちらも長所・短所がある．
④ 今の数学は本当によく簡略化されていると思った．
⑤ 現代の数学の方が簡単で分かりやすい．
⑥ 今の数学のすばらしさに気付いた(w
⑦ なぜ和算という形が現代には残らなかったのか残念だ．
⑧ 複雑な平方根を小数点以下まで計算するのは，意外と和算の方が楽にできて驚いた．
⑨ 昔の手法も意外に高度な方程式を扱うことができて驚いた．
⑩ 和算の方が現代の数学より優れている面があるのではないかと思った．

主に，事後アンケートでの質問「和算と方程式について，感じたことを自由に書いてください．」，及び質問「現代の数学と和算を比較して，感じたことを自由に書

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.191-202、2004年3月

いてください」に対する回答から取り上げた.

これらは，①②は和算と現代数学の共通点を挙げたもの，③は和算と現代数学の両方のよさを挙げたもの，④～⑥は現代数学のよさを挙げたもの，⑧～⑩は和算のよさを挙げたものと分類することができる．アンケートの通り，江戸時代の日本における数学の原典解釈と追体験を通して, 生徒が学んできた数学との関わりや違い, 共通点を認識することができている.

(2)課題２について

課題２：課題１を通して，数学が歴史的に発展してきたものであり，しかもギリシャをはじめとしたヨーロッパ圏だけでなく，他の地域でも発展してきたものであることを認識し，数学への興味・関心を高めることができるか.

①未知数という概念が途中で輸入されてきたということが分かった.
②数学史というと古代ギリシャくらいしか思いつかなかったが，実際は世界各地で発展してきた.
③数学は外国で発達したものだったと思ったけど，日本の数学の歴史もすごいと思った.

課題２についても, 課題１で用いた質問に対する回答を主に取り上げた. 未知数・方程式に相当する概念が日本に広まり，和算が一大転機を迎えた江戸時代初期を取り上げた授業によって，生徒たちは数学が歴史的に発展してきたという認識を持ったことが見られる．また，和算のレベルが予想以上に高いことに驚き，ヨーロッパ圏以外の地域にも数学があったことを認め，数学への興味・関心が高まった事が見られる.

また，事後アンケートにおける質問「3 日間を通して，数学が歴史的に発展・進化してきたということは分かったでしょうか？」に対し，40 人中 39 人が Yes，1 人が No と答え，このことからも同様に判断することができる.

(3)課題３について

課題３：課題１，課題２を通して，物事の原因や理由を探究し，命題を証明することの価値を再認識することができるか.

①和算は，なぜそうなるのか分からないので，その点で，現代数学のほうがいいと思う.
②最初は少し難しかったけど，分かってくると面白くて数学を面白く感じた.
③理由や原因がわかることで，その結果をもっとよく理解できる
④理由が分からないと嫌.
⑤原因が分かるとよく理解できる.
⑥原因や理由が分からないと確信がもてない.

主に，事後アンケートでの「物事の理由や原因について，考えたり調べたりすること」に対するイメージを問う質問と，「3 日間授業を受けて，あなた(の考え)が変わったなと思うこと」を問う質問に対する回答, 及び 3 日間の感想から取り上げた．本稿で筆者は，この課題 3 を重要視している．

今回の授業では敢えて，所謂「手続き先行，意味欠落」の授業を展開し，最終日の最後に，その手続きの持つ意味や理由に触れた．「手続き」の説明に終始している間には，「なんで？」「どうして？」といった生徒たちの声が上がり，証明のない数学という異文化に触れて，葛藤している様子が伺えた．その葛藤の中から，物事の理由や証明，またそれらを探求することの価値を再認識することができたということが，アンケートから見られる．

下の表は，事前・事後アンケートにおいて，「物事の理由や原因について，考えたり調べたりすることは大切だと思いますか？」という質問に対しての，生徒たちの回答である．

	大切	どちらかといえば大切	どちらかといえば大切でない	大切でない	分からない
事前	20	18	2	0	0
事後	25	15	0	0	0

また，事後アンケートにおける，「3 日間を通して，物事の理由や証明を考えることの大切さは分かったでしょうか？」という質問に対し，40 人中 35 人が Yes，5 人が No と回答した．No と回答した 5 人中 4 人は，先の質問に対する事前アンケートに対して，このような考え方は「大切である」と選択していた．この 2 つの調査からも，和算の原典解釈・追体験による異文化体験によって，証明観に変容が見られることが分かる．

７．おわりに

本研究は，「数学は暗記である」「数学は機械的な作業である」といった，物事の原因・理由を探求するという数学的な見方，考え方が身についていないことによる，数学教育上好ましくない信念が根強く残っていることから問題意識を持ち，そのような見方，考え方のよさを再認識できるかどうかを考察する目的で行った．アンケートなどの結果から，生徒たちはそのような再認識に至ったと示された．

しかし，筆者が授業の時間配分を読み損ねたため，算木・算盤で実際に活動する時間や考察する時間をあまり取れなかった．アンケートでも，「もっと算木を使いたかった」という回答や，「難しかった」という回答は多く，反省しなければならない．このような時間が取れる構成で授業を行えば，また違った発見が得られるであろう．

また，Gilah C. Leder & Helen J. Forgasz(2002)は，生徒たちの信念の調査方法として，何

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.191-202、2004年3月

を測定しているかや自分の回答が持つ意味を，回答者が一見して分かってしまうような自己申告調査は，ゆがめられることが多いと指摘する．確かに本研究においては，事前・事後アンケートで行った質問はこのような傾向があり，これも反省すべき点である．生徒たちの信念を，他の要素に影響されることなく抽出する方法の開発とともに，今後の課題となるだろう．

謝辞

本研究を行うにあたり，筑波大学附属高等学校の川崎宣昭先生をはじめ，多くの方々から貴重なご意見，ご指導をいただきました．深く御礼申し上げます．

注

本研究は，平成 15 年度科学研究費，特定領域研究(2)課題番号 15020214「数学用機械と JAVA による移動・変換と関数・微積ハンズオン教材の WEB 化研究」(研究代表者礒田正美)において開発された歴史的道具を前提にして，平成 15 年度科学研究費，基盤研究(B)(2)課題番号 14380055「数学の文化的視野覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」(研究代表者礒田正美)の一環として行われた．

引用・参考文献

(1)下平和夫(1990). *江戸初期和算選書解説*, 研究成社.
(2)文部科学省(1999). *高等学校学習指導要領解説*, 実教出版.
(3)加藤平左エ門(1967). *日本数学史*　上，槇書店.
(4)加藤平左エ門(1967). *日本数学史*　下，槇書店.
(5)川本亨二(1999). *江戸の数学文化*, 岩波書店.
(6)大矢真一(1987). *和算入門*, 日本評論社.
(7)佐藤健一(2000). *新・和算入門*, 研成社.
(8)加藤平左エ門(1974). *趣味の和算*, 槇書店.
(9)佐藤健一(1987). *算組一現代訳と解説一*, 研成社.
(10)沢口一之 著，清水布夫 校注(1993). *古今算法記*, 研成社.
(11)川原秀城訳，銭宝琮編(1990). *中国数学史*, みすず書房.
(12)平山諦(1993). *和算の誕生*, 恒星社厚生閣.
(13)礒田正美(2001). 異文化体験からみた数学の文化的視野の覚醒に関する一考察：隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて，*筑波数学教育研究*，20，p.39-48.
(14)Peter Op'tyde, Erik de Core, Lieven Vershaffel(2003). Framing Students' Mathematics-Related Beliefs, Gilah C. Leder etal. Edited. *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?*, Kluwer. pp13-37.
(15)Gilah C. Leder & Helen J. Forgasz(2002). Measuring Mathematical Beliefs and Their Impact on the Learning of Mathematics: A New Approach, Gilah C. Leder etal. edited. *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?*,　Kluwer. p95-113.

http://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/Forall/project/history/2003/sangi/sangi_index.html

(16)矢代淳, 礒田正美(2004). 数学教育における心の教育へのフレームワーク: 信念とその構造, *教育科学数学教育 3 月号*, 明治図書. pp.98-102.

(17)池田昌意 著, 安富有恒. 校注(2001). *数学乗除往来*, 研成社.

(18) 佐藤茂春 (1698). *算法天元指南*, Retrieved March 26, 2004, from http://www.wasan.jp/index.html.