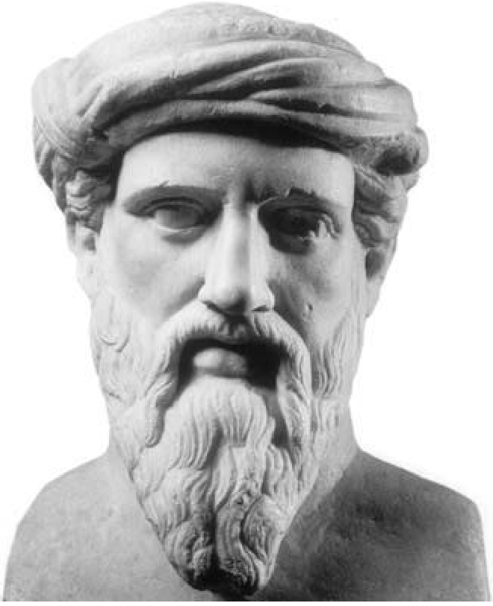
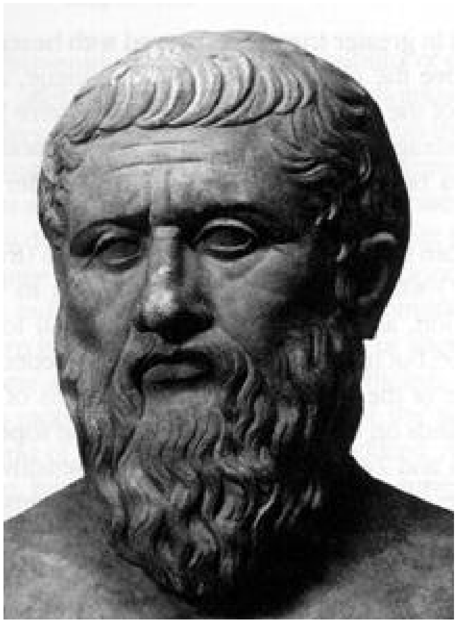
授業資料３日目

古代への旅
３時間目
〜ピタゴラス数の更なる探究〜





3年　組　番　名前＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

授業者：筑波大学修士課程教育研究科

数学教育コース１年　　林　亜規子

1. 前回までの復習

- 1 時間目の授業の復習
  - ・ インドの文献『シュルバスートラ』を読んで、縄のみを用いた長方形の作図をした。
  - ・ ピタゴラス数（例：(3,4,5) , (5,12,13) etc…）を学んだ。
  - ・ ピタゴラス数や三平方の定理は、世界各地で発見され、直角を作ることに利用されていた。

  ピタゴラス数を知っていれば、直角を作ることができる！

- 2 時間目の授業の復習
  - ・ 数を図形として捉えていた、古代ギリシア人の数の考え方を学んだ。
  - ・ 4 個目の四角数と 5 個目の四角数、そしてその際に加えられるグノモンとの関係を考えることによって、(3,4,5)のピタゴラス数を発見することができた。

  図形数からピタゴラス数が発見できる！

今日はピタゴラス数を見つける方法を学んでいきましょう。

2. ピタゴラスの方法：四角数からピタゴラス数を求める。

前回の授業の後半に、四角数からピタゴラス数を発見することができました。ピタゴラス数は、四角数の形から求めることができます。四角数は「等しいものの掛け合わせ」（前回のテアイテトスの発言より）で表せます。つまり、どんな四角数も「〇^2」、つまりある数の平方（2 乗）で表せるということが、四角数の形から明らかです。ということは 、

＿＿＿＿＿＿がある数の平方で表せる数であれば
＿＿＿＿＿＿とそれを加える前と後の四角数との関係から
ピタゴラス数が見出せる！！

ことになります。ピタゴラスはこのようにしてピタゴラス数をいくつも求めたと言われています。

では、実際におはじきを使ってピタゴラス数をいくつか見つけてみましょう。

発見したピタゴラス数

3. 検証

前の章では、実際におはじきを使って四角数からピタゴラス数を発見することができました。おはじきを使うと、非常に単純かつ明確にピタゴラス数を見つけることができます。しかし、実際におはじきを使っていたのでは、大きいピタゴラス数を見つけるとき、またはたくさんピタゴラス数を見つけたいときに時間がかかります。そこで、現代の数学で考えてみましょう。それはすなわち文字を使って、また、式で表して考えるということです。

前の章で、ピタゴラス数を見つける際にポイントとなったことは、________が平方で表せるということでした。

n個目の四角数を考えてみましょう。(n – 1) 個目の四角数は_________個のおはじきからできています。また、n 個目の四角数は________個のおはじきからできています。つまり、(n – 1)個目の四角数から n 個目の四角数にするときに加えられたグノモンは_________個のおはじきからできていることが分かります。

では、□で囲まれた文章を参考にして、ピタゴラス数を求める式をつくりましょう。

_________が平方で表されるとする、つまり m^2 とおくと、

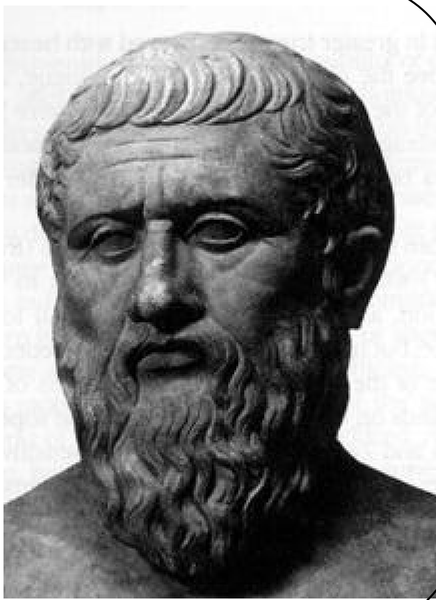
よって、ピタゴラス数を求める式は、$m^2 +$ ________ $=$ ________
と表せる。

式は求まりましたか？ では、m に具体的な数を入れて、いくつかピタゴラス数を求めてみてください。

<u>発見したピタゴラス数</u>

4. プラトンの方法

プラトン
- 紀元前 427 年～347 年ごろの人物。
- ギリシアのアテナイに生まれる。
- ソクラテスの弟子。
- 哲学者・政治家・数学者。
- ソクラテスの刑死後、ソクラテスを主役とする対話集を書き始める。
- 『ソクラテスの弁明』『テアイテトス』『国家』　等
- 紀元前 387 年、学園「アカデメイア」を創設。



前回の授業で出てきた、『テアイテトス』を書いた人物です。この人もまた、当時の知識人の一人であり、さまざまな分野で功績を残しています。

プラトンは、ピタゴラス数を求める方法として、

ピタゴラスの方法において、
ピタゴラス数が求まった四角数の各辺をさらに２倍する

という方法で、ピタゴラス数を求めています。

はたしてどのような方法なのでしょうか？
実際におはじきを使って、プラトンの方法でピタゴラス数を求めてみて下さい。

発見したピタゴラス数

5. 検証

プラトンの方法は２つのやり方で検証できます。

１つ目はピタゴラスの検証で求めた、ピタゴラス数を求める式から考えるやり方です。

「ピタゴラスの方法において、ピタゴラス数が求まった四角数の各辺をさらに２倍する」という言葉をふまえて、ピタゴラスの式をプラトンの式に書き直してみましょう。

もう１つは、n 個目の四角数とそれより一回り大きい四角数、一回り小さい四角数を考える方法です。

n 個目の四角数は______個のおはじきからできています。また、これより一回り小さい四角数は__________個、一回り大きい四角数が__________のおはじきからできています。すると、n 個目の四角数は、一回り小さい四角数よりも__________個多く、一回り大きい四角数よりも__________個少ないことが分かります。よって、n 個目の四角数よりも一回り小さい四角数と、n 個目の四角数よりも一回り大きい四角数との差は__________個になります。

ゆえに、

式：____________________________________.

が成り立つ。そして、この式をピタゴラス数を求める式にするには、______が平方であればよいので、

よって、ピタゴラス数を求める式は、 _________ + _________ = _________ と表せる。

式は求まりましたか？ では、いくつかピタゴラス数を求めてみてください。

<u>発見したピタゴラス数</u>

6. ピタゴラスの式とプラトンの式の特徴

ピタゴラスの式で求まるピタゴラス数は

などです。一方、プラトンの式で求まるピタゴラス数は

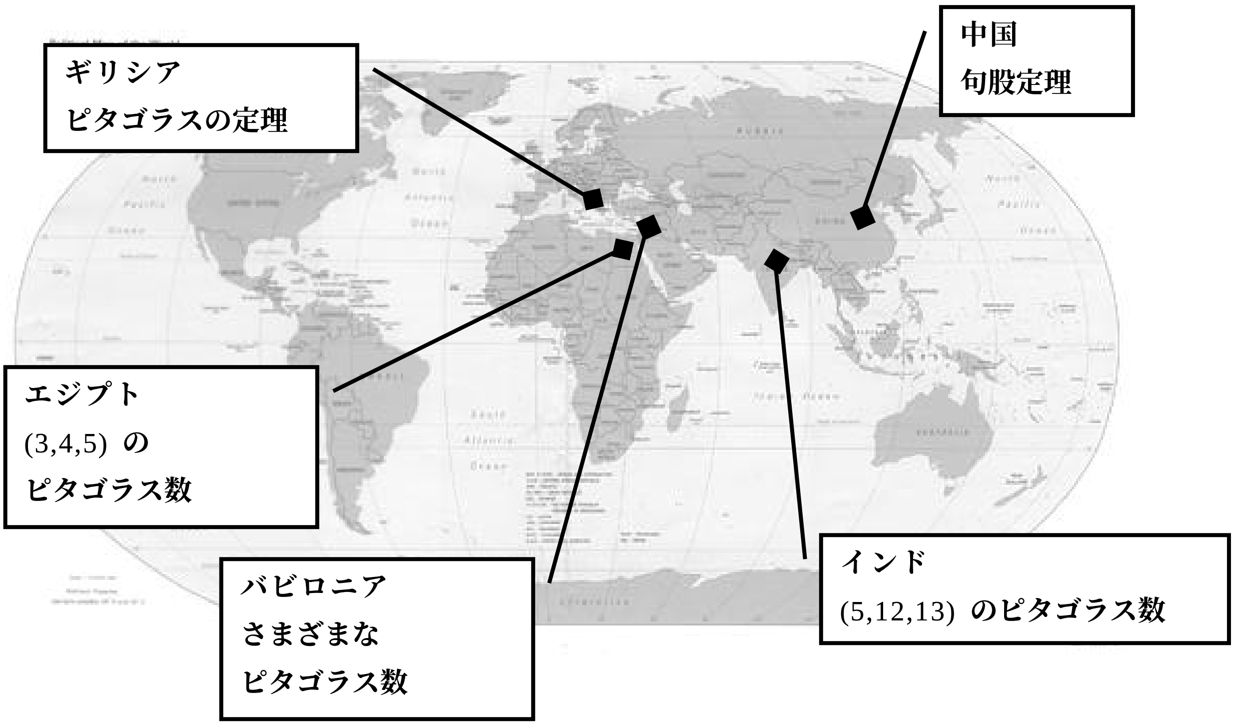
などです。

それぞれどのような特徴があるでしょうか？ また、どちらの方がいい方法だと思いますか？

7.　３時間の授業のまとめ

さて、「古代への旅」と題しまして、３時間授業を行ってきました。

１時間目は古代インドの文献『シュルバスートラ』を読んで、古代インド人が行ったとおりに、縄だけで長方形を作図しました。また、古代世界ではピタゴラス数及び三平方の定理が各地で発見され、測量などに利用されていることを学びました。



２時間目は、古代ギリシア人の「数を図形として捉え、理解する」という考え方を学びました。そして、その考え方の特徴が顕著に現れている「四角数」というものを学び、四角数からピタゴラス数を発見することもできました。

本日、３時間目は、ピタゴラス数の求め方、特に、ピタゴラスとプラトンのピタゴラス数を求める方法について探究してきました。

ピタゴラス数・三平方の定理が、古代の人々にとって身近なものであり、各地で発見・利用されていたこと、また、「同じ」数学の概念が「独自に」発見されていたということ、さらには、「図形数」から「ピタゴラス数」が発見できるという一見関わりがないような概念のつながり、古代の人々の「数を図形として捉える」という数と図形とのつながりなど、今回の授業には盛りだくさんの数学的な事柄が含まれています。「古代への旅」によって、これらの中のほんのわずかでも感じとっていただければ幸いです。

３時間、私の授業を聞いてくださって、本当にありがとうございました。

＜参考＞ユークリッドの式。

ピタゴラス数を求める式をユークリッド（紀元前 365 年〜275 年）という人も求めています。

◎ ユークリッドの式は全てのピタゴラス数を網羅できる！！

$$m^2n^2p^2q^2+\left(\frac{mnp^2-mnq^2}{2}\right)^2=\left(\frac{mnp^2+mnq^2}{2}\right)^2$$

[使い方]

① p,q **に具体的な数を入れる。（ただし** p>q）

② u=mnp²,v=mnq² **とおく。**u,v **が共に奇数または共に偶数になるように、** m,n **を決める。**

③ **それぞれの値を式に代入すると、上の式を満たすようなピタゴラス数が求まる。**

例：ピタゴラス・プラトンのどちらの式でも求まらないピタゴラス数
（30, 16, 34）**が、**p = 5,q = 3,m = 1,n = 2 **とすると、この式で求まる！**

＜参考その 2＞ユークリッドの式の変形

ユークリッドの式は、

① **両辺を 4 倍する。**

② $\sqrt{u}=p\sqrt{mn}=M$ 、$\sqrt{v}=q\sqrt{mn}=N$ **とする。**

③ **②を上記のユークリッドの式に代入すると、**

$$(2MN)^2+(M^2-N^2)^2=(M^2+N^2)^2$$

と、さらに簡単に変形できます。

これはピタゴラス数を求める際に、一般的に用いられている式です。