出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.29-42、2004年3月

ピタゴラス数に関する古代数学を題材とした授業研究

―インドの縄張り数学とギリシアの四角数の追体験を通して―

筑波大学大学院修士課程教育研究科
林　亜規子

章構成

要約

本研究では、ピタゴラス数に関連する、インドの縄張り数学とギリシアの考え方及び四角数に着目して教材化を行い、追体験を通しての授業実践を行った。これにより、生徒は自ら体験し自ら発見する数学的活動の楽しさを見出し、人の営みとしての数学を認識し、現代とは異なった古代の数学の考え方を共感的に認めることができたことが確認された。ゆえに、多面的でつながりを持った数学の考え方の一助となることが示された。

キーワード：数学史、原典、解釈、道具、追体験、ピタゴラス数

1. はじめに

現行の中学校学習指導要領において、数学の目標はその中に、「数学的活動の楽しさ」(文部省, 1999, p. 35) を盛り込んでいる。指導要領解説においては、「観察、操作、実験など具体的な活動を通して」(文部省, 1999, p. 5) 発見や考察をする活動も重視すると述べられている。また、「楽しさ」は「活動を通した『数学を学ぶこと』の楽しさ」(文部省, 1999, p. 6) であるとも注記されている。筆者は、「数学的活動の楽しさ」に着目し、生徒が「観察、操作や実験を通して」、すなわち自らが実際に経験し、その実感を通して自ら考え、自ら発見することができる授業実践を行う。

礒田 (2001) は、「異文化体験」が自らの無意識的な数学文化を自覚させる行為であり、「数学を人の文化的営みとして理解し、数学観の変容を促す」(礒田, 2001, p. 39) ことに貢献すると述べている。また、そのためには「文化比較に通じる課題設定をした上で、他者の身になって考えてみる、他者の世界において考えてみることが有効な方策となる」(礒田, 2001, p. 46) と述べている。Fauvel & Maanen (2000) は「数学史は、数学が個々に独立したものではなく、概念や道具に関する様々な考え方の中で変化していく活動だと気付かせてくれる」(Fauvel & Maanen, 2000, p. 65) と述べている。また、礒田 (1987) は「数学学習の過程を数学創造の過程の追体験の場として構成するために、数学史を利用」(礒田, 1987, p. 164) することは、教育実践において意義深いことであると述べている。これらをふまえ、筆者は数学史の原典解釈と歴史的道具を用いた追体験を異文化体験として取り入れた授業

実践を行う。これによって、生徒は数学史上で営まれた発見を自らの発見として体験し、数学的活動の楽しさを見出すことができ、人の営みとしての数学を意識できると考える。また、現代の考えとは異なった古代の考え方を共感的に認識でき、多面的でつながりを持った数学の考え方への一助になると考える。

ピタゴラス数は数学史上で最も古くから存在するものの一つである。古代、まだ数学が数学として名もついていない頃から、ピタゴラス数は人々の間で発見され、日常に活用されていた。また、ピタゴラス数は数学の様々な分野と結びつく、広範な項目でもある。礒田 (2001) は、歴史的な文献である『シュルバスートラ』の一節を解釈することを通じて、「自らの文化的営みである三平方の定理の学び方が相対化され覚醒され、…(中略)…それまで自覚することはなかった、具体的に存在する人の営みとして、三平方の定理をみる視野を得た」 (礒田, 2001, p. 498) ことを述べている。筆者は、シュルバスートラにおいて作図法の根底に存在するピタゴラス数に着目し、また、ギリシアの四角数とピタゴラス数の関係にも着目して、授業教材として取り上げた。

以上より、筆者はピタゴラス数の歴史的側面と発展性に着目し、教材化を行う。そして、原典解釈及び歴史的道具を用いた追体験を取り入れた授業を行うことによって、自ら体験し自ら発見する数学的活動の楽しさを見出し、多面的な数学の考え方を共感的に認めることができるかどうかを考察していく。

2. 研究目的・研究方法

(1). 研究目的

ピタゴラス数に関する古代数学の、原典解釈及び歴史的道具を用いた追体験を取り入れた授業を行うことによって、生徒が自ら体験し自ら発見する数学的活動の楽しさを見出し、多面的な数学の考え方を共感的に認めることができるかどうかを考察する。

上記の目的を達成するため、以下の課題を設定する。

課題 1：ピタゴラス数に関する古代数学の原典解釈及び歴史的道具を用いた追体験により、生徒が自ら体験し発見する喜びを味わうことができるか。

課題 2：課題 1 を通して、生徒が人の営みとしての数学を認識し、自らの数学文化とは異なる新しい数学の考え方を共感的に認めることができるか。

(2). 研究方法

数学史における原典 (翻訳文献を含む) を利用して教材を開発し、それを用いた授業研究を行う。そして、授業の事前・事後のアンケート、ビデオによる授業記録をもとに、設定した課題が達成されているかを考察する。

3. ピタゴラス数の教材化

ピタゴラス数の教材化にあたって、筆者は主に 3 つの原典、『シュルバスートラ』『テアイテトス』『*Greek Mathematical Work*』を使用し、その中で扱われている道具を教材とした。本章では原典を基に教材化を図った部分に焦点を当て、道具の数学的な解説については次章に記す。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.29-42、2004年3月

『シュルバスートラ』は、紀元前 6 世紀ごろに成立した古代インドの文献である。シュルバ (縄) という名のとおり、そこには縄を用いて地面の上に長方形や台形などを作図していく方法が記載されている。当時のインドの人々はその方法に則って、祭式における祭場を設営していた。この方法の根底にある原理は「ピタゴラス数を用いて直角を作る」ということである。(詳細は次章に記す。) この原典 (授業では、さらに授業者が適宜意訳したものを原典として使用した) を生徒が自ら解釈し、実際に紐を用いて追体験することを教材の一つとした。原典では縄と小杭を用いて地面に作図しているが、古代の人々の行っていた作図法の原理や作図された図形をより良く知るためには、鳥瞰できる紙の上の大きさで作図するほうが良いと思われるので、縄の代わりに紐を使い、杭で固定する代わりに指で押さえ、地面の上に作図する代わりにワークシートの上に作図して追体験とした。この体験により、当時の人々の作図法、すなわちピタゴラス数さえ知っていれば紐だけで正確な長方形が作図可能であることを共感的に知り、長方形の作図とピタゴラス数とのつながりを意識することを目指す。

プラトン著の『テアイテトス』は、古代ギリシアの知識人であったソクラテスとその弟子テアイテトスとの、当時の数の考え方についての対話を記載している。テアイテトスは数 (自然数) を「等しいものの掛け合わせで表現できる数」と「等しいものの掛けあわせで表現できない数」とに分類し、前者を「正方形数」、後者を「長方形数」と呼んだ。この原典を解釈することで、「数を図形として捉え、理解する」という、現在にはない当時の数の考え方を、当時の人々の立場に立って共感的に知ることを目指す。また、当時の正方形数が現代の四角数であるので、次の四角数の探求につなげるための話題にもなっている。

長さ(AB)を基準とし、その二分の一の長さの縄(BC)を基準の長さの縄の西側に付加する。次に、縄の全長(AC)の西側の三分の一部分(BC)上に、B 点から後者(BC)の長さの六分の一を減じた位置に印(D)を作る。

祭場の背骨線(中心となる線)の両端(A と B)上に二本の小杭を打ち込み、そこに縄(AC)の両端を固定し、印(D)を持って縄のたるみがなくなるまで南側に引き張り、印(D)の位置の地上に標識(D)を作る。同様の手続きによって(AB の)北側に点(E)を決定する。次に、縄(AC)の両端の位置を入れ換えて逆にし、反対側で(B 点上で)同様の手続きを南側と北側に行う(F 点、G 点をそれぞれ決定する)。得られた四点(D, E, G, F)を結んで、長方形(DEGF)が作図される。以上が長方形の正しい設置法である。

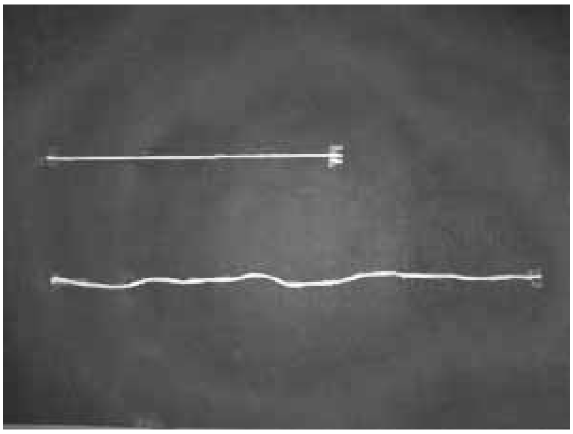
【資料①】『シュルバスートラ』の中の
長方形の作図部分
(『アーパスタンバ・シュルバスートラ』
(井狩弥介 訳) を参考に、授業者が意訳)

『*Greek Mathematical Work*』には、ピタゴラスの図形数に関する記述及び研究がなされている。ピタゴラスは丸い小石を用いて四角数を探求し、このときに 4 の四角数と 5 の四角数、その間のグノモンの関係からピタゴラス数を発見したという。おはじきを用いて、ピタゴラスに則って四角数を探求することにより、ピタゴラスと同様の発見を生徒が体験し、数学の発見する面白さを味わうことを目指す。

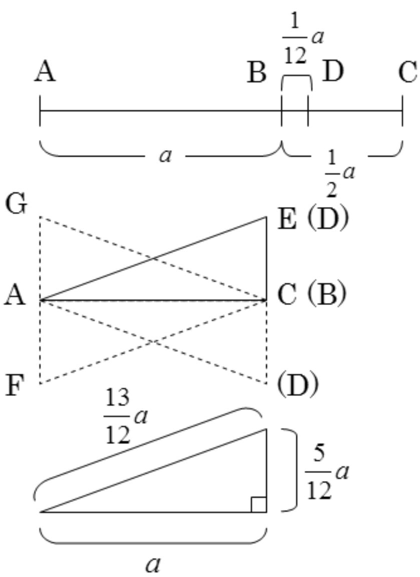
また、これら以外の文献もあたり、古代、ピタゴラス数や三平方の定理がインド、ギリシアの他に中国、エジプト、バビロニアでも発見されていたことや、そこでの使われ方を紹介することによって、

数学のある一つの事実がいろいろな地域で独自に発見され、発展していったことを知り、様々な土地・分野で使用されていたことを知る。

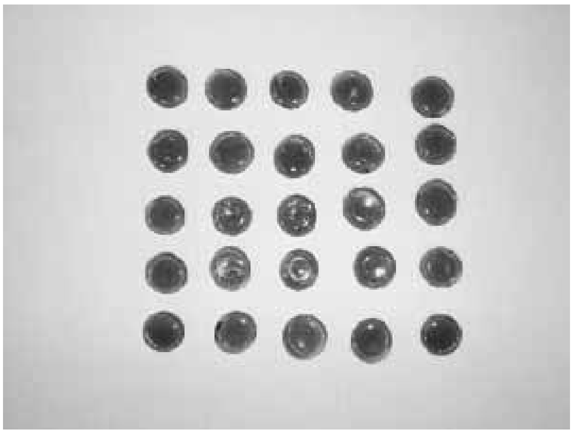
4. 道具の数学的解説



【図②】授業で使った紐



【図③】長方形作図の数学的解説



【図④】授業で使ったおはじき

＜長方形を作図する道具：「縄」について＞

授業で取り上げた部分は、『シュルバスートラ』(訳本) の中に記載されている長方形の作図部分 (資料①参照) である。今回の授業で取り上げた長方形の作図も、当時経験的に知られていた (5,12,13) というピタゴラス数を、直角を作る原理として使用している。

授業では、基準とする長さの紐 (図②の上の紐) とそれより長い紐 (図②の下の紐) 、そして横に長く線を引いたワークシートを用いて作業した。基準の長さは作図する長方形の長辺の長さになるものであり、ワークシートの線は背骨線と言い、長方形の 2 つの短辺の中点を通る中心線となるものである。つまり、資料①の記述における AB が短い紐の長さであり、その長さから記述のように長い紐に印をつけることにより、長い紐は実際に作図時に用いる紐となる。授業時は紙の上を北として左右に背骨線が延びる方向に紙を置いた。

資料①の図解は図③に記す。作図の解説は以下のとおりである。まず基準とする長さ (長方形の長辺となる) と中心とする線 (背骨線) を決める。次に、AD：DC：AB＝13：5：12 となるように、紐に印を付ける。そして、背骨線に直角三角形の底辺の長さ (AB) をとり、印 (D) を持って紐を引き張ることにより、長方形の 1 頂点をとる。長方形の他 3 頂点も同様にとり、その 4 点を結ぶことで求める長方形が得られる。

＜四角数を体験する道具：「おはじき」について＞

ピタゴラスは丸い小石を並べて四角数を探求したという。授業では丸い小石の代わりにおはじきを用いて、四角数の性質の調査やピタゴ

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.29-42、2004年3月

ラス数の発見を行った (図④参照) 。

四角数とピタゴラス数とのつながりに関する解説は以下のとおりである。四角数ははじめにおはじきを 1 つ置き、その下と右の 2 辺にL字型に次々とおはじきを並べていく (L字型のおはじきをグノモンという) ことによって作られる。4 の四角数と 5 の四角数、そしてその間に加えられているグノモンを構成しているおはじきの個数に注目すると、図形的視覚的な特徴から、$4^2+3^2=5^2$という式が成り立つ、つまり、(3,4,5) のピタゴラス数が四角数から発見できる。また、1 つ目の四角数 (1 つのおはじき) とそこに次々に加えられていくグノモンは 1 から始まる奇数の列になっていること、そのときできる各四角数は常に自然数の 2 乗の形に表せるという特徴から、最後に加えたグノモンが 2 乗の形で表せれば、このことからもピタゴラス数を発見できる。

5. ピタゴラス数を題材とした授業概要

(1). 授業環境

① 対象：私立中学校 3 年生 (3 クラス 130 名)
「三平方の定理」既習

② 日時：平成 15 年 12 月 15 日、16 日、17 日、18 日 (45 分×3)

③ 準備：コンピューター (Windows) 、Microsoft Power Point 、ビデオプロジェクター、事前・事後アンケート、授業資料、作図用の紐、作図用ワークシート (背骨線が記入されている) 、おはじき、補助用台紙 (格子が記入されている)

(2). 授業展開

＜1 時間目＞

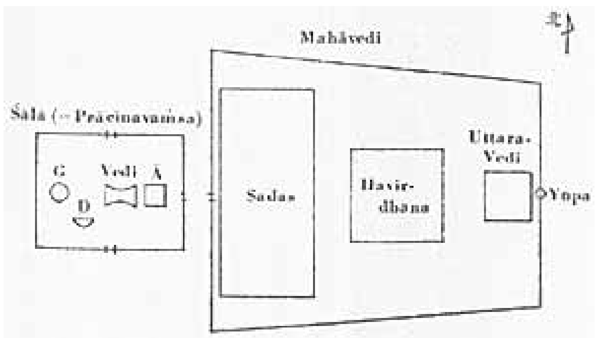
【目標】

古代インドの文献『シュルバスートラ』を生徒自身が原典解釈し追体験することで、長方形の作図にピタゴラス数が用いられていることを知る。また、ピタゴラス数や三平方の定理が古代の世界各地で発見されていたことを認識する。

【授業の流れ】

① 導入：紐だけで長方形の作図は可能か？

はじめに、「巻尺しかない状況で、サッカーのフィールドを書くにはどうしたらよいか？ 」という問題を考えた。さまざまな意見が出たが、結局「直角をどうやって書いたらよいか？ 」という疑問で答えに詰まった。そこで、この問題と同じような問いを古代の人々も考えていたこと、そして、その問題をどのように解決していたのかということを、1 時間目で体験していくことを説明した。

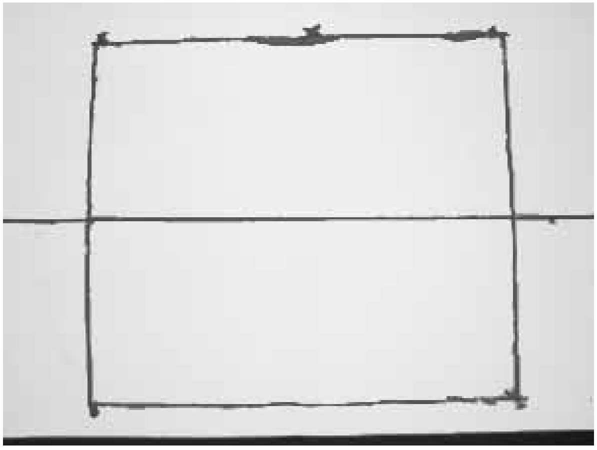


【図⑤】祭場の図

② シュルバスートラによる作図

『シュルバスートラ』の一部 (授業者が適宜意訳；資料①) を生徒自身が解釈して、二人一組で作図した (図⑥、図⑦参

【図⑥】生徒の作図の様子



【図⑦】生徒が作図した図形

照）。授業者は極力手本を示さず、生徒自身の解釈にまかせた。これによって、作図途中で誤った解釈も出たが、適宜授業者が訂正していった。生徒は試行錯誤しながら自ら古代インドの縄張り数学を追体験していき、図形を作図することができた。

③ 作図した図形の考察

「作図された図形は何だろう？」という問いに対して、「四角形」「長方形」という答えが返ってきた。そこで、本当にそうなっているかどうかを、基準の長さABを12として考察した。

ABを12とすると、CDが5、ADが13であるので、作図の仕方から、背骨線ABとA,Bを端点として張った紐が直角三角形を作ることを示し、描けた図形DEGFが確かに長方形になることを確かめた。

つまり、古代インドでは、直角を書くために（5,12,13）という三角形の三辺を使っていたことが確認できた。

④ 三平方の定理が発見されていた地域

古代インドでは三平方の定理が発見されていたわけではなく、(5,12,13）を三辺とする三角形が直角三角形すなわち直角を作るということを経験的に知っていたにすぎないということを指摘し、では、古代において三平方の定理が発見されていた地域はどこかを説明した。

ピタゴラスがギリシアで紀元前500年以上前に「ピタゴラスの定理」として発見していたことと、実はそれ以外にも、中国で紀元前100年以前に「句股（こうこ）定理」という名で三平方の定理が発見されていたことを、授業資料に添付したそれぞれにまつわる文献（ギリシア; Euclid, 1971, pp. 33-34. 中国; 劉徽, 1980, p. 242）を見ながら紹介した。

⑤ ピタゴラス数の定義とピタゴラス数が発見されていた地域

ピタゴラス数とは、先の作図でも用いられた（5,12,13）や、よく知られている（3,4,5）のような、三平方の定理を満たす自然数の三つ組のことであると定義した。また、先の古代インドのように、ピタゴラス数が発見されていた地域はどこかを説明した。

先のインドの他にも、エジプトでは「縄張り師」とよばれる人々が（3,4,5）のピタゴラス数を用いて土地の区画整理をしていたこと、バビロニアでは紀元前1700年以上

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.29-42、2004年3月

前の石版にたくさんのピタゴラス数が刻まれていることを、授業資料に添付したそれぞれにまつわる資料(バビロニア；1984, p. 91)を見ながら紹介した。

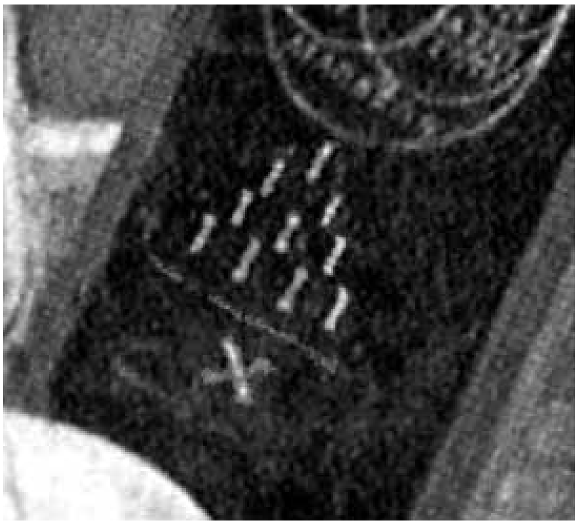
以上より、ピタゴラス数・三平方の定理は、昔から、世界各地で、独自に発見され、当時の人々に深く関わって扱われていたことを認識した。

＜2 時間目＞

【目標】

「数を図形として捉え、理解する」という、現代とは異なった古代ギリシア人の考え方を知る。また、四角数をピタゴラスに倣って探究し、四角数からピタゴラス数を発見する。

【授業の流れ】



【図⑧】ピタゴラスの見ている黒板に描かれた三角数

【図⑨】ピタゴラスが見ている三角数に見入る生徒たち

① ピタゴラス

1 時間目に学んだピタゴラス数やピタゴラスの定理を発見した、ピタゴラスを紹介した。そして、Raphael の”The School of Athens”に描かれているピタゴラスを見て、ピタゴラスが見ている黒板の中の図に注目した。そこに描かれている図 (図⑧参照) は 4 つ目の三角数であることを紹介し、ピタゴラスは三角数や四角数を探究していたことと、この三角数や四角数がまさに古代ギリシア人の考え方、すなわち「数を図形で捉え、理解する」という考え方であるということを説明した。この考え方は、現代とは異なった考え方なので、次で例を挙げて当時の考え方をよりよく認識していく。

② 「数を図形として捉え、理解する」という考え方

古代ギリシア人の数の考え方を知るために、ピタゴラスと同時代の古代ギリシア人であるソクラテスを紹介し、プラトン著『テアイテトス』(Platon, 1974, pp. 194-195) のソクラテスとテアイテトスの対話の一部を原典解釈した。ここでは、「正方形数」と「長方形数」という観点で自然数を分類していることを説明して、「正方形数」「長方形数」はそれぞれどのような数かということを考えた。また、当時ギリシア人はこのように数を捉えていたこと、そして、この「正方形数」「長方形

数」という数の捉え方こそが「数を図形として捉え、理解する」という考え方であると認識した。

③ 四角数の定義とグノモン

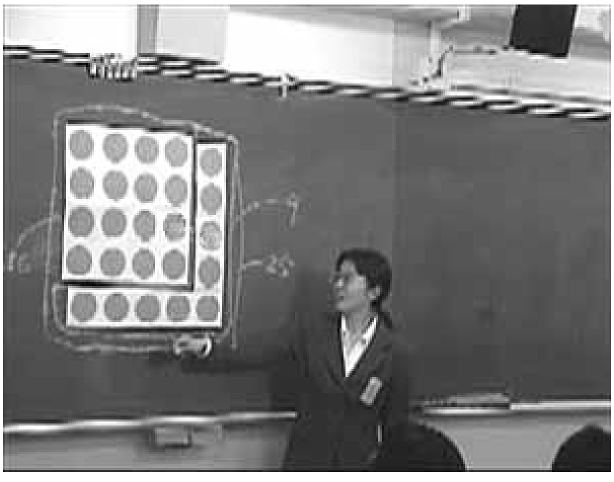
まず、先に学んだ「正方形数」が、現代の四角数であると定義した。ピタゴラスは四角数を丸い小石を並べて探究したと言われている。これに倣い、四角数をおはじきを用いて探究していった。まず、四角数ははじめにおはじきを 1 つ置き、その下と右の 2 辺に L 字型に次々とおはじきを並べていくことによって作られていくことを説明した。この次々に加えていく L 字型のおはじきをグノモンということも紹介した。また、授業では便宜上 1 つ目のおはじきを 1 の四角数、そのまわりに次々にグノモンを加えてできる四角数を、順に 2 の四角数、3 の四角数……と言うことにした。

④ 四角数の特徴

おはじきを配り、二人一組で四角数を作りながら、四角数の特徴を調べた。結果、1 つ目の四角数とそこに次々に加えられていくグノモンは 1 から始まる奇数の列になっていること、そのときできる各四角数は自然数の 2 乗の形に表せることが分かった。

⑤ 四角数の探究

おはじきを並べて、4 の四角数と 5 の四角数、そしてその間に加えられているグノモンを構成しているおはじきの個数に注目した。4 の四角数を構成するおはじきは 16 $=4^2$個、5 の四角数を構成するおはじきは 25$=5^2$個、その間に加えられているグノモンを構成しているおはじきは 9 個、これはすなわち 3^2個と表せ、これらの図形的視覚的な特徴から、$4^2+3^2=5^2$という式が成り立つ、つまり、(3,4,5) のピタゴラス数が四角数から発見できた。この時の授業者と生徒のやりとりを以下に書く。Sは不特定多数の生徒の反応をまとめて記述している。



【図⑩】図形数からピタゴラス数を発見する

T「4 の四角数と 5 の四角数に注目して考えてみて、って言ったね。4 の四角数は何個のおはじきから出来ているかな? 」

S「16 個。」

T「そうだね。じゃあ、4 の四角数にグノモンを足して、この全体の 5 の四角数は? 」

S「25 個。」

T「そうです。では、この時に足されたグノモンの数は? 」

S「9 個。」

T「うん、そうだね。ところで、この形をよく見てみて。4 の四角数は…」

S「正方形…」

T「そう! だから、形からも 16=4^2だね。5 の四角数も…」

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.29-42、2004年3月


【図⑪】発見に興奮する生徒たち

S「正方形！」
T「そう！だから…」
S「5^2！」
T「そうです！…ところで、9っていうのは…？」
S「…3^2！」
T「そう！3^2とも書けるね。」
S「ああっ！」　(あちこちで気付き、驚嘆の声)
T「ということは…」
S「全部2乗になってる！」
T「そう、全部2乗になっていて、しかも…足すと…$4^2+3^2=5^2$という式が成り立つ。」
S「おおーっ！」

＜3時間目＞

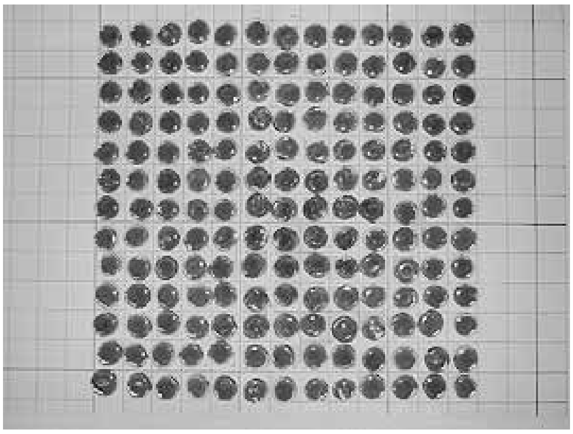
【目標】

ピタゴラスに倣って四角数からピタゴラス数をもっと見つけ、その方法を一般化する。また、ピタゴラスとは別の発見法であるプラトンの方法を紹介し、ピタゴラスの方法と互いに補い合っていることを知る。

【授業の流れ】

① ピタゴラスの方法


【図⑫】おはじきを数える生徒たち


【図⑬】並べられたおはじき

前回行ったように、ピタゴラスは連続する二つの四角数の間に加えられたグノモンが平方数であれば、その二つの四角数とグノモンを構成しているおはじきの各々の数は、三平方の定理を満たす3つの数、すなわちピタゴラス数となることを発見した。我々もピタゴラスに倣って、グノモンが平方数になるまでおはじきを用いて四角数を作り、ピタゴラス数を見つける追体験の活動を行った。1グループ当たり170個のおはじきと、おはじきを並べやすくするために格子を書いた補助用台紙を配って活動した結果、(3,4,5) と (5,12,13) のピタゴラス数が見つかった (図⑫、図⑬参照) 。原理を認識した生徒からは、「おはじきの数がたくさんあれば、次は (7,24,25) 、その次は (9,40,41) 、その次は (11,60,61) ……というふうに見つ

けられる」という意見も出た。

② ピタゴラスの方法を現代の数学の考え方で表す

先に行ったピタゴラスの方法で求められた、あるいは求められるであろうピタゴラス数の特徴を聞くと、グノモンが奇数であり、かつ平方で表せるときに見つかる、連続する二つの四角数から見つかるピタゴラス数の二項は隣り合った数であるなどの意見が出た。この意見をふまえて、ピタゴラスの方法を現代の数学、すなわち文字式で表した。四角数を構成しているおはじきは四角数の形から必ず平方の形で表せるので、今回の連続する二つの四角数について、小さい方の四角数を n^2 とすると、大きい方の四角数は $(n+1)^2$ と表せる。また、このとき加えられるグノモンは $2n+1$ である。そこで、グノモンが平方数であるという意見から、$2n+1=m^2$ (ただしmは奇数) とおく。また、小さい四角数 n^2 にグノモンを合わせて一つ大きい四角数が構成されるのだから、$n^2+m^2=(n+1)^2$ という式も成り立つ。これら 2 つの式からnを消去して、$m^2+(\frac{m^2-1}{2})^2=(\frac{m^2+1}{2})^2$ という式が導けた。そして、この式のmにさまざまな数を代入して、具体的にピタゴラス数を求めたところ、確かに先に求められたようなピタゴラス数が求められ、その特徴として、mに奇数を入れればピタゴラス数が求まり、それ以外では求まらない、真ん中と右の二項は隣り合った数の 2 乗になっていることが分かった。

③ プラトンの方法の紹介と、ピタゴラスの方法との違い

ピタゴラス数を求める別の方法として、ピタゴラスの 1 世紀後の古代ギリシア人であるプラトンと、プラトンの方法を式で表現したものを紹介した。プラトンの式は $(2m)^2+(m^2-1)^2=(m^2+1)^2$ であり、これは、ピタゴラスの式の各項の平方される数を 2 倍することによっても得られる。プラトンの式から求められるピタゴラス数は (4,3,5) 、(6,8,10) 、(8,15,17) などであり、特徴として m は奇数でなくてもピタゴラス数が求まること、真ん中と右の二項は 2 つ差がある数の 2 乗になっていることも紹介した。さらに、それぞれの方法の特徴から、(3,4,5) のピタゴラス数はどちらでも求まるが、それ以外はどちらかでしか求めることができない、すなわちピタゴラスの方法とプラトンの方法は互いに補い合っていることが認められた。また参考として、どちらの方法でも求まらないピタゴラス数 (例：(30,16,34)) もあり、全てのピタゴラス数が求まる方法として、ユークリッドの式というものがあることも紹介した。

6. 議論

(1). 課題 1 に対する議論

課題 1：ピタゴラス数に関する古代数学の原典解釈及び歴史的道具を用いた追体験により、生徒が自ら体験し発見する喜びを味わうことができるか。

「三平方の定理は [図形　相似　数字　因数分解　角度　方程式　測量　面積　関数　その他(　　)] のうちどれに関わるか？」というアンケートに対して、事後アンケートで「図形」と「数字」あるいは「図形」「数字」「測量」を同時に選択している生徒が事前よりも大幅に増えた。その理由として「ピタゴラス数は図形の数だから」「ピタゴラス数で面積や図を求めることができるから」「シュルバスートラや正方形数

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.29-42、2004年3月

などから」という意見が挙がっていた。特に、事後の方の理由で、「今回の授業で見つけられた」と述べた生徒がたくさんいた。これは、1 時間目に行ったシュルバスートラを用いた作図を追体験して長方形が書けたことや、2 時間目に行った、おはじきを用いた四角数の探求の場面で、四角数とグノモンの関係から (3,4,5) のピタゴラス数が発見できたことを指している。これらの意見は、古代の人々の「図形を数で捉え、認識する」という、今までの自分には無かった考え方を発見的に認識したことに他ならない。

また、授業記録からは、1 時間目で古代の人々がピタゴラス数だけを使って作図していたことを実感したときや、特に 2 時間目の四角数からピタゴラス数を発見したときに、驚きと歓喜の声がうかがえた。アンケートの感想からも、「四角数からピタゴラス数が発見できてびっくり」「ピタゴラスは頭がいいんだなと思った」等の意見が述べられていた。このことからも、追体験を通して、自ら体験し発見することができ、その喜びを味わうことができたことがうかがえた。

以上より、ピタゴラス数に関する古代数学の原典解釈及び歴史的道具を用いた追体験により、生徒が自ら体験し発見する喜びを味わうことができたとことが認められた。

(2)．課題 2 に対する議論

課題 2：課題 1 を通して、生徒が人の営みとしての数学を認識し、自らの数学文化とは異なる新しい数学の考え方を共感的に認めることができるか。

「数学は日常生活に役立ちます」という質問に対して、「大賛成」「賛成」と答えた生徒が、事前アンケートでは 39%であったのに対し、事後では 55%に増えた（＊）。事前アンケートには「計算は必要」「簡単な算数以外はいらない」という、計算のみを数学の有用性とする否定的意見が多かったが、事後アンケートには、「縄だけでも長方形が書けた」「今回の授業で実際に図形が書けた」という、計算以外の活動的な数学の有用性を挙げる肯定的意見が多く挙げられた。また、「数学は生きていくうえで必要があってできた学問です」という質問に対して、「大賛成」「賛成」と答えた生徒が、事前では 40%であったのに対し、事後では 50%に増えた。事後アンケートには理由として、「測量する上で必要だったからピタゴラス数やピタゴラスの定理ができた」「昔の人は建物を作ったりする時、必要だった」「畑を作る時とかのために必要だったと思う」ということなどが挙げられた。これらの意見は、1 時間目に行った、シュルバスートラを用いた当時の作図を追体験を通して学習したことで、人の営みとしての数学を認識したことを表していると考えられる。また、「数学を歴史に沿って勉強すること、昔に行われた数学を勉強することは価値があります」という質問に対して、「大賛成」「賛成」と答えた生徒が、事前アンケートでは 26%であったのに対し、事後では 39%に増えた。同アンケートには、理由として、「定理が発見された由来が分かる」「昔の人の発見の仕方がよくわかる」「いろいろな時代の考え方がわかる」ということなどが挙がった。このことから、今回の原典解釈や歴史的道具を用いた追体験を通した授業により、古代の人々の数学に関する発見の由来や発見の仕方、当時の数学に関する考え方が認識でき、数学が人の営みとしての活動であることを認識できたと言える。また、

異文化体験を原典解釈や道具を用いた追体験を通して行った結果として見れば、自身の中には無かった新しい考え方やその由来を共感的に認識できたと言えよう。

以上より、生徒が人の営みとしての数学を認識し、自らの数学文化とは異なる新しい数学の考え方を共感的に認めることができたことが確認できた。

(＊)　母平均の差の検定

「数学は日常生活に役立ちます」という質問に対する事前・事後の回答に関して、母平均の差に関する検定を行った。両母集団が互いに独立であると仮定してウェルチの検定を行った。回答結果は以下のとおりである。

	大賛成(5)	賛成(4)	どちらでもない(3)	反対(2)	大反対(1)
事前（130）	9	42	52	23	4
事後（112）	13	48	35	11	5

（大賛成を 5、賛成を 4、どちらでもないを 3、…として、以下では数値化した。）

事前・事後の母集団の平均をそれぞれμ_1, μ_2とし、帰無仮説を$H_0 : \mu_1 = \mu_2$、対立仮説を$H_1 : \mu_1 < \mu_2$とする。$t = 2.034$であり、$\nu = 231$なので、tは自由度 231 のt分布$t(\nu)$に従う。有意水準を$\alpha = 0.05$と設定すると、t分布の片側 5 パーセント点は$t_{0.05}(120) = 1.658 > t_{0.05}(231) > t_{0.05}(240) = 1.651$である。よってt =2.034> $t_{0.05}(231)$となり、帰無仮説は棄却される。従って、事後の母集団の平均値が事前の母集団の平均値よりも上がっていることが検定から確認された。

その他、以下のアンケート結果に対しても同様に検定を行った結果、有意水準 5%もしくは 10%で、事後の母集団の平均値が事前の母集団の平均値よりも上がっていることが確認できた。(紙面では割愛する。)

課題 1、2 の議論より、ピタゴラス数に関する古代数学の、原典解釈及び歴史的道具を用いた追体験を取り入れた授業を行うことによって、生徒が自ら体験し自ら発見する数学的活動の楽しさを見出し、多面的な数学の考え方を共感的に認めることができたことが示された。

7. おわりに

本研究では、ピタゴラス数に関連したインドの縄張り数学とギリシアの考え方及び四角数を、数学史原典の解釈及び歴史的道具を用いて追体験する授業実践を行った。これによって、生徒は自ら体験し自ら発見する数学的活動の楽しさを見出し、多面的な数学の考え方を共感的に認めることができた。

授業実践後に、アンケートの感想において「シュルバスートラを読むのが難しかった」「昔の人は頭が良かったんだなあ」「四角数からピタゴラス数を発見するのは、先生が言ってくれるまで分からなかった」等の意見も見られた。これらの意見が示すように、ピタゴラス数という題材は簡単なものではない。まして、ピタゴラスの発見した過程を辿って同じ発見をすることは容易ではない。しかし、だからこそ追体験を通した数学的活動の楽しさがより大きなものとなるであろう。今回の授業において、ピタゴラスの方法による四角数からピタゴラス数の発見に重点を置いたが、ピタゴラス数の発見法はプラトン等様々な

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.29-42、2004年3月

人が考案している。今回取り上げられなかったそれらを授業に活かすこと、また、3 時間の授業にさまざまな課題を盛り込みすぎたので、もっと内容を精選することが今後の課題となる。

謝辞

研究授業の実施に際して、私立茗溪学園の岩村直人先生をはじめ、数学科の諸先生方には、貴重なご助言・ご指導、並びに多大なるご協力をいただきました。厚く御礼申し上げます。

注)

本研究は、平成 15 年度科学研究費、特定領域研究(2)課題番号 15020214「数学用機械と JAVA による移動・変換と関数・微積ハンズオン教材の WEB 化研究」 (研究代表者礒田正美) において開発された歴史的道具を前提にして、平成 15 年度科学研究費、基盤研究(B)(2) 課題番号 14380055「数学の文化的視野覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」 (研究代表者礒田正美) の一環として行われた。

引用・参考文献

(1) 文部省 (1999). *中学校学習指導要領.* 東京: 財務省印刷局.
(2) 文部省 (1999). *中学校学習指導要領(平成 10 年 12 月)解説: 数学編.* 東京: 大阪書籍.
(3) 礒田正美 (2001). 異文化体験からみた数学の文化的視野の覚醒に関する一考察: 隠れた文化としての数学観の意識化と変容を求めて. *筑波数学教育研究*, 20, pp. 39-48.
(4) Fauvel, J., & Maanen, J. V. (2000). *History in Mathematics Education: The ICMI Study.* Boston: Kluwer Academic Publishers.
(5) 礒田正美 (1987). 数学学習における数学史の利用に関する一考察. *筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告*, 26, pp. 157-174.
(6) 礒田正美, 土田知之 (2001). 異文化体験を通じての数学の文化的視野の覚醒. *日本科学教育学会年会論文集(25)*. pp. 497-498.
＜上記以外で授業の際に引用及び参考にした文献＞
(7) 著者不明 (1980). アーパスタンバ・シュルバスートラ (井狩弥介 訳). 矢野道夫 (編), *インド天文学・数学集* (pp. 373-488). 東京: 朝日出版社.
(8) Platon (1974). *テアイテトス* (田中美知太郎 訳). *プラトン全集 2* (pp. 173-404). 東京: 岩波書店.
(9) Heath, S. T. (1981). *A HISTORY OF GREEK MATHEMATICS Volume I: From Thales to Euclid*. New York: Dover Publications.
(10) Heath, I. (1939). *Greek Mathematical Work, I: Thales to Euclid*. Massachusetts: Harvard University Press.
(11) Euclid (1971). *ユークリッド原論* (中村幸四郎 ほか 訳). 東京: 共立出版.
(12) 劉徽 (1980). 劉徽註九章算術 (川原秀城 訳). 薮内清 (編), *中国天文学・数学集* (pp.

45-271). 東京: 朝日出版社.
(13) Van der Waerden, B. L. (1984). *数学の黎明* (村田全, 佐藤勝造 訳). 東京: みすず書房.