出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.177-190、2004年3月

求積法の歴史を扱った授業実践に関する一考察

―紀元前から現在に至る求積法の変遷―

筑波大学大学院修士課程教育研究科
奥山 洋士

章構成

1．はじめに
2．研究目的・研究方法
3．「求積法の歴史」の教材化
4．道具の数理的考察
5．「求積法の歴史」の授業概要
6．議論
7．おわりに

要約

本研究では求積法の歴史を教材とし、生徒の数学観の変容をみた。積分誕生以前の歴史を追体験することで数学史を学ぶことの意義を認識したといった意識の変化がみられた。また、道具を用いた数学的活動を通して現在の求積法を体験することで数学の有用性を示し、身の回りに潜む数学的性質についての興味・関心を高めることができた。

キーワード：数学史、求積法、積分、数学的活動、プラニメーター

1．はじめに

平成 11 年に告示され、平成 15 年度から試行された高等学校学習指導要領第 2 章第 4 節数学、数学基礎の目標に「数学と人間とのかかわりや、社会生活において数学が果たしている役割について理解させ、数学に対する興味・関心を高めるとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し数学を活用する態度を育てる。」とある。また、内容の取り扱いとして「数学と人間の活動」では数学史的な話題を取り上げるものとする。また「社会生活における数理的な考察」については社会生活と数学との関わりの身近な事例を取り上げるよう配慮するものとするとある。

さらに、礒田(2001)では「それぞれの数学を、その数学が使われた文化、時代の文脈において、解釈し、その時代の人の文化的営みを認める活動、そして、そのような解釈、吟味を通じて、現在我々の学ぶ数学が一つの文化であることを認める活動は、数学を人間の文化的営みとして体験する活動の典型である。その解釈、吟味の対象にできるのは、真正の歴史資料である一次文献、そしてその時代の道具である。」とある。

以上のような立場より、数学史を取り入れた授業において当時の数学者の試行錯誤を追体験し自ら学び、自ら考えることで生徒自身が数学のよさを感じとり、生徒の数学観の変容が見られるのではないかと筆者は考える。

History in Mathematics Education(2000)では、歴史は我々に役立つということを次のように示している。「数学の概念の意味、定理、方法、そして証明をより深くつかむ」「人間の活動と関係した人間の努力としての数学をみる」これらの記述より授業に数学史を取り入れ

ることで、生徒の数学観が変容するであろうという筆者の期待はより一層強いものとなる。

本研究では求積法を教材として扱った。具体的には、積分が誕生する以前の求積法を、数学史原典を用いて追体験した。極限の概念がない時代に、様々な数学者が考案した幾何的に面積を求める方法を追体験することで当時の数学者の試行錯誤を知り、数学を人間の営みとして認識できるであろう。さらに現在の社会生活の中ではどのように求積されているのかを道具を用いた数学的活動を通して体験し、数学の有用性を確認することを目的とした。

授業前と後で、生徒が自ら学び、自ら考える力を育み、生徒自ら数学を学ぶ価値を見出すことができるのかどうか、どのように生徒の数学観の変容が見られたのかを調査した。また、数学的活動を通して数学に関する興味・関心が高まるかどうかも調査した。

２．研究目的・研究方法

(1)研究目的

曲線図形の求積法の発見から発展の歴史的過程を、数学史原典を用いて追体験を行うことによってこれまで生徒がもっていた数学観がどのように変容するかを明らかにする。また、求積するための道具「プラニメーター」を用いた数学的活動を行うことによって、数学の授業で学習した積分が社会生活ではどのように使われているのかを体験させ、道具の数理的考察を行うことで、生徒の数学に関する興味・関心を高めることを目的とする。上記の研究目的達成のために以下の課題を設定する。

課題①：求積法の歴史を追体験することで、当時の数学者の試行錯誤を感じとり、生徒の数学観の変容が見られるか。また、自ら学び、自ら考える力の育成は見られたか。

課題②：数学が使われている道具による数学的活動を通して、数学の有用性を身近に感じることができ、興味・関心を高められたか。

(2)研究方法

数学史原典を用いて教材開発を行い、授業を行う。授業の様子を撮影したビデオ、事前・事後アンケートおよび生徒の反応をもとに考察する。

３．「求積法の歴史」の教材化

本研究では原典としてアルキメデス「放物線の求積」、カヴァリエリ「A source book in mathematics,1200-1800」、ニュートン「PHILOSOPHIE PRINCIPIA」、またプラニメーターに関する文献、「計算機の歴史」を用いた。

まず、積分が誕生する以前はどのようにして曲線図形を求積していたのかを追体験した。近似によらない曲線図形の求積法「アルキメデスの取り尽くし法」を、直線と放物線とで囲まれた図形の面積を求めるための定理を証明して考察した。求める図形に内接する三角形を次々と取っていき、それら三角形の面積を足し合わせることで求めたい図形を求積するという幾何学的処理は、生徒に論理的思考力を育成することを促すとともに、幾何的に考えることの大切さにも気づかせる。次に今日の積分学の始まりとなった不可分量という概念を用いて曲線図形を求積する「カヴァリエリの原理」を取り入れた。この定理は、あ

出典：中学校･高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.177-190、2004年3月

る平行線の間に二つの平面図形があったとき、平行線に平行に切った時における図形の切り口の長さが任意の場所で互いに等しいならばこの平面図形の面積は等しいと主張している。当時は座標の概念がまだなく、複雑な曲線図形の求積が困難であった。彼の定理を追体験することで数学のよさを感じ取り、数学観を発展させることができるであろう。さらに極限の概念を生み出し、求積法の概念をまとめあげて積分の基礎を作ったニュートンの「プリンキピア」を取り上げた。彼の考えは、現在我々が用いている積分法に直結する。

アルキメデス、カヴァリエリを扱った先行研究には小林(2002)、臼田(2001)、中嶋(2002)などがある。また、積分法を扱った先行研究として西本(1990)、溝口(1993)、塚原(1999)などがある。本研究では、求積法が発見された紀元前から積分が発見された近代を経て、求積法が機械化された現代までの長い視点で見た求積における数学的発見を体系的に配置することで、先人たちの試行錯誤の過程を感じ取れるようにした。また現在の計算法で解答する演習問題を配置することで、過去と現在の結果に相違がないことも適時確認した。

紀元前から積分誕生までの歴史を学ぶことで機械的に公式に当てはめて面積を求めるだけの単調な数学ではなく、積分の誕生には先人達の様々な努力と研究があったという数学の奥深さを確認できるだろう。そして数学的な見方や考え方のよさに触れることによって自ら学び、自ら考える力の育成がなされると期待できる。求積法の歴史を学習した後、現在の測量現場で用いられている道具による求積法､「プラニメーター」による求積を実際に生徒に道具を扱わせて体験させた。この数学的活動を通して数学の有用性を知り、数学的な見方や考え方を豊かにし、興味・関心を高める。

４．道具の数理的考察

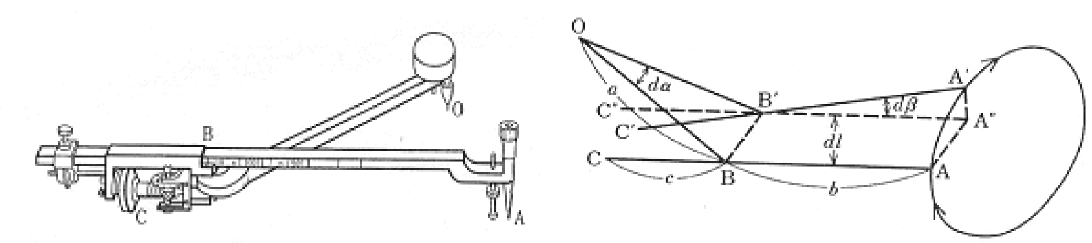


図 1 アナログ式プラニメーター　(左右の図のアルファベットは対応する)

O：極　A：針　B：関節　C：動輪

∠BOB'=dα　∠A"B'A'=dβ　AB//A"B'　OB=a　AB=b　BC=c

AB、A"B'の間の距離を dl とする。

A の針が閉曲線上を OB'A"を経て OB'A'にごくわずかに移動したとする。C にある動輪は C から C'にいたる AB に垂直な方向の変位に対して回転する。

その回転量を dn とすると　$dn = dl - c \cdot d\beta$　　　―(1)

OBA から OB'A'に変位するとき、OBA の描いた面積ｄS は

dS=△OBB"+△B'A"A'+□BAA"B'　$\frac{1}{2}a^2 \cdot d\alpha + \frac{1}{2}b^2 \cdot d\beta + bdl$　　―(2)

(1)を移項して　$dl=dn+c\cdot d\beta$　　　この式を(2)に代入

$dS=\frac{1}{2}a^2\cdot d\alpha+(\frac{1}{2}b^2+bc)\cdot d\beta+bdn$　　この式を閉曲線に沿って積分すると

$S=\frac{1}{2}a^2\int d\alpha+(\frac{1}{2}b^2+bc)\int d\beta+b\int dn$

(a)極 O が閉曲線外にある場合
OBA は A が図形上を変位して再び最初の位置にくるので
$\int d\alpha=0$　　$\int d\beta=0$
$\therefore S=b\int dn=b\times 2\pi rN$　　　r：動輪の半径　　N：動輪の回転数

(b)極 O が閉曲線内にある場合
A が図形上を移動して再び最初の位置にくるまでに O のまわりを一回転するので
$\int d\alpha=2\pi$　　$\int d\beta=2\pi$
$\therefore S=\pi(a^2+b^2+2bc)+b\int dn=\pi(a^2+b^2+2bc)+b\times 2\pi rN$
(a)(b)の結果について、動輪の回転数N以外は定数なのでNを計測すれば面積が求まる。

５．「求積法の歴史」の授業概要

(1)授業環境

実施日時
一日目 12 月 12 日(金)、二日目 12 月 16 日(火)（90 分×2 回)
対象
大学 3 年生、大学院 2 年生、大学院 4 年生　計 6 名
準備
コンピュータ(Windows)、ビデオプロジェクター、授業資料、Microsoft Power Point、事前・事後アンケート、プラニメーター、地図、方眼紙

(2)授業展開

一時間目：積分によらない求積法
①求積法の歴史
はじめに求積法の歴史について紹介した。それらの古い記録は古代エジプトのリンドパピルス、バビロニアの粘土板に残されている。かなり昔から人類は面積を求めることに関心があったことがわかる。

②曲線図形の求積法
アルキメデスが示すまで、曲線図形の面積は近似でしか求めることができなかった。当時は極限の概念がなかったので、彼は「背理法」と「取り尽くし法」を用いて正確に曲線図形を求積した。彼の著書、「放物線の求積」にある命題 24 を証明させることにより追体験を行った。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.177-190、2004年3月

　この証明の基本的なアイディアは放物線と直線で囲まれた図形から、内接する三角形を次々と取っていき、それらの三角形の面積を足し合わせることで求積する。

命題 24

放物線の切片 PQq の面積は△PQq の面積の$\frac{4}{3}$倍である

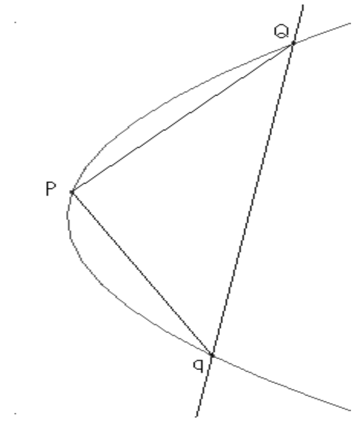


図１　放物線 PQq と三角形 PQq

写真１　証明をしている生徒

当時の証明が難しいという声が多数あった。
取り尽くし法の確認のため現在の考え方、等比数列と積分を使って命題を証明した。

問１
取り尽くし法を使わずに等比数列の和の公式と極限の考えを用いて命題 24 を確認せよ

問２

積分を用いて $y=2\sqrt{px}$ を x=0 から a まで積分することにより命題 24 を確認せよ

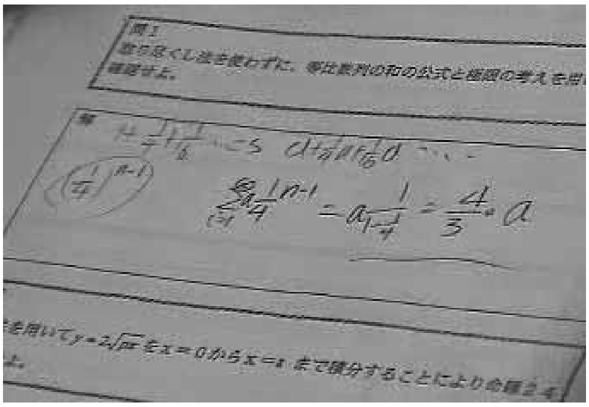
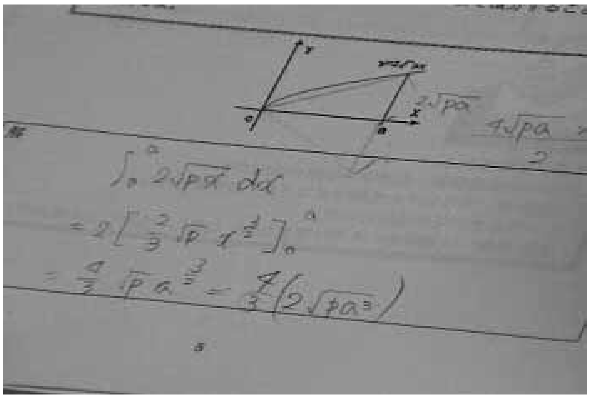


写真２　生徒の解答１

以下は授業者と生徒のやりとりである。
＜T：授業者　S：生徒＞
T：「問１と問２を解いて命題 24 を確認してください。」
しばらくして・・
S：「すげえ。」
S：「すごい。」
S：「本当にあってるよ。」



T:「アルキメデスは極限の概念を用いずに曲線図形を求積し、その考え方は現代の方法で確認しても正しいことがわかりました。」

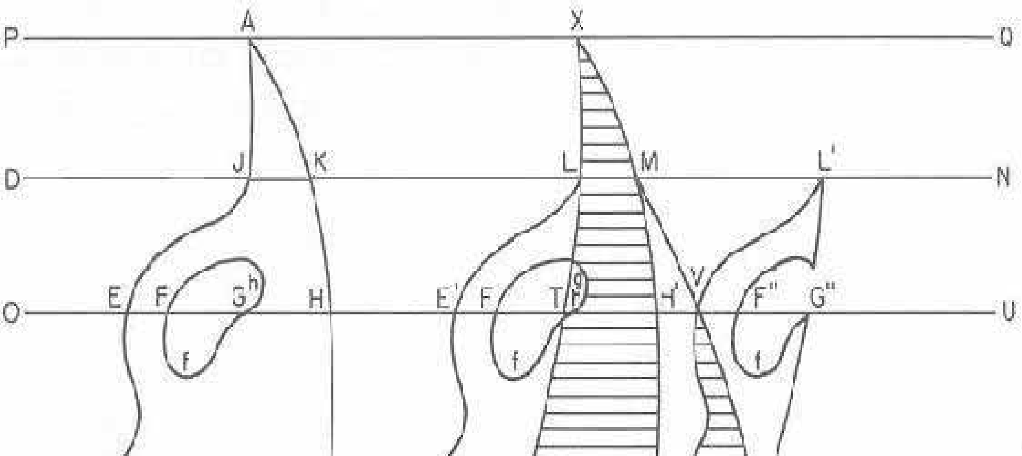
現在の計算法で問を解くことによって、アルキメデスの証明の正しさが確認された。

写真 3　生徒の解答 2

③求積法の発展

17 世紀までは求積法に関して著しい発展はみられない。近代の求積法の先駆をなしたケプラーの紹介をした後、不可分量という考え方を用いたカヴァリエリの原理を、原典を和訳したものを読み進めて考察した。

The Theorem. If between the same parallels any two plane figures are constructed, and if in them, any straight lines being drawn equidistant from the parallels, the included portions of any one of these lines are equal, the plane figures are also equal to one another; and if between the same parallel planes any solid figures are constructed, and if in them, any planes being drawn equidistant from the parallel planes, the included plane figures out of any one of the planes so drawn are equal, the solid figures are likewise equal to one another.



資料 1 カヴァリエリの原理(A source book in mathematics,1200-1800)

カヴァリエリの原理の和訳

ある平行線の間に 2 つの平面図形があるとき、その平行線の間にその平行線から等距離に引かれたどんな直線においてもその直線の図形に含まれる線分がどんな場合にも等しいなら、その 2 つの平面図形は互いに等しい。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.177-190、2004年3月

以下は授業者と生徒のやりとりである。<T：授業者　S：生徒>

S：「質問なのですが、この定理の使い道はどのような場面ですか？」

T：「この定理のモチベーションは、原典にある図 ABC のような、くりぬかれた図形の面積は簡単には求められませんが定理を使って面積が既知である図形と比較することにより求積できるところです。」

S：「なるほど。」

T：「この定理は平面図形だけでなく立体図形にも利用できます。」

T:「しかし、幅のない線をいくら集めても面積は大きさとして存在はしないし、厚さのない面をいくら集めても立体は存在しません。カヴァリエリの不可分量の考えには曖昧さがあるのです。」

始めは定理の理解が難しかったようだったが、説明後は定理の有用さがわかったという声が多数あった。また、カヴァリエリの考え方の疑問点に気づかせ、さらなる求積法の発展を示唆した。

説明後、カヴァリエリの原理を使って問題を解き、定理を確認した。

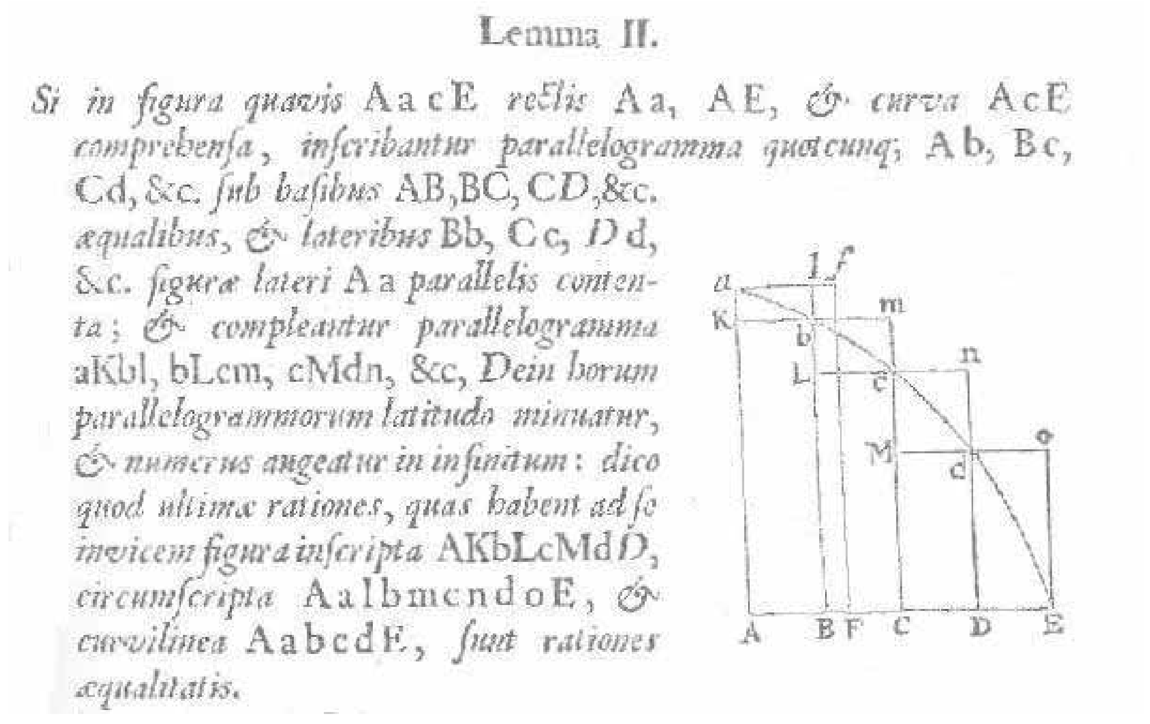
二時間目：積分の誕生から現在の求積法

①積分の誕生

積分の概念が生まれる準備として、デカルトが座標の概念を導入した。座標によって図形と数量を結び付けることができ、運動の変化を扱うことが容易になったので力学が発展した。

力学の発展によって課せられた問題を扱うため、求積法の概念をまとめあげ、積分の基礎を作った人物がニュートンである。

②ニュートンのプリンキピア



Lemma II.

Si in figura quavis AacE *rectis* Aa, AE, *& curva* AcE *comprehensa, inscribantur parallelogramma quotcunq;* Ab, Bc, Cd, &c. *sub basibus* AB, BC, CD, &c. *æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd, &c. *figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn, &c. *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes, quas habent ad se invicem figura inscripta* AKbLcMdD, *circumscripta* AalbmcndoE, *& curvilinea* AabcdE, *sunt rationes æqualitatis.*

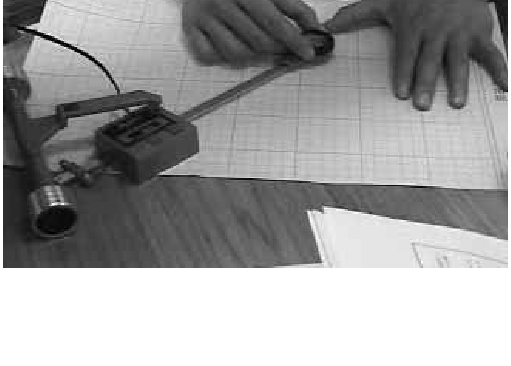
資料2　補題 2(プリンキピアより)

補題 2 の和訳(区分求積による求積法)
直線 Aa、AE、および acE によって限られた任意の図形 AacE において、等しい底 AB、BC、CD 等、および図形の１辺 Aa に平行な辺 Bb、Cc、Dd 等の内部に含まれる任意個数の平行四辺形をそれに内接させ、かつ平行四辺形 aKbl、bLcm、cMdn 等を完成させる。そうすれば、もしこれらの平行四辺形の幅が減少し、その個数が無限に増加するものと仮定すれば、内接図形 AKbLcMdD、外接図形 AalbmcndoE、及び曲線図形 AabcdE が相互に対して取るべく窮極の比は相等しくなるだろう。

この補題の説明後、すぐに区分求積だと気づいた生徒がいた。確認のため区分求積に関する問題に取り組んだ。
現在我々が使っている積分法が誕生するまでには、紀元前からの数学者達の努力や研究の成果があったからである。彼らの試行錯誤の過程を追体験したことで数学のよさを感じ取り、数学の見方、考え方を養うことができた。

②積分の器械化
19 世紀後半、物理学者たちはさまざまな器械の機構を数学的な方程式で記述しうるようになった。またその逆の作業、一組の方程式が与えられた時に、それらの方程式にうまく合うような動作をする器械なり器具なりを作り出すことにも取り組んだ。
面積を求める積分の働きをもつ「プラニメーター」という器械も作られている。プラニメーターは単純閉曲線で囲まれた部分の面積を測定するためのもので、この種のもので最初のものは 1814 年にドイツの J.H.ヘルマンに作られた。様々な改良を経て、19 世紀の中ごろにスイスの J.アムスラーが実用的なものとした。
アナログ式のプラニメーターは現在生産中止となっている。さらに骨董品となっており入手困難なため、この授業では現在の測量現場でも使われている面積表示がデジタル式のプラニメーターを準備した。

③実際に面積を測量する
プラニメーター､茨城県の地図のコピー(縮尺 400000 分の 1)､方眼紙を生徒に配布し、実際に測量する数学的活動を通して身近な数学を感じ、数学に関する興味・関心を高める。



以下は授業者と生徒のやりとりである。
＜T：授業者　S：生徒＞
T:「直線で囲まれた面積も求められるので、方眼紙上の任意の四角形の面積が正しく測れるか確認して下さい。」
S：「すごい！きちんと測れてる！」
S：「不思議だよね。」
S：「どういう仕組みなんだろう？」

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.177-190、2004年3月

写真 5　測量する生徒 1

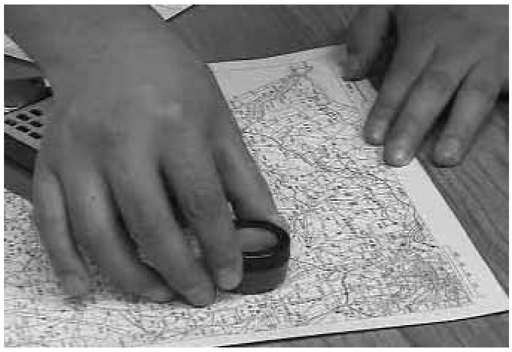


写真 6　測量する生徒 2

初めて見る道具に、どの生徒も興味を示して作業を行った。全員に測量してもらったが、茨城県の面積(6095.62km^2)に一致、または近い値を出した生徒はいなかった。道具の扱いに慣れていなかったためであろう。
(筆者が試行した結果では誤差 2%前後で測量できた。)

④アナログ式とデジタル式の対応

プラニメーターの原理としてどのような数学が使われているのかを確かめるために証明を行った。アナログ式とデジタル式には証明をする上で違いが無いことを説明した上で道具の数学的性質を考察した。

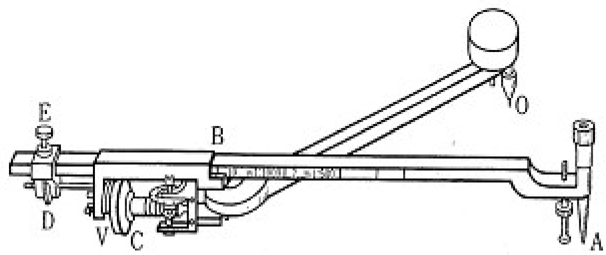


図２　アナログ式プラニメーター

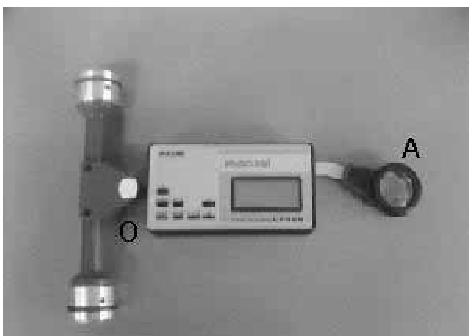


写真 7 デジタル式プラニメーター

写真 8 プラニメーターの裏側

○アナログ式とデジタル式との比較

図 2 と写真 7、8 を比較したとき、図 2 での B は腕 OB、AB の関節部、O は極であり、写真７のローラー間接部 O と対応している。図 2 の針 A は写真 7 のレンズ A、図２の動輪 C は写真 8 の動輪 C と対応している。

アナログ式では、O を固定し、求積したい図形を A でなぞると動輪 C についている目盛りが面積の値を表示する。図２で D、E、V は縮尺調節用のネジである。

動輪 C は腕 AB に垂直な方向に移動する時にだけ回転する。求積する際には動輪の回転量を知ることができればよいので、今回使った器械のローラー(極)が動くことは問題にはならない。(ローラーは腕に平行に動くため動輪の回転数には影響ない)

以上を説明した後、証明を行った。
以下は授業者と生徒のやりとりである。＜T：授業者　S：生徒＞

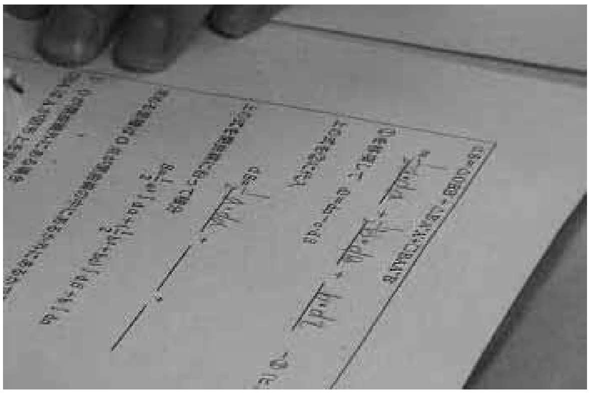


写真 9　生徒の解答

S：「証明は解けたけれど、よくわからない・・」
T：「今やっていることはプラニメーターが微少に動いた時に腕が描いた面積を求め、それを線積分して腕が一周した時の面積を求めています。」
S：「なるほど。」

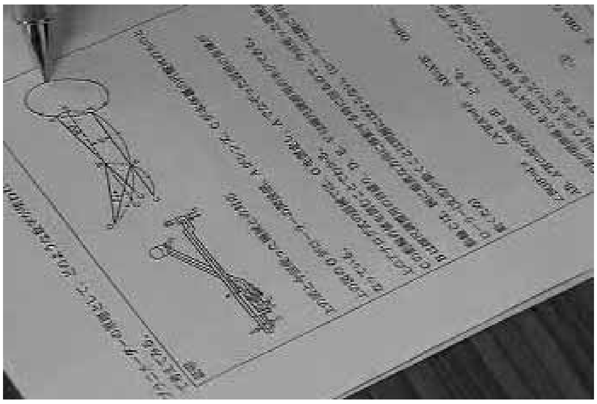


写真 10　説明している生徒

S：「（この閉曲線を）上に動けば面積プラスで下に動けばマイナスなんですか？」
T：「そうです。結局、それら(プラスとマイナス)の値の和が求める面積となります。」
S:「すごい仕組みだなぁ。」

後のアンケートによると、プラニメーターという道具の存在がとても印象的だったという意見が多数あった。

発展として、プラニメーターをもとにして作られた潮汐調和解析器、与えられた関数または微分方程式の解曲線を描く道具などがあることを紹介した。多くの生徒がそれら

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.177-190、2004年3月

の道具にも興味を示していた。

最後に、求積法の歴史はとても古く、色々な数学者による発展によって積分が誕生したことを再確認し、数学を詳しく知らない人でも容易に面積を求められる道具の有用性を述べて授業を終えた。

６．議論

(1)課題①の議論

課題①：求積法の歴史を追体験することで、当時の数学者の試行錯誤を感じとり、生徒の数学観の変容が見られるか。また、自ら学び、自ら考える力の育成は見られたか。

「数学を歴史に沿って考えることは必要なことだ」というアンケート項目について、授業前は67%の生徒が賛成、大賛成とあったのに対し、授業後は83%となり、数学史を学ぶことの必要性を感じた生徒が増えた。授業を通して数学における歴史の意義を感じ取れたのだろう。
上の質問に関して「数学を歴史に沿って考えることは必要であると答えた理由」を事後アンケートより生徒の記述の一部を以下に記す。

・どんな知恵で問題を解決したのかを知ることはためになる。
・公式等がどのような歴史的背景から出てきたかを理解することにより、数学を知ることが出来る。
・授業を受けてみて、数学が測量に大きな影響を与えたことを知ることができたので歴史は大事だと思った。
・昔の人が問題解決にどのように取り組んで、その結果どのような数学が出てきたのかを知ることができた。

以上の結果より、当時の考え方を追体験することにより、数学者達の偉大さを再確認し、数学の歴史的背景を学ぶことの意義を確認できた。また、数学が測量に大きな影響を与えたことを知ったという意見より、数学が人間の営みを通して構成されたものであり実生活に深く関わっていることを認識できたであろう。

さらに次のような、生徒が興味を持っている数学史の意見も得られた。

・統計の歴史。
・代数的な歴史の話に興味がある。
・特に希望の分野は無いがまた数学史の授業を受けてみたい。

以上より、生徒の数学史を学ぶことに対する積極性も見られ、数学に関する興味・関心が高められたといえる。

また授業中、問題を解いている時などに生徒と教師、生徒同士のディスカッション

も数多く見られ、様々な意見が飛び交った。

これは生徒自ら数学を理解しようとする態度、すなわち自ら学び、自ら考える力である。授業を通してこれらの力を育成することができ、課題①は達成されたと思われる。

(2)課題②の議論

課題②：数学が使われている道具による数学的活動を通して、数学の有用性を身近に感じることができ、興味・関心を高められたか。

事前アンケートで「身の回りの道具から数学的な性質を見つけることができるか？」と質問したところ、83%の生徒は無記入であった。この結果より、生徒たちは普段の生活において、身近な道具に潜む数学的な性質を意識していないと考えられる。

事後アンケートより

- 道具を用いることで全ての閉曲線の面積を求めることができるというのは感動的！
- 面積を求める手段として積分で計算するしか頭に無かったが、数学の性質を用いて求める道具の存在が興味深かった。
- 以前、面積を測る道具が作れないかと考えたことがあったが、実際に存在していて驚いた。
- 道具を使った授業は面白い！
- 題材が身近でよかった。
- 数学が何かの役に立っているという印象を受けた。
- どのような道具に数学的性質があるのかといった話を他にも聞きたい。

アンケート結果より、授業後は全ての生徒がプラニメーターに興味を持ち、数学の有用性を確認したことがわかる。また、プラニメーターを使った数学的活動では熱心に取り組む生徒の姿が見られた。今回の授業を通して興味・関心を十分に高めることができたと言え、課題②は達成されたであろう。また、今回扱った以外の道具の数学的性質の話に興味があるといった意見から、今後は生徒自身が身の回りの数学的性質にも目を向けてくれるだろうと期待できる。

７．おわりに

本研究では求積法の歴史、そして現在の求積の方法を通して数学史の重要性、数学のよさを生徒が認識することを目的とした。結果として生徒は数学史に興味をもち、さらに他の歴史も学びたいという意欲も見られた。また数学的性質をもった道具にも非常に興味をもち身の回りに潜んでいる数学的性質を感じ取ることができたであろう。

今後はさらに生徒の興味・関心が高まるような教材を研究し、創造性を培うような授業していくことが筆者の目標である。

出典：中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(11)
発行：筑波大学数学教育学研究室、pp.177-190、2004年3月

謝辞

研究授業の実施に際し、筑波大学数学系の青嶋誠先生、田中秀和先生をはじめ多くの方々にご協力いただきました。厚く御礼申し上げます。

注） 本研究は、平成 15 年度科学研究費、特定領域研究(2)課題番号 15020214「数学用機械と JAVA による移動・変換と関数・微積ハンズオン教材の WEB 化研究」（研究代表者 礒田正美）において開発された歴史的道具を前提にして、平成 15 年度科学研究費、基盤研究(B)(2)課題番号 14380055「数学の文化的視野覚醒と新文化創出のための教材・指導法開発研究」（研究代表者 礒田正美）の一環として行われた。

参考・引用文献

【1】礒田正美(2001).文化的営みとしての数学教育;その方法としての数学史上の一次文献の利用. *中学校･高等学校数学科教育課程開発に関する研究(8)世界の教育課程改革の動向と歴史文化志向の数学教育—代数･幾何･微積 For All プロジェクトの新展開*.筑波大学数学教育学研究室,91.

【2】John Fauvel and Jan van Maanen(2000).*History in Mathematics Education*.Dordrecht; Boston:Kluwer Academic,c2000.

【3】文部省(1999).*高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編*.実教出版.

【4】アルキメデス著,佐藤徹訳(1990).*｢アルキメデス方法｣*.東海大学出版会.

【5】上垣渉(1999).*アルキメデスを読む*.日本評論社.

【6】D.J.Struik(1969).‘*A source book in mathematics,1200-1800,Cambrige,Mass*,:Harvard. University Press.

【7】I.S.Newton(1687).*Philosophiae naturalis principia mathematica* London.Dawson.

【8】ハーマン H.ゴールドスタイン(1979).*計算機の歴史:パスカルからノイマンまで*.共立出版.

【9】T.L ヒース(1998).*復刻版ギリシア数学史*.共立出版.

【10】スチュアート･ホリングデール(1993).*数学を築いた天才たち(上)*.講談社.

【11】水野善右ヱ門，三木久夫共著(1988).*基礎物理学実験*.培風館.

【12】小林真人(2002).球の対積の公式指導に関する授業研究：アルキメデス｢方法｣を題材として. *中学校･高等学校数学科教育課程開発に関する研究(10)｢確かな学力｣の育成と歴史文化志向の数学教育：個に応じた指導、数学史、道具*.筑波大学数学教育学研究室,93-115.

【13】臼田要介(2001).生徒の数学観を変容させるための数学史の活用について：「カバリエリの原理」の教材を通して.*中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(8)テクノロジーの活用による数学教育内容の創造に関する研究：代数、解析、幾何の改革*.筑波大学数学教育学研究室,222-235.

【14】中嶋恭子(2002).｢積分｣の導入における数学史の活用. *中学校･高等学校数学科教育課程開発に関する研究(10)｢確かな学力｣の育成と歴史文化志向の数学教育：個に応じた指導、数学史、道具*.筑波大学数学教育学研究室,127-139.

【15】西本公英(1990).高等学校における微積分の導入に関する一考察. *筑波数学教育研究*(9)筑波大学数学教育研究室,27-36.

http://math-info.criced.tsukuba.ac.jp/Forall/project/history/2003/planimeter/planimeter_index.html

【16】溝口達也(1993).面積を求める場面における学習者の概念の変容と認知論的障害.*数学教育論文発表会論文集(26)*日本数学教育学会,127-132.
【17】塚原成夫(1999).積分における高校生の概念理解への考察. *筑波数学教育研究(18)*筑波大学数学教育研究室,57-62.