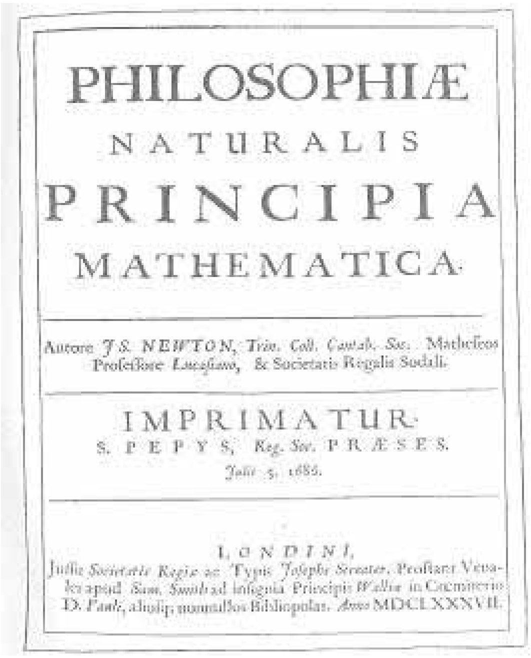
授業資料二日目

求積のはなし

～積分の誕生から現在の求積法～

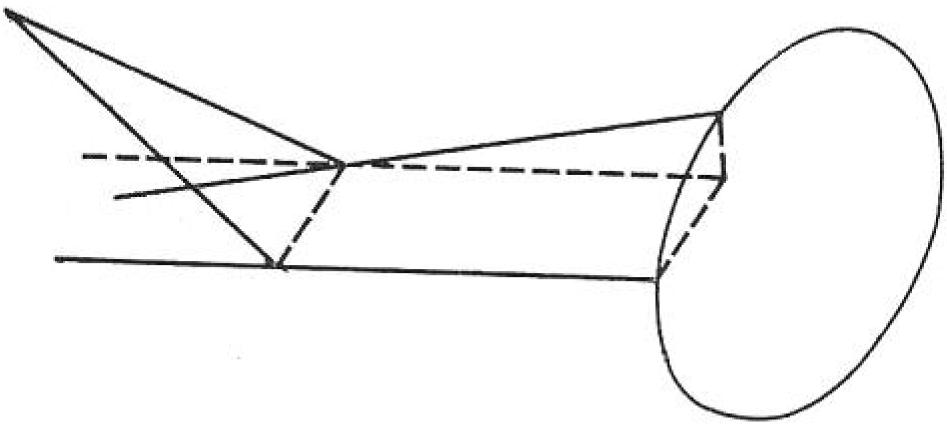


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostant Venales apud Sam. Smith ad insignia Principis Walliæ in Cœmiterio D. Pauli, aliosq; nonnullos Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.



授業者　筑波大学大学院　教育研究科

奥山洋士

１．積分の誕生

積分の概念が生まれる準備として、デカルトが著書｢方法序説｣のなかで座標の概念を導入した。座標によって図形と数量を結び付けることができ、運動の変化を扱うことが容易になったので力学が発展した。

力学の発展によって課せられた問題を扱うため、求積法の概念をまとめあげ、積分の基礎を作った人物がライプニッツとニュートンである。

ライプニッツは｢関数｣、「微分｣、「座標｣、「微分方程式｣などといった言葉を命名し、dy/dx や∫･･･dx などの記号を積分の計算に導入した。

ニュートンは、無限級数の理論(テイラー展開)を用いて、微分、積分、接線、面積、極限などの概念を一つにまとめた。
今までは別々に考えられてきた積分と微分は、お互いに逆の考えであることを発見したのである。

ニュートンの著書「プリンキピア」を読んで、求積法の考え方を理解する。

アイザック・ニュートン(1642～1727)
・イギリスのリンカンシャー州ウルソープで生まれる
・物理学者、数学者、錬金術師
・落ちたリンゴをみて万有引力を発見
・対物レンズの代わりに反射鏡を使った反射望遠鏡を発明
・数学分野の主な著書「プリンキピア」､「光学」
・王立協会の会員、国会議員、造幣局長官、王立協会会長などを経てナイトの称号を授かる

LEMMA I.

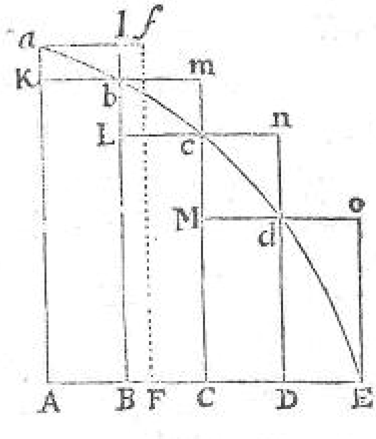
Quantitates, ut & quantitatum rationes, quæ ad æqualitatem dato tempore conſtanter tendunt & eo pacto propius ad invicem accedere poſſunt quam pro data quavis differentia; fiunt ultimo æquales.

Si negas, ſit earum ultima differentia *D*. Ergo nequeunt propius ad æqualitatem accedere quam pro data differentia *D*: contra hypotheſin.

Lem-

Lemma II.

Si in figura quavis AacE *rectis* Aa, AE, *& curva* AcE *comprehenſa, inſcribantur parallelogramma quotcunq;* Ab, Bc, Cd, &c. *ſub baſibus* AB,BC,CD,&c. *æqualibus, & lateribus* Bb, Cc, Dd, &c. *figuræ lateri* Aa *parallelis contenta; & compleantur parallelogramma* aKbl, bLcm, cMdn, &c, *Dein horum parallelogrammorum latitudo minuatur, & numerus augeatur in infinitum: dico quod ultimæ rationes, quas habent ad ſe invicem figura inſcripta* AKbLcMdD, *circumſcripta* AalbmcndoE, *& curvilinea* AabcdE, *ſunt rationes æqualitatis.*



Nam figuræ inſcriptæ & circumſcriptæ differentia eſt ſumma parallelogrammorum $Kl+Lm+Mn+Do$, hoc eſt (ob æquales omnium baſes) rectangulum ſub unius baſi Kb & altitudinum ſumma Aa, id eſt rectangulum $ABla$. Sed hoc rectangulum, eo quod latitudo ejus AB in infinitum minuitur, fit minus quovis dato. Ergo, per Lemma I, figura inſcripta & circumſcripta & multo magis figura curvilinea intermedia fiunt ultimo æquales. *Q. E. D.*

補題１
任意の有限時間内において絶えず同等へと向かって収束し、かつその時間が終わる以前に、任意の与えられた差よりも近くへと相近づく諸量や諸量の比は、窮極において相等しくなる。
もしこれを否定するとして、窮極においてそれらが不等であると仮定し、D をそれらの窮極における差としよう。そうすれば、それらはその差 D よりもさらに近く同等へと近づくことは出来ないはずである。これは仮定に反する。

補題２
直線 Aa、AE、および acE によって限られた任意の図形 AacE において、等しい底 AB、BC、CD 等、および図形の１辺 Aa に平行な辺 Bb、Cc、Dd 等の内部に含まれる任意個数の平行四辺形をそれに内接させ、かつ平行四辺形 aKbl、bLcm、cMdn 等を完成させる。そうすれば、もしこれらの平行四辺形の幅が減少し、その個数が無限に増加するものと仮定すれば、内接図形 AKbLcMdD、外接図形 AalbmcndoE、および曲線図形 AabcdE が相互に対して取るべく窮極の比は相等しくなるであろう。
なぜならば、内接図形と外接図形との差は平行四辺形 Kalb、Lbmc、Mcnd、DdoE の和、すなわち、それらの底が全て等しいことから、それらの底の一つである Kb とそれらの高さの和 Aa とのなす長方形、すなわち長方形 ABla に等しい。ところが、この長方形は幅 AB が無限に減少するものと仮定されているから、任意の与えられた大きさよりもさらに小さくなる。ゆえに（補助定理１より）内接図形と外接図形とは窮極において相等しくなり、従って、中間にある曲線図形は、窮極において、なおさら上の各々に等しくなるからである。よって証明された。

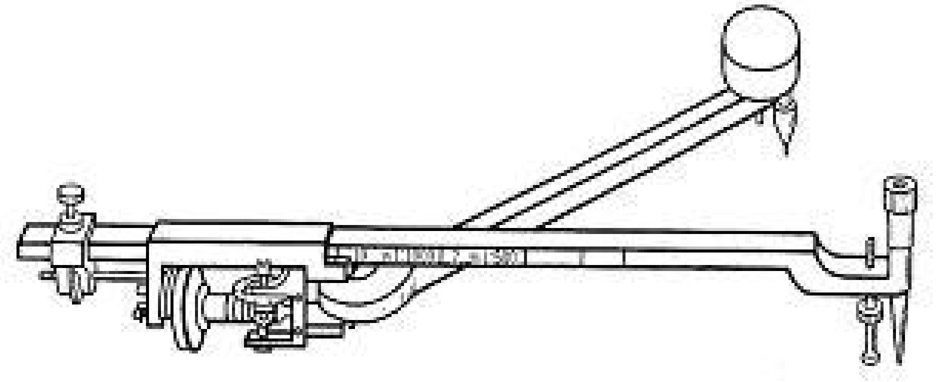
問１　ｘ軸と $y=x^2$ とで囲まれた面積($0 \leqq x \leqq 1$)は 1/3 である。
区分求積法を用いてこの結果を確認しなさい。

解

２．積分の器械化

１９世紀後半、物理学者たちはさまざまな器械の機構を数学的な方程式で記述しうるようになった。またその逆の作業、一組の方程式が与えられた時に、それらの方程式にうまく合うような動作をする器械なり器具なりを作り出すことにも取り組んだ。

面積を求める積分の働きをもつ「プラニメーター」という器械も作られている。



アナログ式プラニメーター

上の器械は単純閉曲線で囲まれた部分の面積を測定するためもので、この種の器械で最初のものは 1814 年にドイツの J.H.ヘルマンに作られた。様々な改良を経て、19 世紀の中ごろにスイスの J.アムスラーが実用的なものとした。

(参考)
規模の大きいものを「機械」、小さいものを「器械」と書いて区別することがある。
大辞林 第二版 (三省堂)より

実際にこの器機を使って茨城県の面積を測量してみる。

使い方
オレンジ色のプラニメーター

1)水平な台の上に図面をおく。 2)プラニメーターのトレーサーレンズ(器械先端のレンズ)を測定図形のほぼ中央に置き、ローラーとトレーサーアーム(レンズがついている腕)が互いに直角になるように設置する。 3)２，３度トレーサーレンズで図形の外周部をなぞってスムーズに動くか確かめる。もし、無理な動きがあった場合はローラーの位置をずらして調整する。 4)図形の外周上の任意の位置に印をつけ、ここをスタートポイントにする。 5)レンズの中心をあわせ、電源を入れ、表示が０になっていることを確かめてから図形の外周を「右回り」になぞり一周する。 印のところまできたらホールドボタンを押し、表示された値を読む。 6)表示上の数字の１単位は０．１cm^2なので、得られた数値に０．１をかけてやることで(表示された数値)cm^2となる。

赤色のプラニメーター

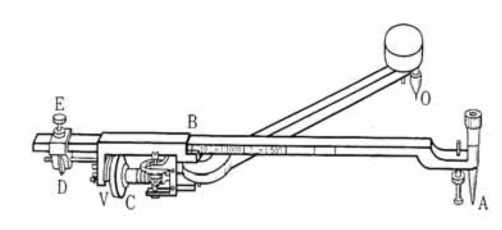
1)～4)は上と同じ。 5)レンズの中心をあわせ、電源を入れ、「UNIT」キーを押し単位を「cm^2」にあわせる。 「START」キーを押し、表示が０になっていることを確かめてから図形の外周を「右回り」になぞり一周する。印のところまできたら「HOLD」キー押し値を読む。

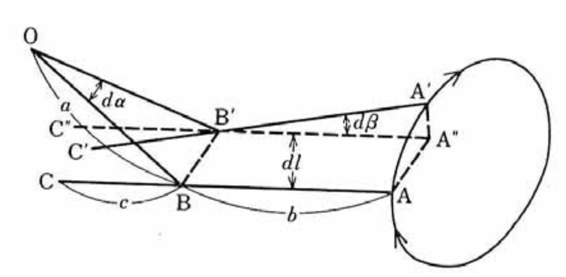
縮尺と単位に注意して茨城県の面積を計算しなさい。

茨城県の面積は ＿＿＿＿＿＿ km^2

プラニメーターの原理として、どのような数学が使われているかを証明を通して考えてみる。

証明





上の図と今回使った機械との対応

上の図の O がローラーの間接部、A がレンズ、C が本体裏の円盤状のものとなっている。

上のアナログ式の器械では、O を固定し、A でなぞった図形の面積が
C の動輪の値を読むことでわかる。
B は縮尺調整用の目盛り、D、E、V は縮尺調節用のネジである。

動輪 C は、腕に垂直な方向に移動する時に回るので、今回使った器械の
ローラー(極)が動くことは問題にはならない。(ローラーは腕に平行に
動くため)

$\angle BOB'=d\alpha$　　$\angle A''B'A'=d\beta$　　$AB//A''B'$　　$OB=a$　　$AB=b$　　$BC=c$
AB、A”B’の間の距離を dl　　とする。

A の針が閉曲線上を OB’A”を経て OB’A’にごくわずかに移動したとする。C にある動輪は C から C’にいたる AB に垂直な方向の変位に対して回転する。その回転量を dn とすると

$dn=dl-c\cdot d\beta$　　　　　$-①$

OBA から OB’A’に変位するとき、OBA の描いた面積ｄS は

$dS=\triangle OBB'+\triangle B'A''A'+\square BAA''B'$

$\underline{\qquad\qquad}$ ＋ $\underline{\qquad\qquad}$ ＋ $\underline{\qquad\qquad}$ －② (ヒント：弧度法)

①を移項して　$dl = dn + c \cdot d\beta$

上の式を②に代入

$$dS = \underline{\qquad\qquad} + \underline{\qquad\qquad} + \underline{\qquad\qquad}$$

上の式を閉曲線に沿って積分

$$S = \frac{1}{2}a^2\int d\alpha + \left(\frac{1}{2}b^2 + bc\right)\int d\beta + b\int dn$$

求める面積は O 点が閉曲線の中にあるか外にあるかで異なる。

1)　O が閉曲線外にある場合

OBA は A が図形上を変位して再び最初の位置にくるので

$$\int d\alpha = \underline{\quad} \qquad \int d\beta = \underline{\quad}$$

$\therefore S = b\int dn = b \cdot 2\pi r N$　(r：動輪の半径　N：動輪の回転数)

2)　O が閉曲線内にある場合

A が図形上を移動して再び最初の位置にくるまでに O のまわりを一回転するので

$$\int d\alpha = \underline{\qquad} \qquad \int d\beta = \underline{\qquad}$$

$$\therefore S = \pi(a^2 + b^2 + 2bc) + b\int dn = \pi(a^2 + b^2 + 2bc) + b \cdot 2\pi r N$$

以上より、N(動輪の回転数)を測定することにより面積が求まる。

Memo