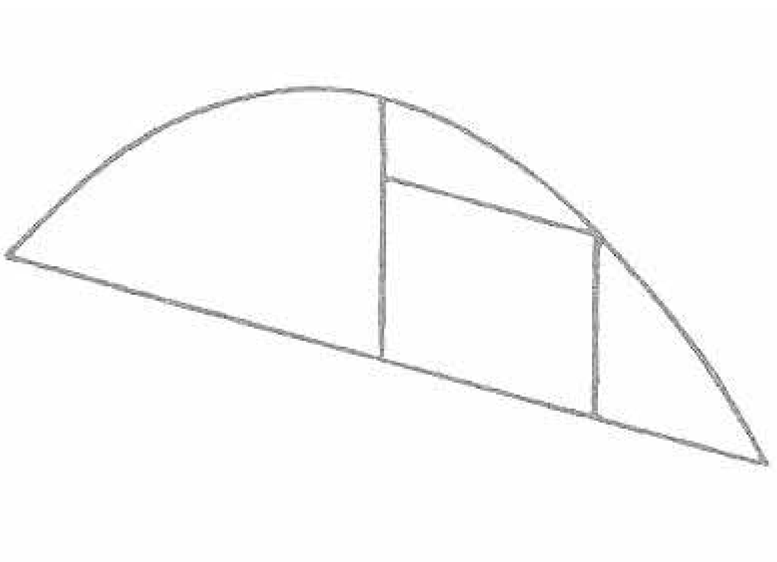
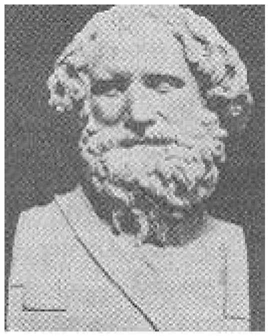
授業資料一日目

求積のはなし

～積分によらない求積法～





授業者　筑波大学大学院　教育研究科

奥山洋士

１．求積の歴史

古来、人類は生活上の必要もあって、種々の平面図形の面積及び立体の体積の計算方法を探究してきた。それらの記録は、古代エジプトのリンドパピルス、古代バビロニアの粘土板などに残されている。

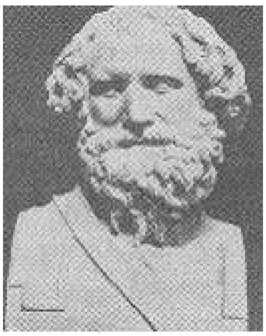

リンドパピルス　　　　　　粘土板

しかしながら、平面図形の中で、円や曲線図形は身近に観察できるものでありながら、面積は近似的にしか求めることが出来なかった。

２．アルキメデスによる放物線の求積

放物線と直線で囲まれた面積を最初に求めた人物はアルキメデスである。

アルキメデス（B.C.287～B.C.212）



・シチリア島シラクサで生まれる
・数学者、物理学者、技術者
・円周率の計算
・アルキメデスの原理の発見
・　楕円・放物線の面積・立体の表面積・体積など
　多くの求積問題を解決した
・　主な著書　「方法」、「円の計測」、「らせんについて」、「放物線の求積」

「放物線の求積」より

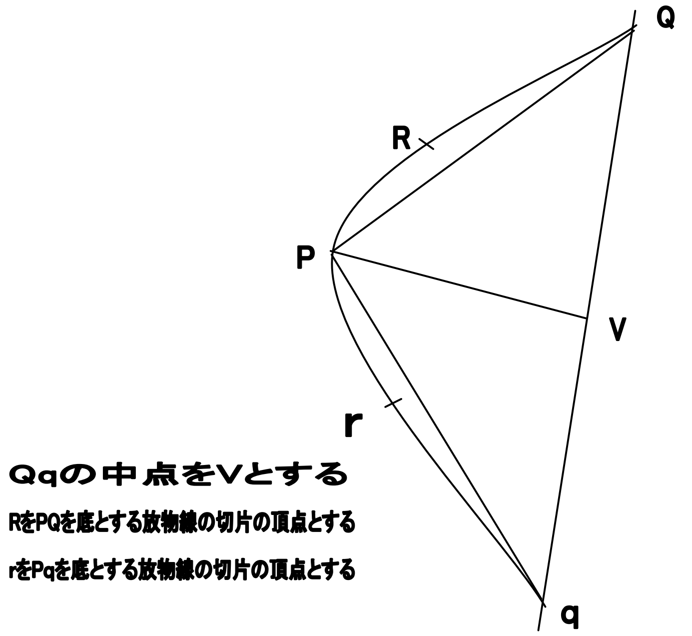
命題２０　　　△PQq＞$\frac{1}{2}$（弓形 QPq）

命題２１　　　△PQq＝８△PRQ＝８△Pqr

命題２２
A、B、C、D、・・・を面積の列とし、A＝４B、B＝４C、C＝4D、･･･とする。
放物線の切片ＰＱq 内の△PQq の面積を A とおくと
A+B+C+D＋・・・＜切片 PQq の面積

命題２３
A+B+C+D＋・・・＋Z＋$\frac{Z}{3}$＝$\frac{4}{3}$A

命題２４
放物線の切片 PQq の面積は△PQq の面積の$\frac{4}{3}$倍である。



命題２４を証明してアルキメデスの求積法を理解する。

証明

$\frac{4}{3}$△PQq＝K、切片 PQq＝S とおく。S≠K とする。

１）S＞K と仮定する。

A＝△PQq とおくと命題２１より

$$B=\triangle PRQ+\triangle Prq=\underline{\qquad\quad}+\underline{\qquad\quad}=\frac{1}{4}\triangle PQq=\frac{1}{4}A$$

また、

PR を底とする放物線の切片の頂点を S、RQ を底とする放物線の切片の頂点を T
Pr を底とする放物線の切片の頂点を s、rq を底とする放物線の切片の頂点を t
とすると命題２１より

$$C=\underline{\qquad}+\underline{\qquad}+\underline{\qquad}+\underline{\qquad}=\frac{1}{8}\triangle PQq+\frac{1}{8}\triangle PQq+\frac{1}{8}\triangle Prq+\frac{1}{8}\triangle Prq$$

$$=\underline{\qquad\quad}+\underline{\qquad\quad}=\frac{1}{4}B$$

$D=\frac{1}{4}C$　、$E=\frac{1}{4}D$　　・・・・　　$Z=\frac{1}{4}Y$

となるので、命題２０より

$$A>\frac{1}{2}S、B>\underline{\qquad}、C>\underline{\qquad\quad}\cdots$$

となり、この操作を次々行えば、切片 PQq と A、B、C、・・・との面積の差は S と K との差よりも小さく出来る。

∴S-（A＋B＋C＋・・・＋Z）＜S-K

∴移項して整理する $\underline{\qquad\qquad\qquad} > \underline{\qquad}$　　・・・①

一方、命題２３より　$A+B+C+\cdots+Z+\frac{Z}{3}=\frac{4}{3}A=K$

だから　$\underline{\qquad\qquad\qquad} < \underline{\qquad}$　　・・・②

①と②は矛盾。つまり S＞K ではない。

２）S＜K と仮定する。

K-S＝e とおく

等比数列 A,B,C、・・の項を十分大きく取れば末項 Z を e 以下にできる・・③

一方、命題２３より

$$\underline{\hspace{6cm}} = \frac{4}{3}A$$

∴移項して整理すると、$\underline{\hspace{8cm}} = \frac{Z}{3} < Z$

また、$\frac{4}{3}\triangle PQq - S = \frac{4}{3}A - S = K - S = e$　・・・④

③、④より

$$\underline{\hspace{8cm}} < Z < e = \frac{4}{3}A - S$$

従って

$$\underline{\hspace{6.5cm}} > \underline{\hspace{1.3cm}} \qquad ・・・⑤$$

しかし左辺の面積の和はどれも切片の中にあり、互いに重なり合わないから

$$\underline{\hspace{7cm}} < \underline{\hspace{1.3cm}} \qquad ・・・⑥$$

⑤と⑥は矛盾。つまり S＜K ではない。

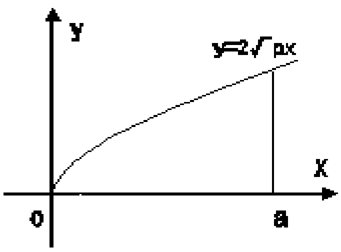
１)、２）の結果より、S>K、S<K でもないので S＝K となる。

放物線と直線に囲まれた図形から、三角形を次々とっていき、面積を求めているので、この方法は「取り尽くし法」とよばれる。この時代には、極限の概念がまだない。

問１
取り尽くし法を使わずに、等比数列の和の公式と極限の考えを用いて命題２４を確認せよ。

解

問２
積分法を用いて $y=2\sqrt{px}$ をｘ＝０からｘ＝a まで積分することにより命題２４を確認せよ。



解

３．求積法の発展

17 世紀までは求積法に関して著しい発展はみられない。近代の求積法の先駆をなしたのはケプラーである。
彼は、「円の面積と、その直径を一辺とする正方形の面積との比は 11：14 である」といっている。

さらに、惑星と太陽を結ぶ線分が一定時間にはく面積はそれぞれの惑星について一定であることを示した「面積速度一定の法則(ケプラーの第二法則)」がある。この法則を証明する際、楕円の周を少しずつ細かく分割していき、各弧に太陽のある点を頂点とする小部分を対応させ、それぞれの面積の和を計算した。

また 17 世紀中ごろ、カヴァリエリという人物が「不可分量」という概念を用いて面積や体積をもとめている。

カヴァリエリ（1598～1647）
・ミラノで生まれる
・パルマの修道院長、大学数学教授を兼任する
・1629 年、ガリレイの推薦でボロニアの数学教授になり、亡くなるまでその地位にいた
・ 主な著書 「連続体の不可分要素を用いた新しい方法による幾何学」

彼の著書、「連続体の不可分要素を用いた新しい方法による幾何学」より

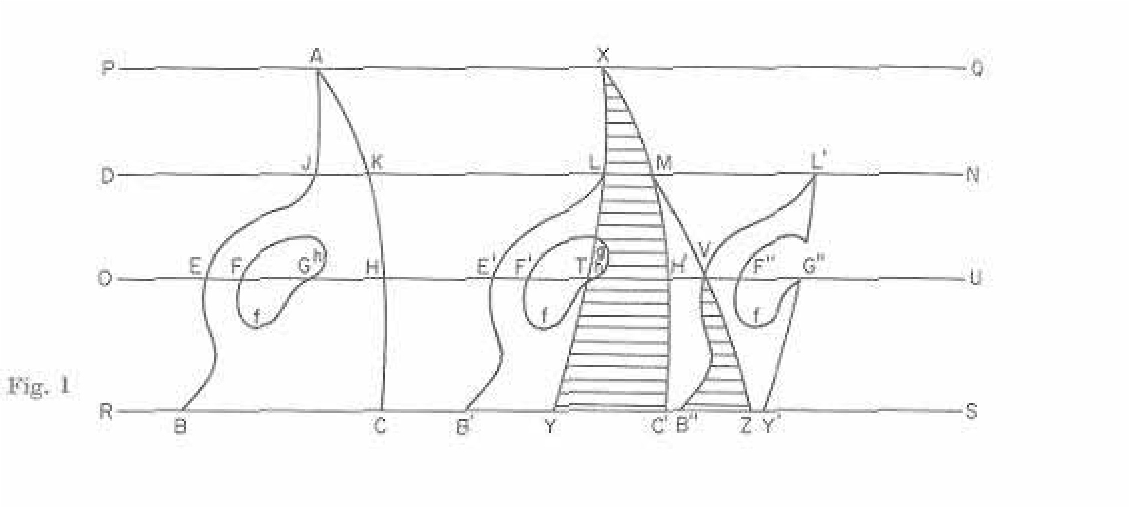
「カヴァリエリの原理」を理解する。

The Theorem. If between the same parallels any two plane figures are constructed, and if in them, any straight lines being drawn equidistant from the parallels, the included portions of any one of these lines are equal, the plane figures are also equal to one another; and if between the same parallel planes any solid figures are constructed, and if in them, any planes being drawn equidistant from the parallel planes, the included plane figures out of any one of the planes so drawn are equal, the solid figures are likewise equal to one another.

訳）

この定理では、ある平行線の間に２つの平面図形があるとき、そしてその平行線の間にその平行線から等距離に引かれたどんな直線においても、その直線の図形に含まれる線分がどんな場合にも等しいなら、その２つの平面図形は互いに等しい。

また、ある平行な平面の間に２つの空間図形があるとし、その平行な平面の間にその平行な平面から等距離に引かれたどんな平面においても、そしてその引かれた平面の立体図形に含まれる部分がどんな場合にも等しいなら、それらの立体図形も互いに等しい。



「連続体の不可分要素を用いた新しい方法による幾何学」より

上の図の説明

図形 ABC と図形 XYZ を重ね合わせることを考える。二つの図形が合同ではなくとも、一部分は一致するはずなので、その部分を重ね合わせる。
(上の図では XYC')

次に、一致しなかった部分を考える。(上の図では LE'B'YTfF')図形 ABC の重なり合わなかった部分に含まれる線分(PQ に平行なもの)は、各々同じ直線上にあって図形 XYZ の重なり合わなかった部分に含まれる線分に対応するので、重なり合わなかった部分の図形、またはそれらを集めたものは、同じ平行線の間に存在することは明らかである。

その次に、図形 LE'B'YTfF'と図形 MC'Z の重ね合わせを考える。そうすると図形 VB''Z が共通している。
従って、図形 ABC が図形 XYZ にすべて合わさるまで、次々重ねていけば図形 ABC と図形 XYZ の面積は完全に一致すると言える。

不可分量とは面積、体積を分割してそれらの要素にまで細分化していくこと

不可分量の考え方
「線の不可分量は点である」
「面の不可分量は線である」
「立体の不可分量は面である」

問３
$x^2+y^2=a^2$ の面積は πa^2 である。「カヴァリエリの原理」を用いて、
楕円 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ $(a>b>0)$ の面積は πab であることを証明せよ。

解

Memo