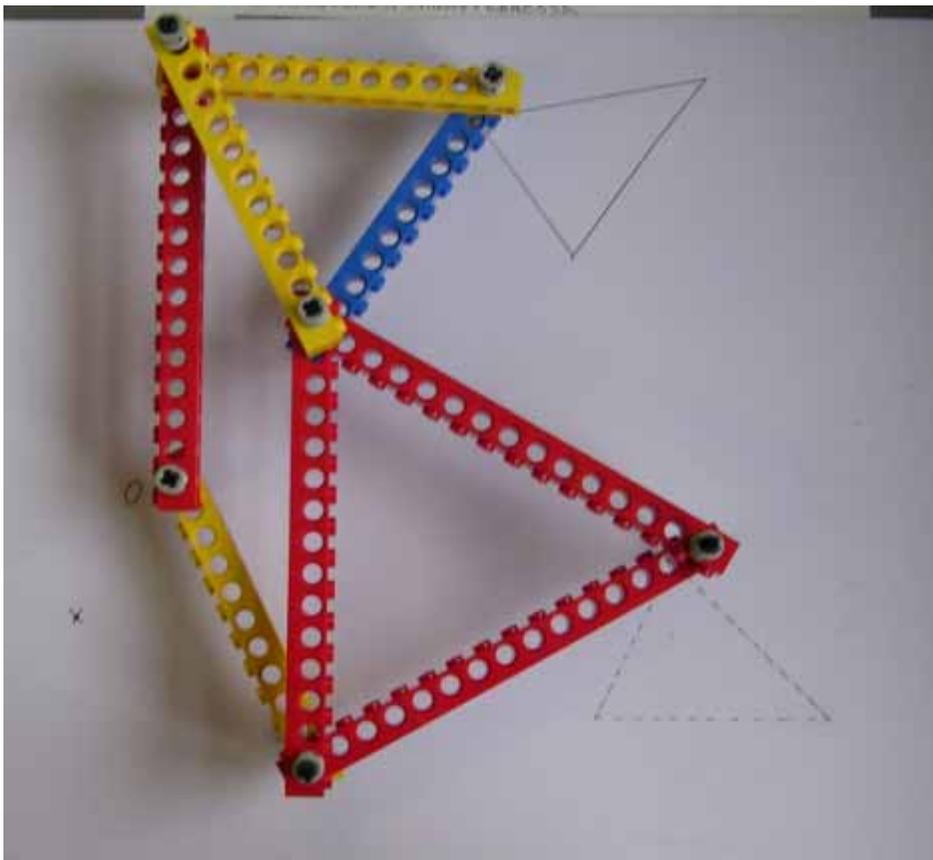


プラジオグラフ (PLAGIOGRAPH)
を使って、図形の移動について考えてみよう

< 4 > いろいろなプラジオグラフ



筑波大学大学院教育研究科数学教育コース1年
田中 真樹子

3年 組

名前

ラジオグラフで回転移動した図形が描けるのはなぜか

<準備>

回転移動とは・・・
 各点が点Oの周りに同じ角度ずつ回転した移動だった。
 Oからの距離が元の図と描いた図では等しい。

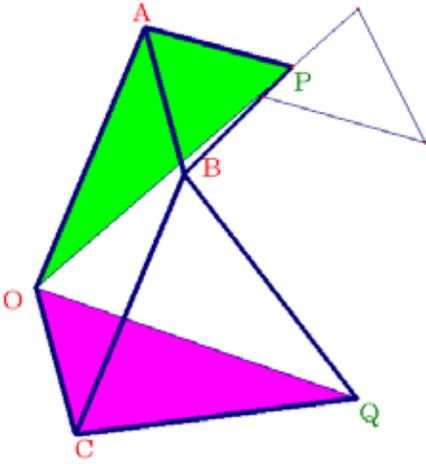
何を証明すればいいのか
 POQが一定であること
 OP=OQであること

<仮定> OC=AB=AP=PB

AO=BC=BQ=CQ

<証明>

四角形AOBCは平行四辺形を導く。
 仮定より 対辺がそれぞれ等しい ので、
 四角形AOBCは平行四辺形。



AOP CQO から OP=OQ を導く。
 仮定より、AP=CO、AO=CQ
 より OAB= BCO、また、BAP= BCQ = 60° なので
 OAP= QCO
 2辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいので AOP CQO
 対応する辺なので OP=OQ
 四角形AOBCが平行四辺形から AOC+ BCO = 180° を導く。

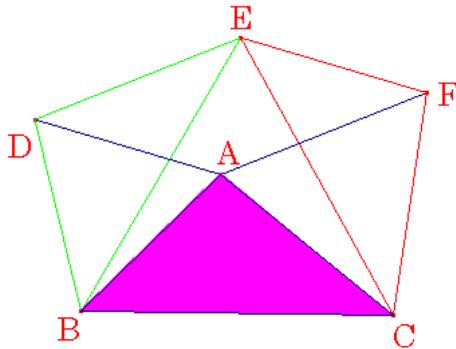
から POQ が一定 (この場合は60度であること) を導く。
 三角形の内角の和なので、OAB+ BAP+ AOP+ APO = 180°
 また、より OAB + POQ + AOP + CQO = 180°
AOC

AOP CQO より、ば APO = CQO なので、2つの式の上下を比べて
 BAP = POQ
 (この場合は、BAPが60°なので POQも60°となる。)

<結論>

よって POQ が一定であることと、OP=OQ が証明され、ラジオグラフが回転移動する図形を描く道具であることが証明された。

宿題の解答



DBE と FEC

平行四辺形

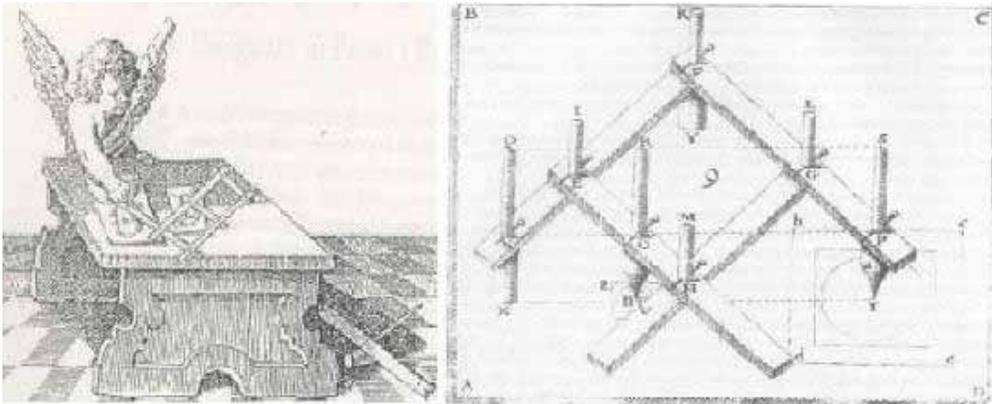
<理由>

ABC DBE の理由
 正三角形の辺なので、
 $AB = DB$, $BC = BE \dots$
 $\angle DBC = \angle DBE + 60^\circ$
 $\angle DBC = \angle ABC + 60^\circ$
 よって $\angle DBE = \angle ABC \dots$
 、より2辺とそのはさむ角が
 それぞれ等しいので、
 $ABC \cong DBE$

四角形 ADEF が平行四辺形の理由
 正三角形の辺なので、 $FA = FC$
 $DBE \cong FEC$ より $FA = DE$
 よって $FA = DE \dots$
 同様にして $DA = FE \dots$
 、より2組の対辺がそれぞれ
 等しいので、四角形 ADEF は平行
 四辺形になる。

同様にして $ABC \cong FEC$
 も証明できる。

パンタグラフ (17世紀・イタリア)

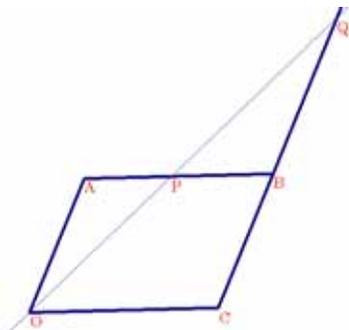


シルベスターの証明

シルベスターは、それまで使われていたパンタグラフという、拡大・縮小機をもとに、この道具を考案しました。(前ページ参照)

では、どのように考案していったのか、追ってみましょう。(シルベスターが書いた論文「ON THE PLAGIOGRAPH aliter THE SKEW PAMTIGRAPH」に書いてあることを紹介します。

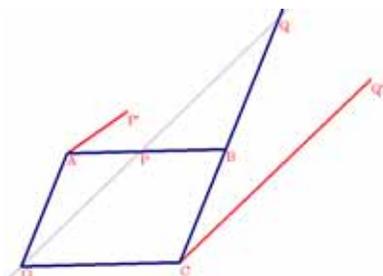
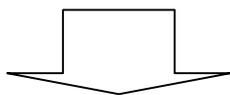
<従来のパンタグラフ>



Oは固定点、Pはトレースする点

Qはそれに対応して動く点

O, P, Qは一直線上に並んでいる



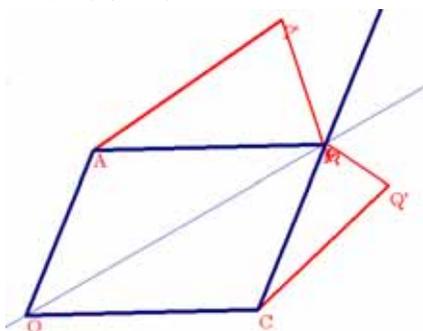
$PA = PQ$ となるように P, Q を設定する。
すると、 POQ は一定となる。

$$OQ : OP = AC : AP$$

PをBに近づけると・・・



<プラジオグラフ>



シルベスターの変形パンタグラフ(プラジオグラフ)の出来上がり。さらに、

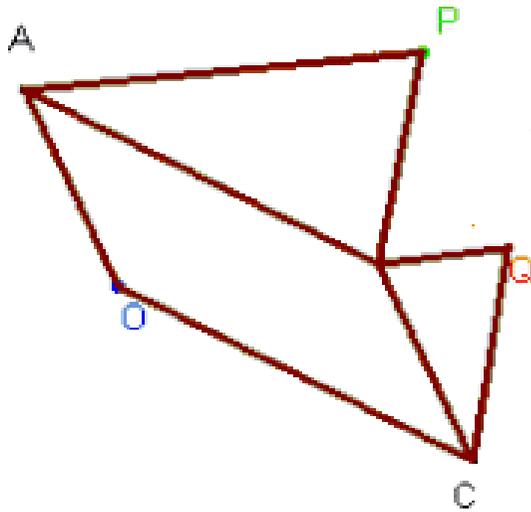
$BP = AB, CQ' = BC$
にすると、今日、考察して証明した道具と同じになる。

< 発展問題 >

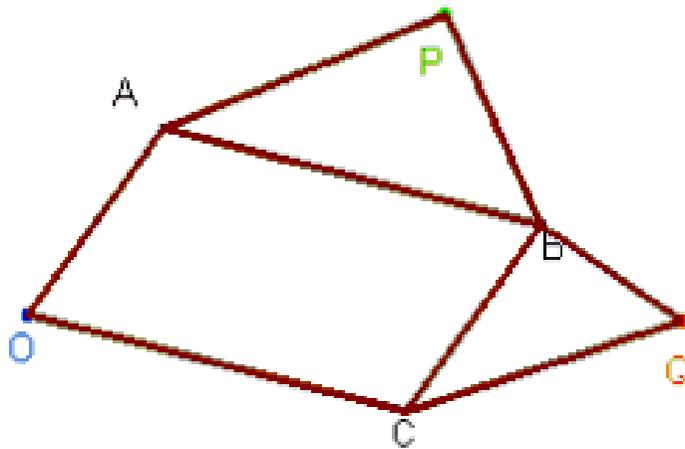
下の道具もプラジオグラフとよばれる道具です。今までの道具と少しずつ違います。今までの道具との違いや、描かれる図形の違い(なんでそうなるのか)について考えてみよう。

A) 正三角形を二等辺三角形に変えたらどうなる？

(ABP CQB 、 $AB=AP$ 、 $CQ=CB$)



B) 正三角形を2つの相似な三角形に変えたらどうなる？
($\triangle ABP \sim \triangle CQB$ $AP:CB=AB:CQ=PB:BQ$)



「ラジオグラフは面白い」と、感じていただけただしょうか。

「まったくなんでこんな道具について勉強しなくっちゃならないのかな？」

「わかんないよ。証明・・・」

という声が、たくさん聞こえてきました・・・

ラジオグラフに出会って、その仕組みを知ること、今回、私たちは少しだけラジオグラフについて詳しくなりました。同時に、パンタグラフを土台にしてラジオグラフを考案(発明)したシルベスターの見方を追うことで、私たちの証明と少し違うシルベスターの考え方に触れることができたのではないかと思います。結果、今まで知らなかったヘンな道具を1つ知ること、自分たちが見ている世界が少し広がったと感じていただければ幸いです。

私たちが教科書を通して学んでいる数学は、先人が苦労して調べたり研究したりした結果を私たちが学び易いように整理したものです。効率よく学べる反面、なんだか機械的に数学を学ぶようで、数学の魅力が半減してしまっているのも事実です。記号・定理・証明の仕方・計算の仕方等、1つ1つの数学には歴史があります。その時代の人々が知恵を絞り、発見したり説明したりすることで数学は発展してきました。国や時代が違えば、話す言葉や考え方や習慣が異なるように、それぞれの数学の生まれや考え方にもその国・習慣に基づいた独特の文化があります。本来、数学はたくさんの人たちの文化の中で発展してきたものだからです。

学ばなければならない数学ではなく、知ることにより世界を広げてくれる数学を目指して授業を組みました。ラジオグラフという道具について学び、その道具が背負っている歴史について知り、考案したシルベスターが生きた時代背景に触れ、数学と向き合いたいと思ったからです。

また、普段難儀している証明について、証明の組み立て方、証明していく際の考え方等についても学んで欲しいと思いました。「回転移動」という今まで知らなかった移動について知り、道具について知っている知識を総動員して、1つ1つ小さな証明を重ねていくことでその動きを解明していきました。1つ1つが明らかになっていく過程は、大変だけど数学の醍醐味でもあります。ハイレベルなことへ挑戦することになりましたが、皆さんが一生懸命考えて解こうとした態度や考え方は、大きな糧となって皆さんの中に残ることと思います。

この学習を通じて、一味違った数学との付き合い方を学んでくれればいいな、と考えています。

振り返り

1・今日の(4日間の)授業を受けて、自分にとって大事だと感じたことを書きましょう。

2. プラジオグラフについてどんなことがわかりましたか。(いくつかでも を)

- あ) 動きの特徴がわかった。
- い) 回転移動とは何かがわかった。
- う) プラジオグラフで回転移動の図形がかけるための条件がわかった。
- え) なぜ、プラジオグラフで回転移動の図形が描けるかわかった。
- お) 証明について理解した。
- か) パンタグラフとのちがいがわかった。
- か) その他()

3. 授業のどのようなところに興味を持ちましたか。(一方に をつけ、理由を具体的に書いてください。)

- あ) 興味をもてたところがあった。
- い) 興味をもてなかった

あ) どのところ? い) 理由は?

4. シルベスターの発見に至った方法と、自分たちの証明と比べてどのように感じましたか。

5. この授業で学んだこと・考える姿勢は、普段の数学や生活のどのような場面に生かせそうですか。

6. 授業の感想を自由に書いてください。

7. 証明の一般性について理解できましたか。 できた・よくわからなかった