2003年12月8日（月）

授業研究4日目

～古代の音楽～

ピタゴラス音律にみられる数学

筑 波 大 学 附 属 高 等 学 校　　2 年　　組　　番　　　氏 名

授業者：筑波大学大学院教育研究科　白川 嘉子

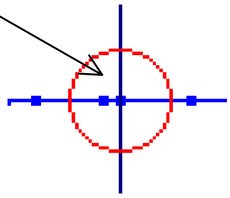
0. 復習

◎ ピタゴラス音律を作図したときにずれが生じ、そのずれを『**ピタゴラス・コンマ**』という。

<計算>

理想は、$\frac{1}{2}=\frac{265720.5}{531441}$　　実際は、$\frac{262144}{531441}$

理想－実際 ＝ $\frac{3576.5}{531441}$ のずれがある。



これは、$\frac{1}{2}=\frac{265720.5}{531441}$ より小さいので、$\frac{1}{2}$ より左側に点がある。

◎ ピタゴラス･コンマはソ＃とレ＃の間に埋め込まれることで解決された。

◎ 音は波の一部である。

◎ 弦の長さ(l)と振動数(f)は**反比例**の関係になっている。

◎ すべての波形は sin 波と cos 波で表される。

$$f(t)=a\sin\omega t \qquad (\theta=\omega t)\ \cdots(\mathrm{i})$$

$$g(t)=b\cos\omega t \qquad (\theta=\omega t)\ \cdots(\mathrm{ii})$$

1. 波を数式で表してみよう。

と、その前に・・・・

◎ 波には、周期(T)が存在する。

振動数と周期には

$$f=\frac{1}{T} \qquad \cdots(※)$$

という関係がある。

ここで、周期(T)、振動数(f)、角速度(ω)の関係についてみてみよう。

・T ：周期　→　波が 1 回上下するのにかかる時間（何秒＜sec＞）

・f ：振動数 →　1 秒間に上下する波の回数（何回＜Hz＞）

・ω ：角速度 →　1 秒間に進める角度（何度＜°/sec＞）

◎ 下の表を完成させよう。

T (sec)	1/4	1/3	1/2	1	2	3
f (Hz)	4	3	2	1	1/2	1/3
ω (°/sec)	1440			360		

◎ どのような計算をして、ωを求めましたか？

つまり、角速度と振動数には

$$\omega = \boxed{\quad\quad}$$

という関係式が成り立ち、角速度と周期には(※)から

$$\omega = \boxed{\quad\quad}$$

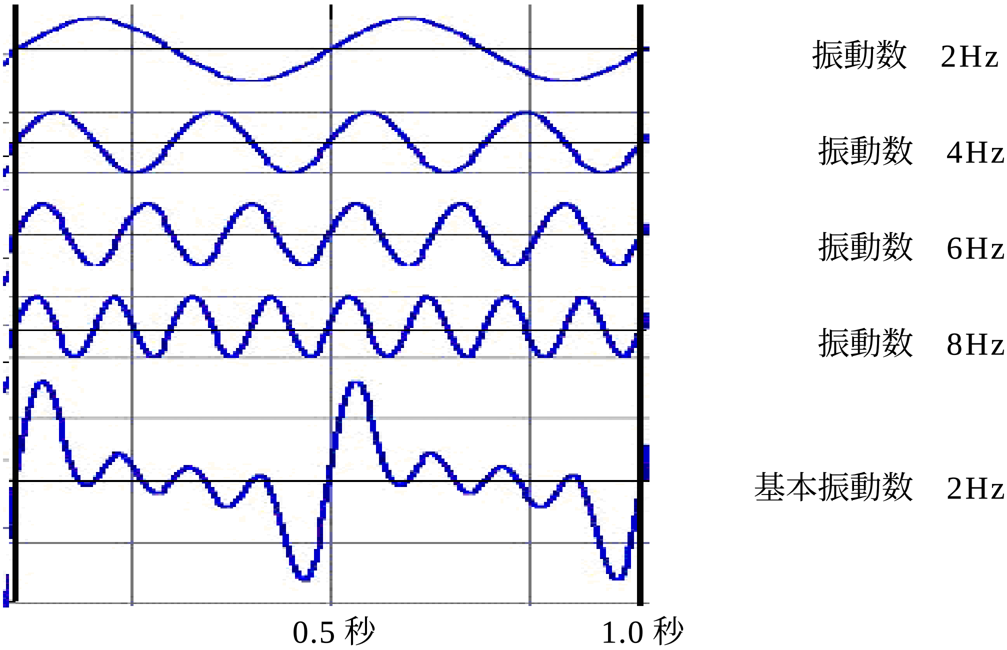
という関係がある。

◎ 上記のことをふまえると、(ｉ)について、aに各波の振幅が代入でき、かつωには各波の角速度を代入することができることがわかる。また、波は単純な波をたし合わせて考えることができるので、

$$f(t)=a_1\sin\omega_1 t+a_2\sin\omega_2 t+a_3\sin\omega_3 t+\cdots\cdots+a_n\sin\omega_n t \quad \cdots(*)$$

という式が得られる。これで、『複雑な波を数式で表せる』ようになった。

ところで、波をよく見てみよう。何か規則は無いだろうか？



たし合わされた波の 1 周期に含まれている一番大きな波の振動数を**基本振動数**という。

たし合わせた波の振動数は基本振動数の**整数倍**になっている。ここで、

$$\omega=360f$$

であったから、ωも**整数倍**になっていることがわかる。よって(*)は次のように書き換えることができる。

$$f(t)=a_1\sin\omega t+a_2\sin 2\omega t+a_3\sin 3\omega t+\cdots\cdots+a_n\sin n\omega t \quad \cdots(\text{i})'$$

よって、単純な波をたしていけば、複雑な波になることがわかり、それを数式で表せるようになった。

cos 波も(ii)について sin 波と同様にすると、

$$g(t)=b_1\cos\omega t+b_2\cos 2\omega t+b_3\cos 3\omega t+\cdots\cdots+b_n\cos n\omega t \quad \cdots(\text{ii})'$$

が得られる。(i) ′ (ii) ′ の式をたし合わせて式にすると、

$$h(t) = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots\cdots + a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

さらに、波が常にt軸を振幅の中央としているわけではないので、波がt軸から上の方や下の方にある場合も考えなければならない。そこで、上の式に定数a_0を加えると、

$$h'(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots\cdots + a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

という式が得られ、
『複雑な波を単純な波に分解』⇔『単純な波をたし合わせて複雑な波を形成』
を数式で表すことが可能になった。

2. 実際に波を数式で表してみよう。

◎ ドの音の波は？

◎ ソの音の波は？

◎ ドとソの和音の波は？

≪次回≫

音楽の波を調べてみよう。